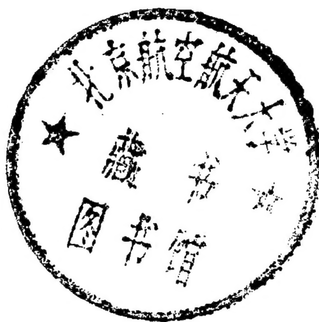


航空发动机设计手册

第19册

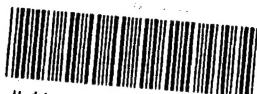
转子动力学及整机振动

《航空发动机设计手册》总编委会　编



航空工业出版社

2000



ISBN 7-80134-763-3



内　容　提　要

《航空发动机设计手册》共计19册，包括涡喷及涡扇发动机总体、涡桨及涡轴发动机总体、进排气装置、风扇及压气机、主燃烧室、涡轮、加力燃烧室、附件传动及润滑系统、减速器、辅助动力装置及起动机、控制及燃油系统、空气系统及传热分析、强度、振动、转子动力学、计算机辅助设计、可靠性及维修性、通用基础、标准及工程制图等，基本覆盖了航空发动机设计技术的各个方面。它是我国第一套较完整、较全面的航空发动机设计用工具书，是我国40多年航空发动机研究、设计经验的总结，是广大从事航空发动机研究、设计人员的集体智慧结晶。

本书为这套手册的第19册，共计12章。第1章为转子动力学及整机振动的基础知识介绍；第2、3、4章介绍了转子－支承系统的建模，以及支承和连接件的刚度及临界转速、不平衡响应计算等各种实用的分析、计算方法，并附有工程实例；第5、6章对航空发动机常用的重要减振措施——弹性支承和挤压油膜阻尼器的设计方法作了介绍；第7章给出了转子动力失稳原因、分析及判断和防止失稳的方法；第8章给出了优化设计的两种方法并附有实例；第9章给出了管路振动的计算方法、管路振动故障的诊断和排除；第10章介绍了振动测试、信号分析和实验模态分析技术以及振动故障诊断方法；第11章提出了振动的评定标准并附有四个机种的测振规范；第12章介绍平衡原理、各种平衡方法，并以本机平衡及实例作了系统的介绍。

本书作为工具书，实用性强，可供航空、航天、民航、空军、海航、陆航以及通用机电行业从事动力装置研制、设计、生产、使用、管理等工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

航空发动机设计手册 第19册：转子动力学及整机振动/《航空发动机设计手册》总编委会编；付才高分册主编．—北京：航空工业出版社，2000.10
ISBN 7-80134-763-3

Ⅰ.航… Ⅱ.①航…②付… Ⅲ.①航空发动机-设计-技术手册 ②航空发动机-转子-结构动力学-技术手册③航空发动机-整体结构-振动-设计-技术手册 Ⅳ.V23－62

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第51847号

责任编辑：姚　立　　技术编辑：许桂凤　　封面设计：霍振源

航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里14号　100029)
北京地质印刷厂印刷　　秘密
2000年10月第1版　　2000年10月第1次印刷
开本：787×1092　1/16　　印张：27.5　　字数：696千字
印数：1－800　　定价：80.00元

ISBN 7-80134-763-3
V·073

序

以航空燃气涡轮发动机为动力的飞机自1939年首飞以来已有了近60年的历史。在这半个多世纪中，已显示出航空燃气涡轮发动机对军事和国民经济建设具有极端的重要性，历来受到主要工业国家的高度重视，其技术发展相当迅速。现在国外使用中较多的是第三代战斗机用的燃气涡轮发动机，其技术已经相当完善了。但是，航空燃气涡轮发动机技术的发展余地，包括性能、安全性、可靠性、耐久性、维修性、适用性、环保以及降低生产、使用费用等方面的潜力仍非常巨大，发展前景异常广阔。用于具有超声速巡航、隐身、高敏捷性为主要特征的第四代战斗机的推重比为10的发动机，即将在2004年投入使用。比第四代战斗机用的发动机能力倍增的美国“综合高性能涡轮发动机技术计划”（IHPTET），将于2003年完成，到那时，整个航空技术将有一次新的飞跃，然而，那也还不是航空燃气涡轮发动机技术的“最后边疆”，比IHPTET计划更下一代的技术——“先进概念”发动机计划正在酝酿中。

军用航空燃气涡轮发动机技术的发展，为民用航空燃气涡轮发动机的发展提供了重要的技术基础。民用航空发动机，特别是涡扇发动机的发展，使跨洋直航成为可能。由于民航市场的竞争非常激烈，民用发动机的改进、改型甚至更为频繁。近年来，由于军机市场相对缩小，而民航发动机订货逐年上升，民用航空发动机已在航空发动机产业中占据主导地位。最近，美国NASA又提出了今后10至20年民航发动机的发展目标，要使安全性、可靠性、环保和价格方面有大幅度的改善，民航发动机技术相应地也必然会有巨大的发展。

涡轮发动机在高超声速推进技术中的应用，虽然比原来设想的进度大大推后了，但用于高超声速推进的吸气式发动机，某种形式的组合循环发动机总是要实现的。

航空燃气涡轮发动机技术也正在非航空领域获得广泛应用，已推动了地面燃气轮机的发展。目前，燃气轮机已成为先进水面舰船的主要动力，以燃气轮机为主要动力的主战坦克也在“沙漠风暴”中经受

了实战考验。至于燃气轮机在工业上的应用，除广泛用于机械传动外，在电力工业中早已从以调峰发电为主发展为以基本负荷发电为主。美国现在每年新增的和更新的发电设备中，60%为燃气轮机系统。预计今后10年中全球新增的发电设备中，36%将为燃气轮机系统。不言而喻，当新一代航空燃气涡轮发动机技术诞生之后，对非航空方面的影响将会更加巨大。这是主要工业发达国家特别重视航空发动机技术发展的主要原因之一。

我国航空燃气涡轮发动机工业创建于1951年。从修理开始，第一台国产的涡轮喷气发动机于1956年试制成功。此后共生产了50000余台航空发动机，装备了我国的空、海军和民航，并出口到了许多国家。我国的第一个航空发动机设计机构成立于1956年。第一台自行设计的航空发动机——"喷发-1A"于1958年7月装在"歼教1"飞机上首飞上天。在此后的40多年中，我国在航空发动机自行研制方面克服重重困难，艰苦奋战，取得了不小的成绩。不少改进、改型的型号投入了使用，对国防建设发挥了良好的作用；几种自行研制的型号获得了良好进展，离投入使用已经为期不远；航空发动机的预研也已取得了丰硕的成果；科研设备的建设有了一定的基础，建成了包括高空模拟试车台在内的初步配套的试验设施。

在40多年的生产、科研实践中，特别是在攻克无数技术难关的过程中，我们的研究、设计队伍得到了锻炼，逐步成长起来了。我们积累了较丰富的经验，各设计研究单位也都有了自己的一套工作程序，有了专业基本配套的理论体系和工作方法。诚然，由于我们过去的实践范围还不是很广，技术水平还不高，与航空先进国家相比，经验还不是很完整，工作方法、设计计算手段还不是很先进，还有很大差距。但是，首先，我们积累的经验和方法是在我们国家的社会、经济条件下的实践中产生的，是有中国特色的，是别的任何国家的经验所代替不了的。其次，别国的经验和方法，虽然我们要积极地去学习、消化和借鉴，但是，我们能看到的国外的东西只是比较一般性的，核心的、关键的内容我们看不到，因此，我们自己的经验和方法就显得非常宝贵。

由于历史的原因，我们的技术队伍在年龄方面有一个很大的断层。我国航空发动机研究设计队伍当前的骨干力量是60年代毕业的技术人员，他们大多数已到了或即将到退休年龄。他们积累的经验和

方法，除了一些单篇的技术总结、报告外，有相当一部分还保存在他们的笔记本上和脑子里。把这些经验与方法汇总和整理出来，使之成为比较系统的工具书，将是一笔宝贵的财富。由中国航空工业总公司决策，发动机局主持开展的《航空发动机设计手册》的编撰工作，意义重大，也是非常必要和及时的。中国航空工业总公司在航空动[1994]192号文件中指出："《航空发动机设计手册》的编写出版将是我国航空发动机行业四十余年来航空发动机设计技术领域的技术总结。它对于振兴航空发动机行业，做好承上启下，把我国航空发动机技术水平推向一个新高度，具有重要意义。"

《航空发动机设计手册》是一套供工程技术人员在航空发动机设计和研究工作中参考和查阅的工具书，它既不同于以理论阐述和推导为主的教科书，也不同于一般的设计规范。

在本手册的编写过程中，我们力求具有实用性、先进性、科学性、通用性、系统性和完整性。当然，要真正满足这些要求是相当困难的。编、撰、校、审过程中虽然对此进行了认真的探索，但结果仍难以令人满意。

本手册涉及的发动机类型为涡扇、涡喷、涡轴和涡桨发动机，不涉及活塞式、冲压式和一次性使用的发动机。技术内容集中在设计方面及设计需要的有关材料和工艺问题。试验研究是发动机及其部件研究、设计工作的重要组成部分，但为了节省篇幅，本手册中只涉及试验任务书的编制和试验件的设计。

本手册共分19册，分别由中国航空工业总公司沈阳航空发动机研究所、株洲航空动力机械研究所、燃气涡轮研究院、中国航空综合技术研究所、无锡航空发动机研究所和北京航空航天大学为主编单位，并由主编单位推荐的专业人员担任主编。参加撰、校、审稿的人员400余人，来自发动机行业内外的27个单位。

当前，我国航空发动机技术研究和产品开发方面的形势是比较好的，在型号研制和预研方面都有较好的进展。但是，与国外相比，我们在军、民用航空发动机技术水平方面的差距还相当大，远远不能满足我国国防建设和民航发展的需要。考虑到国外下一代发动机即将投入使用，IHPTET技术水平的发动机将陆续出现，更下一代的技术又在酝酿中，我们面临着在航空发动机技术方面的差距更加拉大的危险，今后的形势将更为严峻。对于今后的发展，虽然我们不应提一些

不切实际的目标，但我们毕竟是个大国，是个社会主义的大国，没有自己的航空工业不行，没有自己的航空发动机工业也不行。对于未来，我们是充满信心的。在“科教兴国”的方针指引下，随着国家经济实力的增强，相信今后国家必然会有条件以更多的财力投入到航空发动机这个高投入、高风险、高附加值的高技术行业上来。此外，在改革开放的大好形势下，我们已经有了一个较好的国际合作环境，也有条件更好地引进和借鉴国外的先进技术。通过全行业职工的坚持不懈的奋斗，我们一定会在世界航空发动机领域占有一席之地。《航空发动机设计手册》的出版，必将在这一奋斗过程中做出应有的贡献。

由于我们的经验和水平有限，可供参考的国外资料也很少，又是初次编写，在内容和文字各方面的问题和错漏在所难免，敬请读者批评指正，以便在再版时进一步修订和补充。

《航空发动机设计手册》总编委会

1998年4月

《航空发动机设计手册》

总编委会及办公室组成人员

《航空发动机设计手册》各册名称

第 1 册　通用基础
第 2 册　工程制图及标准
第 3 册　可靠性及维修性
第 4 册　计算机辅助设计
第 5 册　涡喷及涡扇发动机总体
第 6 册　涡桨及涡轴发动机总体
第 7 册　进排气装置
第 8 册　压气机
第 9 册　主燃烧室
第 10 册　涡轮
第 11 册　加力燃烧室
第 12 册　传动及润滑系统
第 13 册　减速器
第 14 册　辅助动力装置及起动机
第 15 册　控制及燃油系统
第 16 册　空气系统及传热分析
第 17 册　载荷及机匣承力件强度分析
第 18 册　叶片轮盘及主轴强度分析
第 19 册　转子动力学及整机振动

《航空发动机设计手册》第 19 册

转子动力学及整机振动

编委会及审委组成人员

主　编：付才高
副主编：郑大平
编　委：欧园霞　周松江　赵行明
撰稿人：（以姓氏笔画为序）

尹泽勇　付才高　李其汉　李　勇　李　琳
郑大平　张元周　张连祥　岳承熙　欧园霞
周松江　赵行明　顾家柳　晏砺堂　黄太平

主　审：顾家柳
副主审：黄太平　李其汉
审　委：尹泽勇　张连祥

前　言

本册为航空发动机研制人员提供了转子动力学及整机振动方面的分析、计算方法,内容包括:转子-支承系统的建模、支承及连接件的刚度、临界转速、不平衡响应、稳定性、弹性支承设计、挤压油膜阻尼器设计、优化设计及动平衡等。为了帮助读者在理解的基础上掌握运用,各方法都有最简洁的推导过程。这是本册有别于其他分册的一个特点。

转子动力学及整机振动的特点是理论和实验紧密结合,因而本册设有专章介绍测试方法和振动的评定标准,也以一定篇幅介绍了振动故障的诊断方法。

管路振动是整机振动的一个重要内容,本册也设有专章介绍。

由于编者水平有限,错误和不足之处在所难免,恳请提出宝贵意见。

本册各章的撰稿人:绪论顾家柳;第1章顾家柳;第2章欧园霞,尹泽勇;第3章黄太平,欧园霞,尹泽勇,李其汉;第4章黄太平,欧园霞,李其汉;第5章李其汉,晏砺堂;第6章付才高,周松江,赵行明;第7章顾家柳;第8章黄太平;第9章李琳,李勇;第10章郑大平,张元周;第11章张连祥,岳承熙;第12章晏砺堂。

《航空发动机设计手册》第19册编委会

2000年1月

目　　录

第4章　转子-支承系统不平衡响应计算方法

第5章　弹性支承设计

第6章　挤压油膜阻尼器设计

第7章　转子系统的稳定性

第8章 发动机转子-支承系统动力学优化设计

第9章 管路振动

第10章 发动机整机振动测试和分析技术基础

第11章 振动的评定标准

第 12 章　转子动平衡

符号表

A—— 面积	m^2
C—— 阻尼系数	N · s/m
c—— 油膜半径间隙	m
D,d—— 直径	m
E—— 弹性模量,能量	N/m^2, N · m
e—— 偏心距	m
F—— 力	N
f—— 频率	Hz
G—— 剪切弹性模量	N/m^2
g—— 重力加速度	m/s^2
h—— 高度	m
I—— 截面惯性矩	m^4
I_d—— 截面赤道惯性矩	m^4
I_p—— 截面极惯性矩	m^4
i—— 虚数单位, $i = \sqrt{-1}$	
J—— 转动惯量	$kg \cdot m^2$
J_d—— 赤道转动惯量	$kg \cdot m^2$
J_p—— 极转动惯量	$kg \cdot m^2$
K,k—— 刚度	N/m
L,l—— 长度	m
M—— 力矩(弯矩),质量	N · m, kg
m—— 质量	kg
n—— 转速	r/min
n_{cr}—— 临界转速	r/min
n_r—— 共振转速	r/min
O—— 中心符号	
O_b—— 轴承中心	
O_j—— 轴颈中心	
R,r—— 半径	m
S—— 复频率, $S = \lambda + i\omega$	
T—— 周期,动能	s, N · m
t—— 时间	s
V—— 体积,势能	m^3, N · m
ε—— 偏心率	
λ—— 特征值	

μ—— 滑油粘度	$kgf \cdot s/m^2$
ρ—— 回转半径,材料密度	$m, kg/m^3$
Ω—— 进动角速度	rad/s
ω—— 自转角速度	rad/s
ω_{cr}—— 临界角速度	rad/s
ω_r—— 共振角速度	rad/s
$\boldsymbol{G}$—— 陀螺矩阵	
$\boldsymbol{I}$—— 单位矩阵	
$\boldsymbol{K}$—— 刚度矩阵	
$\boldsymbol{M}$—— 质量矩阵	
$\boldsymbol{N}$—— 形函数矩阵	
$\boldsymbol{q}$—— 广义坐标	
$\boldsymbol{T}$—— 传递矩阵	
· —— 对时间的一阶导数	
·· —— 对时间的二阶导数	
′—— 对坐标的一阶导数	
″—— 对坐标的二阶导数	

绪　论

转子动力学的发展,是与大工业的发展紧密相关的。1869年,Rankine发表了题为《论旋转轴的离心力》的文章,这是第一篇有记载的研究转子动力学的文献。1919年,H. H. Jeffcott通过对简单模型转子的研究,得到了转子在超临界转速下仍能稳定工作的结论。20年代,开始设计与生产了很多种转子超临界工作的涡轮、压缩机、泵等,它们在使用中不断地发生了严重的振动事故。美国通用电气公司的研究实验室对转子－支承系统的稳定性作了一系列的试验研究,1924年New Kirk等发表了这一研究结果,这是现代转子动力学关于稳定性研究的第一篇文章。

50年代以来,随着电力、航空及宇航、石化、船舶等工业的飞速发展,各种旋转机械向高速、高功重(推重)比和自动化方向发展,在国防及经济中的作用愈来愈突出。这也对转子动力学的研究提出了更重、更新的任务,以满足在旋转机械设计及使用中提出的更高要求。

转子动力学设计是各种旋转机械设计中的重要环节,它的主要任务是:预计临界转速,预计转子不平衡引起的同步振动响应,预计开始失稳的门坎转速,预计转子在叶片丢失、加速或减速等瞬态过程中的响应。提供相应的实用而又准确的计算与试验方法,则是转子动力学研究的主要目的。

到80年代,转子动力学的线性分析方法已发展得比较完善,各种各样的算法为临界转速计算、不平衡响应计算、瞬态响应计算、失稳门坎转速计算等,提供了各种适用的方法。但是,在各种实际结构的正确建模、各种失稳力的准确预计等方面,还有许多工作要做,尤其是试验研究。

就本质而言,转子动力学问题很多是非线性的。过去往往将非线性问题简化为线性问题来研究,是因为绝大多数非线性问题难以精确求解,而线性化处理可以获得近似的结果。但在许多情况下,用线性化方法研究非线性问题,不仅会有量的误差,而且会产生质的错误。

例如,故障转子动力学就大多属于非线性动力学问题。转子系统如果出现了故障,就会产生剧烈的振动,不但出现基频的振动,还可能出现高次谐波或次谐波的振动,甚至出现拟周期振动或混沌现象,这些现象的产生机理必须用非线性振动理论才能解释。

因此,用非线性理论研究非线性的转子动力学问题,正日益受到人们的重视,并已取得初步的成果。

当然,转子系统中的大多数构件,仍可以用线性模型来描述。对于转子系统中可能存在的具有强非线性特性的构件,可以认为是局部的,即仅与少量的系统坐标有耦合关系。这类结构如油膜轴承、挤压油膜阻尼器、转轴的裂纹等。具有这样性质的还有工质的气弹力、碰摩等。在一个转子系统中,非线性构件或因素的数量一般是很少的,所以转子动力学问题大多是属于具有少量非线性参数的转子动力学问题。

怎样在旋转机械的转子动力学设计中采用优化设计?怎样能对转子－支承系统的振动实施主动控制?怎样分析各种故障所引起的特殊的转子动力学现象?已成为转子动力学研究的新课题。

1. 转子系统振动研究现状

在转子动力学研究中，计算分析占有很重要的地位。无论是旋转机械的转子动力学设计，还是为解决旋转机械的有关问题(如振动诊断与排故)而研究故障转子的各种动力学现象等，都离不开计算分析。计算方法的进展是和理论研究、工程应用的进展同步的。在计算技术已飞速发展的今天，许多无法用理论分析求解的问题，都可以用数值计算的方法得到结果，甚至通过计算机仿真，还可以揭示某些难以理论分析或实验观察的转子动力学现象。

计算分析的目的，主要是作转子动力学设计，即计算转子临界转速、不平衡响应、失稳门坎转速或稳定性储备及在叶片丧失、加速或减速等过程中的瞬态响应。提供相应的实用而又准确的计算方法，是转子动力学研究的重要内容。随着研究的深入与发展，人们发现，轴承、轴承座，以及静子结构、台架系统都对转子的动力学特性有重大的影响，因而必须分析转子 - 支承系统的振动。

除了轴承、密封等本身的动力特性计算外，上述各种计算分析归结为求解一个机械系统的特征值和响应问题(稳定性是复特征值问题)。一个机械系统的运动方程可写为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}$$

其中，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{K}$ 相应为系统的质量、阻尼和刚度矩阵；$\boldsymbol{z}$ 为系统的广义坐标矢量；$\boldsymbol{F}$ 是作用在系统上的广义外力。

在结构动力学中，已有许多求解这一方程的特征值和响应的方法，并已有许多商品软件可供选用，如 SAP、ADINA、NASTRAN、ANSYS 等。但是，由于转子系统本身的特点，使这些方法和软件并不适用于转子动力学的计算分析。转子系统的这些特点是：

a. 由于转子有回转效应，系统的运动方程中出现了一个反对称的陀螺矩阵。虽然结构动力学中近年也发展了一些求解陀螺特征值的方法，但效果不好。

b. 流体动力轴承或挤压油膜阻尼器的油膜力并不是保守力，因而转子系统通常不是保守系统。油膜力的刚度矩阵、阻尼矩阵不仅不是对称阵，而且还是转速 ω 的函数。在某些应用场合，还必须考虑油膜力的非线性。

c. 转子系统的阻尼主要来自轴承的油膜，它是一种集中阻尼，且与转速等有关。这与结构动力学中通常假设的比例阻尼差别很大。

d. 各种可能使转子失稳的力都是非线性的，且特性各不相同。

考虑上述特点，并对各种非线性力作线性化处理后，转子 - 支承系统的运动方程可表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{z}} + (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{z}} + (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{S})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}$$

其中，$\boldsymbol{C}$ 是阻尼矩阵，非对称阵；$\boldsymbol{G}$ 是陀螺矩阵，反对称阵；$\boldsymbol{K}$ 是刚度矩阵的对称部分，$\boldsymbol{S}$ 是它的不对称部分。各矩阵常常还是转速 ω 的函数。

为了求解这一方程的特征值或响应，发展至今，出现过许多种的计算方法，主要为两大类：传递矩阵法和有限元法。

(1) 有限元法与传递矩阵法的比较

实际的转子 - 支承系统是变截面的连续系统，对其作动力学分析必须离散化处理及缩减自由度。离散化的方法主要为有限元法，用 Rayleigh 梁 - 轴有限元或 Timoshenko 梁 - 轴有限

元。

有限元法的表达式简洁、规范,但会导致求解大型陀螺特征值问题,不仅甚费机时,且工程上关心的也只是若干个低阶的特征值,因此要求大幅度缩减其自由度,即截阶处理。

要缩减自由度,就自然会想到在结构动力学中已广泛应用的子结构模态综合法。所不同的是,在求解子结构的特征值时,可以计入陀螺项,也可以不计陀螺项。

如果子结构形状比较规则,也可直接根据经验提供一组假设模态作为 Ritz 基,它们应当满足子结构的边界条件,即属于许可函数集。

转子动力学中的另一种通用分析方法,是传递矩阵法。传递矩阵法的主要特点是:矩阵的阶数不随系统的自由度数增大而增加,因而编程简单,占内存少,运算速度快,特别适用于像转子这样的链式系统。传递矩阵法与机械阻抗、直接积分等其他方法配合,还可以求解复杂转子系统的问题。可以说,传递矩阵法在转子动力学的计算中已占主导的地位。

然而,在转子动力学中,梁 - 轴有限元与传递矩阵法中的梁 - 轴单元,其本质是一样的,区别仅在于梁 - 轴有限元中,集总质量时考虑了它的形函数,而在梁 - 轴单元中,往往只是简单地将单元的质量集中于一端或均分于两端;假如采用考虑均布质量影响的梁 - 轴单元传递矩阵(即采用克雷洛夫函数表述的),则与梁 - 轴有限元已无甚区别。另一方面,传递矩阵法由于利用了各单元之间的连接条件,而使系统的自由度得以大大缩减。对于最复杂的情况,例如分析一台航空涡扇发动机的转子 - 机匣 - 安装节系统,传递链也只四条(高、低压转子及内、外机匣),总体传递矩阵为 32×32 阶,得出的特征矩阵是 16×16 阶,运动方程也是 16 个二阶常微分方程。如果只是计算临界转速及稳态或瞬态响应,且系统是各向同性的,则传递矩阵为 16×16 阶,特征矩阵是 8×8 阶,运动方程减少为 8 个二阶常微分方程。因此,传递矩阵法在工程中获得了最广泛的应用。

(2) 转子 - 支承系统的建模问题

在进行转子动力学计算分析之前,需建立计算模型。这就是把实际的转子 - 支承系统模型化,它既能准确反映原系统的动力学特性,又能适合于计算分析。模型建立得是否正确,将决定计算的结果是否准确。如果模型不当,将使计算工作量过大或计算结果误差很大,甚至导致错误的结论。

有关建模问题简述如下:

a. 转子本体　转子本身常是一根阶梯轴,上面安装有叶轮、齿轮和联轴节等。质量的简化一般没有困难。轴段弯曲刚度的简化则比较复杂,在截面变化不大的轴段,可根据轴段的内外径求得弯曲刚度;在截面有突变的地方,考虑到部分材料实际上不承受应力,等效刚度的直径要相应减小。对此问题应作专门的理论和实验研究。

b. 热压配合对轴的弯曲有加强作用,等效直径要适当增加。键槽、定位孔等会削弱局部的刚度,必要时也应考虑。还有如端齿连接、螺栓拉杆连接、安装边等的建模均比较复杂,有些还尚待研究。

c. 挤压油膜阻尼器、流体润滑轴承的油膜力,是轴颈位移和速度的非线性函数,经线性化处理后可表示为

$$\begin{cases} R_x = K_{xx}x + K_{xy}y + C_{xx}\dot{x} + C_{xy}\dot{y} \\ R_y = K_{yx}x + K_{yy}y + C_{yx}\dot{x} + C_{yy}\dot{y} \end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵,它的四个元素称为刚度系数;$\boldsymbol{C}$ 为阻尼矩阵,它的四个元素称为阻尼系

数，这八个系数统称为油膜特性系数。油膜动力系数可以通过试验测试的方法(参考文献[6])求得，有些轴承手册(参考文献[7])中也有推荐数据，也可以计算得到。

在轴颈涡动的幅度较大时，例如转子发生事故后，以及求解失稳后的极限环等，就不能采用油膜力的线性化模型，而应直接通过求解轴承油膜的 Reynolds 方程得到油膜压力分布，然后加以积分而求得油膜力。

滚动轴承一般模化为一个弹性支承，它的刚度系数约为 $2\times10^{7}\sim1\times10^{9}$ N/m。阻尼很小，通常可以不计。

d. 支承系统　轴承座、机匣、台架系统等对转子振动的影响比较复杂。通常按下列三种不同情况分别考虑：如果支承系统的刚度较转子的刚度大得很多，可以把它模化为刚体；当这些结构的弹性不能忽略时，可以把它简化为一个由质量、阻尼和弹簧组成的单自由度系统，其参数由计算分析得到，或者由实验测定其动刚度；当支承系统的刚度近于或甚至低于转子的刚度时，需要对转子 – 轴承 – 机匣系统作整体分析。

e. 密封　密封中流体对转子的作用力，可能使转子失稳。因此，在稳定性分析时必须加以考虑。模化时，密封力以交叉刚度的形式给出：

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_{xy} \\ K_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

f. 联轴节　联轴节的结构形式有多种，它们的简化模型也各不相同。例如，套齿联轴节可简化为具有一定弯曲刚度的铰链，刚度值由理论计算或实测得到。

综合上述，可以得到航空发动机转子 – 支承系统的集总参数模型。实际上，采用集总化模型，是用一个有限自由度系统来近似无限自由度系统，本质上是初步的截阶处理。

对集总参数模型的总结点数 N，应有一定要求，根据对一个等截面梁的计算分析表明，如果要求集总化带来的固有频率误差小于 1%，那么，结点总数 N 应满足如下关系：

$$N \geqslant 1 + 5.34r$$

其中，r 为要求计算固有频率(或临界转速)的最高阶数。例如我们要计算转子的三阶临界转速，即 $r=3$，则转子至少要分为 17 个结点。

(3) 试验技术

当前，振动的测试技术、信号处理技术、故障诊断技术都已发展得相当完善，无论参考文献、书籍、商品仪器，比比皆是。但是，对航空发动机转子的试验模态分析、故障模式的研究却非常缺乏，亟待改进。由于航空发动机的复杂性，需要做的工作很多。

2. 转子系统振动研究展望

(1) 转子动力学中的若干非线性问题

一些重大的旋转机械，如发电用涡轮机、成套化工设备中的压缩机等，在生产中的作用十分突出，如因出现故障而被迫停机将会造成巨大损失，因此故障诊断及排故研究极为重要。而这些故障多数是属于非线性动力学问题，因此对转子动力学中非线性问题的研究已愈来愈引起人们的重视。

80 年代末，由于机械故障诊断技术的发展，故障转子动力学也取得了不小进展。转子系统

如果出现了故障,就会产生强烈振动,不但出现基频的振动,还可能出现高次谐波或次谐波的振动,甚至出现拟周期振动或混沌现象,这些现象都必须用非线性振动理论才能说明。

转子动力学中的非线性因素很多,最常见的有以下几种:

a. 密封、叶尖等的气弹效应;

b. 转子内腔积液;

c. 转轴裂纹;

d. 动静件碰摩;

e. 松动;

f. 油膜力;

g. 随时间慢变的阻尼、刚度、激振力。

转子的非线性振动,可呈现为以下各种不同的形式:

a. 振动主要是以 1X 频率分量的形式出现的;

b. 主要是以 2X、3X 或其他整数倍的主频分量的频率形式出现的;

c. 次谐振动,它主要以低于主频的频率成分出现,如$\frac{1}{2}$X,$\frac{1}{3}$X 等,它具有不稳定的性质,可以在短期内快速增长而使机组毁坏;

d. 功率谱是连续的、非平稳的确定性振动(即混沌)。

对非线性转子动力学的研究当前尚处于起步阶段。

(2) 转子 - 支承系统振动的主动控制

航空发动机、发电用涡轮机是如此昂贵与重要,而在研制、生产、使用中的振动故障又很多,假如能对转子 - 支承系统的振动实施主动控制,就可避免造成巨大的损失。

转子系统振动主动控制的研究包括三个方面:控制的目标函数,控制器的设计,施加控制力的方法。

控制的目标函数自然是包含响应及控制力的一个二次型目标函数,然而具体表达式的确定,取决于转子系统振动主动控制的目的。例如,文献[9] 中借主动控制力来得到所需的极点配置,并且在分析中不考虑不平衡力的影响,认为在控制分析中是否考虑不平衡力的干扰并不重要。同时,也有的学者认为(参考文献[10]),控制力应该有两个作用,即 $u = u_{\mathrm{I}} + u_{\mathrm{II}}$,$u_{\mathrm{I}}$ 用于平衡,u_{II} 用于提供能使瞬态响应尽快衰减及系统稳定所需的阻尼。但是,更加完全的看法是,控制力应该有三个作用,即用以得到所需的极点配置,用于平衡及用于提供所需的阻尼(参考文献[11])。

控制器的设计,大多是沿用现代控制论中的各种方法,如极点配置,按状态调节器或输出调节器设计最优或次优的控制器等。

当应用模态控制时,由于陀螺阵的非对称性,右矢量并不形成一个正交组。因此必须解转置本征值问题,以得到左矢量伴随组,以用于模态解耦。同时,模态随转速而变,因此很难应用模态控制的方法。

一个好的控制器应具有性能鲁棒性及稳定鲁棒性。H^{∞} 控制理论对线性系统的性能和稳定鲁棒性折衷问题的处理最为完善,因此从 Zames(参考文献[12]) 于 1981 年提出后,迅速发展,并已应用于转子系统振动主动控制的研究。

为了对转子系统的振动实施主动控制,控制力可以施加于轴承座之上或通过轴承施加于

转子上。因此,施加控制力的方法,主要有以下几种:

a. 电磁轴承　这是最早提出、研究最多并已有应用的一种施加主控力的方法,国内也有人研究。然而,它不仅笨重、昂贵、复杂,且用于大型机械如动力装置时,因瞬时过载能力远逊于常规轴承,故需要配置备用轴承。如能采用稀土永磁材料,可显著减小其尺寸与重量。

b. 可控(可变参数)轴颈轴承　利用油压的变化来控制轴颈轴承的刚度及阻尼,即利用轴颈轴承的流体静力增值来控制其特性。流体静力轴承早已广泛用于许多动力装置上,以减少轴承在低速运行时的摩擦与磨损。文献[13]详尽地论述了流体动力轴承的流体静力增值所可能带来的益处。文献[14]研究了借改变轴承刚度使临界转速远离工作转速。

这种控制方法比电磁轴承简单,成本 - 效果较好,流体静力轴承的观念又早已为许多工业应用,包括大型蒸汽涡轮发电设备所接受。同时,只需作很少的修改就可用于已有的设备,且即使在使用过程中流体静力系统损坏,机器的振动特性也只是恢复到改型前的状态。

c. 可控(可变参数)挤压油膜阻尼器　在现代航空发动机中,广泛应用挤压油膜阻尼器,以便在设计中配置临界转速,增大轴承的阻尼。然而,若转子的工作不平衡量过大,将会产生双稳态及轴承外传力反而增大等问题。利用可控(可变参数)的挤压油膜阻尼器,就可能避免这些问题,并进一步减小转子系统的振动。文献[15]研究了加压对油膜轴承隔振能力的影响。文献[16]研究了借可控锥形挤压油膜阻尼器改变挤压油膜的间隙,以控制其特性,从而控制转子系统的振动。

还有研究借电液以改变粘度控制轴承特性的,如文献[17]。

d. 在轴颈轴承上借液压伺服系统施加控制力　德国的慕尼黑技术大学在这方面作过许多研究(参考文献[18]),这是又一种极有希望的施力方法。

e. 作用在轴承上的压电式推杆　这是一种正在开发的施加控制力的方法,文献[19]评述了 NASA 最近资助的这方面研究。现还处于先期阶段,离实际使用较远。压电式推杆的一个固有的根本缺点,是它只能提供动态激振力,而不适于传输静力,而静力是主动调整轴颈轴承的静载及预载所需要的。

参 考 文 献

[1] Lund J W. Stability and Damped Critical Speeds of A Flexible Rotor in Fluid Film Bearings. J. of Eng. for Industry, Trans. ASME, 1974,96(2):501 ~ 520.

[2] Murphy B T & Vance J M. An Improved Method for Calculating Critical Speeds and Rotordynamics Stability of Turbomachinery. J. of Eng. for Power, Trans. ASME, 1983,105(3):591 ~ 595.

[3] Kirk R G and Gunter E J. Transient Response of Rotor - Bearing Systems. J. of Engineering for Industry, Trans. ASME, Ser. B, V. 96, No.2,1974,682 ~ 693.

[4] 顾家柳. 传递矩阵直接积分法及其应用. 航空学报,1983,4(4):48 ~ 56.

[5] 顾家柳,任兴民. 航空发动机转子 - 支承系统的瞬态响应. 航空学报 A 辑, 1991,12(7):A373 ~ 380.

[6] Childs D & Hale K. A Test Apparatus and Facility to Indentify the Rotordynamic Coefficients of High - speed Hydrostatic Bearings. NASA CP - 3239,1993,403 ~ 418.

[7] Someya T. Journal - Bearing Databook. Springer - Verlag, 1989.

[8] 闻邦椿,顾家柳,王正主编. 高等转子动力学. 北京:机械工业出版社,2000.

[9] Salm J R. Active Electromagnetic Suspension of An Elastic Rotor: Modeling, Control, and Experimental Results. ASME, Rotating Machinery Dynamics,1987,133.

[10] Gosiewski Z. Rotor Vibration Control. 同上,237.

[11] Burdess J S and Metcalfe A V. Active Control of Forced Harmonic Vibration in Finite Degree of Freedom Structures with Negligible Natural Damping. J. of Sound and Vib., V. 91, N. 3, 447 ~ 459.

[12] Zames G. Feedback and Optimal Sensitivity: Mode Reference Transformation, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses. IEEE Trans. on Auto. Contr.,1981, V. 26, 301 ~ 320.

[13] Rippel H C. Hydrostatic Augmentation to Enhance The Performance and Operational Flexibility of Hydrodynamic Journal Bearings. EPRI Publication CS5858, June, 1988.

[14] Goodwin M C et al. Variable Impedance Bearings for Turbogenerator Rotors. I. Mech. E. Int. Conf. on Vibrations in Rotating Machinery,1984.

[15] Simandirl S and Hahn E J. Effect of Pressurization on the Vibration Isolation Capability of Squeeze Film Bearings. ASME Trans, J. of Eng. for Industry, 1976, 109 ~ 117.

[16] Gu J L and Ren X M. Active Control of Vibrations of Rotor – Support Systems by The Controlled Squeez Film Damping Bearings. Proceedings of The 3rd Int. Conf. On Rotor Dynamics IFToMM, Lyon, France, 1990, 339 ~ 344.

[17] 孟光等．电流变阻尼器用于转子振动控制的实验研究．航空动力学报，V. 112, N.3, 1996, 265 ~ 268.

[18] Ulbrich H and Althaus J. Actuator Design for Rotor Control. Proceedings of Rotating Machinery Dynamics, ASME Vibrations Conf, 1989.

[19] Palazzolo A B et al. Test and Theory of Piezoelectric Actuator – Active Vibration Control of Rotating Machinery. Proc. of Rotating Machinery Dynamics, ASME Vibrations Conf, 1989.

第 1 章　转子动力学及整机振动基础

1.1　转子动力学基础

在航空发动机的研制、使用及排故过程中，借转子动力学分析可达到下述目的：

估计临界转速，以避免其落入发动机的正常工作转速范围，并留有足够的裕度，此裕度至少是 20%。

若因未能准确预计临界转速，或发动机工作转速范围改变，而必须改变临界转速时，确定设计修改方案。

计算转子不平衡引起的同步振动响应，虽然存在着两个难点，即难于预计转子中的不平衡分布及转子 – 轴承系统的阻尼，但可以作转子不平衡的灵敏度分析。

从测得的振动数据计算出应加的平衡配重质量及位置（尤其适用于本机平衡过程中），以减小同步振动的幅值。

估计开始发生动力不稳定的门坎转速及自激振动频率。

确定设计修改以抑制动力失稳。

在所有这些任务中，首要的中心任务是在设计阶段能准确预计转子 – 支承系统的临界转速，恰当配置临界转速。

1.1.1　转子 – 支承系统的临界转速现象

为了说明转子 – 支承系统的临界转速现象，现分析一个最简单的 Jeffcott 转子模型（图 1 – 1）。一个刚性的薄圆盘安装在一根无质量的匀质弹性轴的中央；为了消除盘重的影响，转子是垂直安放的；两端的轴承简化成球铰，并认为它的基座是刚性的；圆盘具有质量偏心距 e；则圆盘质心的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2\cos\omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = me\omega^2\sin\omega t \end{cases} \tag{1-1}$$

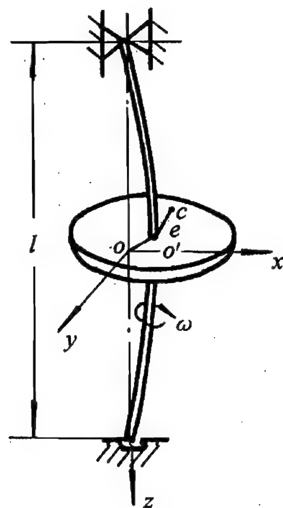


图 1 – 1　Jeffcott 转子

由材料力学可知，两端简支梁在跨中的刚度为

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$

上式中各项除以 m，可改写为

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\zeta p\dot{x} + p^2x = e\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y} + 2\zeta p\dot{y} + p^2y = e\omega^2\sin\omega t \end{cases} \tag{1-2}$$

式中：$p = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$——该系统的无阻尼横向振动固有频率；

$\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{km}}$——阻尼比（或称相对阻尼系数）。

从式(1－2)可解得(参见图1－2～图1－4)：

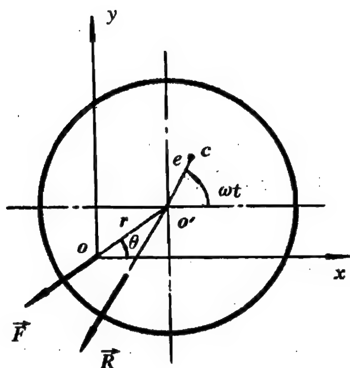


图1－2　圆盘的瞬时位置及受力

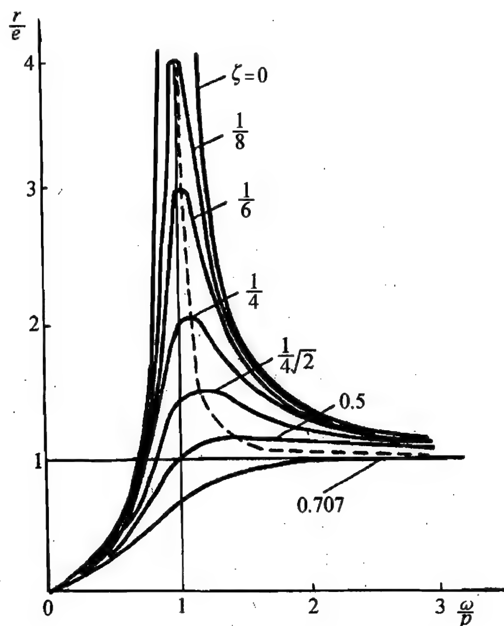


图1－3　转子动挠度的幅值—转速曲线

$$\begin{cases} x = X\cos(\omega t - \varphi) \\ y = Y\sin(\omega t - \varphi) \end{cases} \tag{1-3}$$

$$X = Y = \frac{e\omega^2}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta p\omega)^2}} \tag{1-4}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{2\zeta p\omega}{p^2 - \omega^2} \tag{1-5}$$

由此可见,不平衡量 me 引起的响应是盘心 o' 绕 oz 轴作圆运动——进动,进动的角速度等于盘的旋转角速度 ω,故为同步进动。

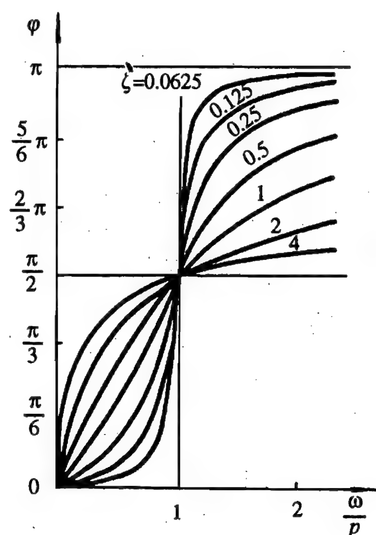


图1－4　转子动挠度的相位差角—转速曲线

转子不平衡引起的振动为极大值时的转速,为临界转速。故由式(1－4)求导,使

$$\frac{dX}{d\omega} = 0$$

可得

$$\omega_{cr} = p\sqrt{\frac{1}{1 - 2\zeta^2}} \tag{1-6}$$

可见外阻尼使转子的临界转速稍大于其横向固有频率。

对于小阻尼情况,例如 $\zeta < 0.1$,则

$$\begin{cases} \omega_{cr} \approx p \\ X_{max} \approx \dfrac{e}{2\zeta} \\ \varphi \approx \pi/2 \end{cases} \tag{1-7}$$

从上式可知：

可以借实测(如试验模态分析或传递函数分析，或正弦激振试验等)得到的转子系统横向固有频率来近似估计它的临界转速；

不平衡引起的同步振动幅值与不平衡量成正比，与外阻尼大小成反比；

在转子运行过程中，可以借实测同步振动的幅值及相位来确定临界转速，有时借相位测定的准确度还高一些。

不平衡量的倍乘数$\frac{1}{2\zeta}$相当于“放大因子”，或转子 - 支承系统的“Q 因子”，通常涡轮机转子系统的 Q 在 10 ~ 20 之间。

在设计航空发动机时，性能要求常常与转子动力学要求是矛盾的。从性能上考虑，常要求在给定发动机尺寸及重量的条件下，使气流量最大，压力很高，流体能量损失最小。这就要求转速高，级数多，叶轮级高负荷，级与级之间轴向间隙要大，叶尖间隙、密封间隙要小，进气流畅…… 所有这些都导致产生转子动力学问题。一个成功与可靠的设计，需要两方面技术人员的合作及在两方面要求之间作适当的折衷。

从转子动力学的角度看，成功的发动机设计应满足如下要求：

假若有可能，最好能完全避开临界转速，若必须越过临界转速，应使动态共振响应尽可能小；

在使叶尖间隙、密封间隙尽可能小的同时，涡轮或压气机叶尖及密封均不会碰摩；

不会发生转子动力失稳。

1.1.2　影响转子 - 支承系统临界转速的主要因素

1.1.2.1　转子的刚度、质量及材料性质

从式(1 - 7)可见

$$\omega_{cr} \approx p \propto \sqrt{\frac{EI}{l^3\rho Al}} \propto \frac{r}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1 - 8}$$

即临界转速正比于轴截面的转动惯量半径 r 及轴材料的$\sqrt{E/\rho}$，反比于跨度 l 的平方。

1.1.2.2　支承的刚度

在 1.1.1 节中分析的 Jeffcott 转子，具有两端刚性的铰支座。实际的轴承及轴承座都是有柔性的，设两端支承的刚度均为 $k_x/2$、$k_y/2$，如图 1 - 5 所示。

盘心的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + k_{\Sigma x}x = me\omega^2\cos\omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + k_{\Sigma y}y = me\omega^2\sin\omega t \end{cases} \tag{1 - 9}$$

式中，$k_{\Sigma x}$、$k_{\Sigma y}$ 为轴与支座的串联刚度，即

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k_{\Sigma x}} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k_x} \\ \dfrac{1}{k_{\Sigma y}} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k_y} \end{cases} \tag{1 - 10}$$

相仿地，式(1 - 9)可改写为

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\zeta_x p_x\dot{x} + p_x^2 x = e\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y} + 2\zeta_y p_y\dot{y} + p_y^2 y = e\omega^2\sin\omega t \end{cases} \tag{1 - 11}$$

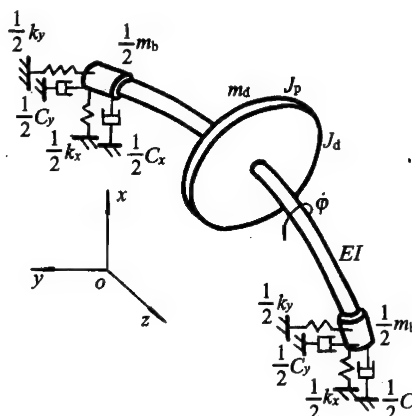


图 1 - 5　弹性支承的单盘转子

式中：$p_x = \sqrt{\frac{k_{\sum x}}{m}}$；　$p_y = \sqrt{\frac{k_{\sum Y}}{m}}$；

$\zeta_x = \frac{c}{2\sqrt{k_{\sum x} m}}$；　$\zeta_y = \frac{c}{2\sqrt{k_{\sum x} m}}$。

从式(1－11)可以解得

$$\begin{cases} x = X\cos(\omega t - \varphi_x) \\ y = Y\sin(\omega t - \varphi_y) \end{cases} \tag{1-12}$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{e\omega^2}{\sqrt{(p_x^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_x p_x \omega)^2}} \\ Y = \dfrac{e\omega^2}{\sqrt{(p_y^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_y p_y \omega)^2}} \\ \varphi_x = \tan^{-1}\dfrac{2\zeta_x p_x \omega}{p_x^2 - \omega^2} \\ \varphi_y = \tan^{-1}\dfrac{2\zeta_y p_y \omega}{p_y^2 - \omega^2} \end{cases} \tag{1-13}$$

从式(1－13)和(1－10)可见，由于支承柔度的影响，将使临界转速有所降低。通常支承刚度k_x不等于k_y，例如因试车台台架刚度的影响，通常$k_y > k_x$，就将使转子在垂直与水平平面内有不同的临界转速。从这一简单模型可见

$$\begin{cases} \omega_{cr,x} \approx p_x \\ \omega_{cr,y} \approx p_y \end{cases} \tag{1-14}$$

从式(1－10)还可见，若支承刚度$k_x << k$(轴刚度)，则$k_{\sum x}$主要将取决于k_x，并将使临界转速显著降低。在航空发动机中，采用弹性支承就是起这样的作用，控制转子运行于“刚体型”临界转速以上，“弯曲型”临界转速以下。

式(1－12)说明，盘心运动轨迹一般为一椭圆。为了进一步分析其特性，将式(1－12)改写为

$$x = \frac{X}{2}(e^{i(\omega t - \varphi_x)} + e^{-i(\omega t - \varphi_x)})$$

$$y = \frac{Y}{2i}(e^{i(\omega t - \varphi_y)} - e^{-i(\omega t - \varphi_y)})$$

可见盘心运动轨迹$r = x + iy$

$$= \frac{1}{2}(Xe^{-i\varphi_x} + Ye^{-i\varphi_y})e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(Xe^{i\varphi_x} - Ye^{i\varphi_y})e^{-i\omega t}$$

$$= r_f e^{i\omega t} + r_b e^{-i\omega t} \tag{1-15}$$

即它是一个正进动与一个反进动的合成。

设$k_y > k_x$，即$\omega_{cr,y} > \omega_{cr,x}$，则参见图1－6，有

(1) 当$\omega < \omega_{cr,x}$时，X、Y均为正，且$X > Y$，$|r_f| > |r_b|$，椭圆轨迹，正进动；

(2) 当$\omega_{cr,x} < \omega < \omega_{cr,y}$时，由于$X$由正变为负，故$|r_b| > |r_f|$，椭圆轨迹，反进动，且当$\omega = \sqrt{(\omega_{cr,x}^2 + \omega_{cr,y}^2)/2}$时为圆轨迹反进动；

(3) 当$\omega > \omega_{cr,y}$时，X、Y均为负，故有$|r_f| > |r_b|$，又为椭圆轨迹正进动，且$|Y| > |X|$。

1.1.2.3 回转效应

如果单盘转子的圆盘不在跨中，而是偏置的，如图1－7所示，则借牛顿定律可列出圆盘的

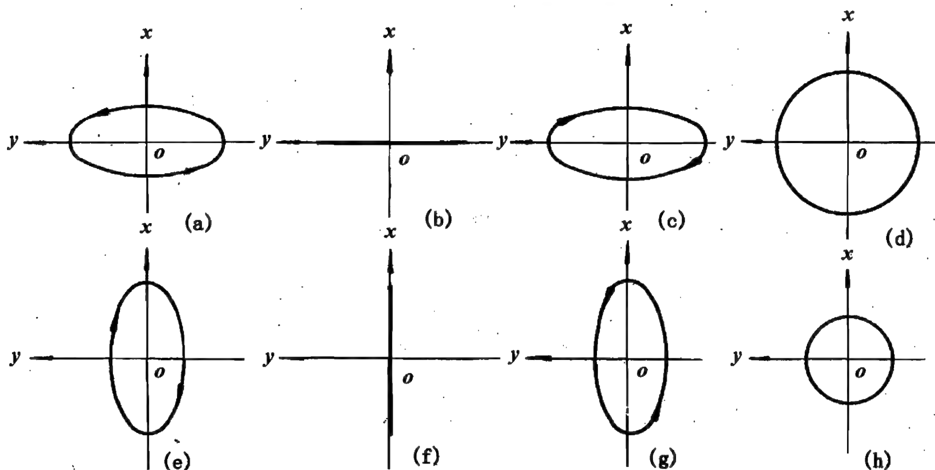


图 1－6　在不同转速时盘心的进动轨迹和方向

运动方程：

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_{11}x + k_{12}\alpha = 0 \\ m\ddot{y} + k_{11}y + k_{12}\beta = 0 \end{cases}$$

若记 $r = x + \mathrm{i}y, \theta = \alpha + \mathrm{i}\beta$，则上两式也可合写为

$$m\ddot{r} + k_{11}r + k_{12}\theta = 0 \qquad (1-16)$$

盘的摆动方程为

$$J_{\mathrm{d}}\ddot{\alpha} + J_{\mathrm{p}}\omega\dot{\beta} + k_{21}x + k_{22}\alpha = 0$$

$$J_{\mathrm{d}}\ddot{\beta} - J_{\mathrm{p}}\omega\dot{\alpha} + k_{21}y + k_{22}\beta = 0$$

它们又可合写为

$$J_{\mathrm{d}}\ddot{\theta} - \mathrm{i}J_{\mathrm{p}}\omega\dot{\theta} + k_{21}r + k_{22}\theta = 0 \qquad (1-17)$$

式(1－16)和(1－17)中的

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1} \qquad (1-18)$$

式中，$\boldsymbol{S}$ 为盘安装处的柔度矩阵，即材料力学中的影响系数矩阵。

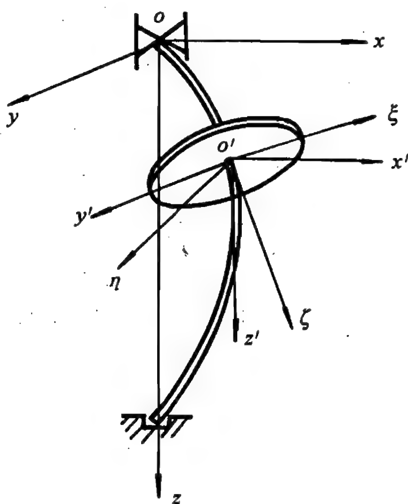


图 1－7　分析单盘偏置转子运动的坐标系

式(1－16)和(1－17)的解为

$$r = \bar{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \theta = \bar{\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$$

代入式(1－16)和(1－17)后可得

$$\begin{cases} -m\Omega^2\bar{r} + k_{11}\bar{r} + k_{12}\bar{\theta} = 0 \\ -J_{\mathrm{d}}\Omega^2\bar{\theta} + J_{\mathrm{p}}\omega\Omega\bar{\theta} + k_{21}\bar{r} + k_{22}\bar{\theta} = 0 \end{cases} \qquad (1-19)$$

由此可见，使轴发生弯曲的不仅有离心力，而且还有盘的惯性力矩——回转力矩。

$\bar{\theta}$、$\bar{r}$ 有非零解，即单盘偏置转子产生自然进动的条件是

$$\begin{vmatrix} k_{11}-m\Omega^2 & k_{12} \\ k_{21} & J_p\omega\Omega - J_d\Omega^2 + k_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (1-20)$$

可见,自然进动频率是随 ω 而变的。

当自然进动频率与转速 ω 同步时,这一转速即临界转速,将

$$\omega_{cr} = \Omega = \omega$$

这一条件代入式(1－20)可得

$$m(J_p - J_d)\omega_{cr}^4 - [(J_p - J_d)k_{11} - mk_{22}]\omega_{cr}^2 - (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}) = 0 \quad (1-21)$$

对于薄盘,$J_p \approx 2J_d$,代入式(1－21)后可得

$$mJ_d\omega_{cr}^4 - (J_dk_{11} - mk_{22})\omega_{cr}^2 - (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}) = 0 \quad (1-22)$$

由此解得

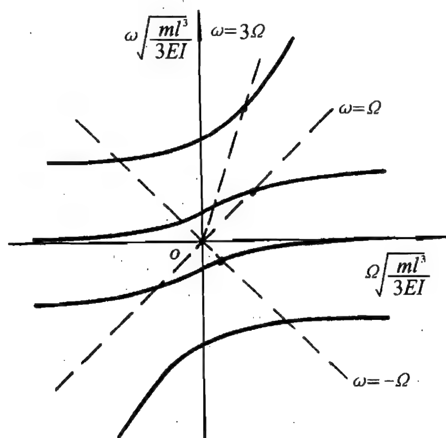


图 1－8　单盘偏置转子的固有频率 Ω 与转速 ω 的关系

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{k_{11}}{m} - \frac{k_{22}}{J_d}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{k_{11}}{m} - \frac{k_{22}}{J_d}\right)^2 + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{mJ_d}}} \quad (1-23)$$

这就是单盘偏置转子考虑了回转效应后的临界转速。

可以验证,只要 $J_p > J_d$,考虑回转效应后的临界转速略高于不计回转效应时的临界转速。

式(1－20)的解可以定性地绘成曲线如图1－8。

1.1.2.4　非圆形轴

在有些实际转子的轴上,沿纵向开有键槽,使转轴在两个互相垂直的平面内,具有不同的弯曲刚度,如图1－9所示。

o' 为盘心,$o'x'y'z'$ 与 $oxyz$ 相平行,$o'\xi\eta$ 则为随盘以转速 ω 旋转的坐标系,轴在 $o'\xi$、$o'\eta$ 平面内在跨中的弯曲刚度分别为 k_ξ、k_η。

设盘的质心偏移为 e,它与 $o'\xi$ 的夹角为 φ_e,则盘质心的瞬时坐标(位移)为

$$x + e\cos(\omega t + \varphi_e),\ y + e\sin(\omega t + \varphi_e)$$

故瞬时加速度为

$$\ddot{x} - e\omega^2\cos(\omega t + \varphi_e),\ \ddot{y} - e\omega^2\sin(\omega t + \varphi_e)$$

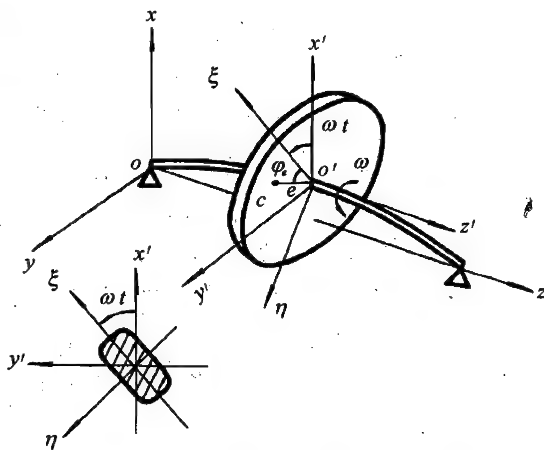


图 1－9　双刚度轴的单盘转子及坐标系

因此盘质心在 ξ、η 方向的绝对加速度分别为

$$[\ddot{x} - e\omega^2\cos(\omega t + \varphi_e)]\cos\omega t + [\ddot{y} - e\omega^2\sin(\omega t + \varphi_e)]\sin\omega t$$

及

$$-[\ddot{x} - e\omega^2\cos(\omega t + \varphi_e)]\sin\omega t + [\ddot{y} - e\omega^2\sin(\omega t + \varphi_e)]\cos\omega t$$

另一方面,由坐标转换关系

$$\begin{cases} \xi = x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ \eta = -x\sin\omega t + y\cos\omega t \end{cases} \quad (1-24)$$

求导得相对速度、相对加速度分别为

$$\begin{cases}\dot{\xi} = (\dot{x} + y\omega)\cos\omega t + (\dot{y} - x\omega)\sin\omega t \\ \dot{\eta} = -(\dot{x} + y\omega)\sin\omega t + (\dot{y} - x\omega)\cos\omega t\end{cases} \tag{1-25}$$

和

$$\begin{cases}\ddot{\xi} = (\ddot{x} + 2\dot{y}\omega - x\omega^2)\cos\omega t + (\ddot{y} - 2\dot{x}\omega - y\omega^2)\sin\omega t \\ \ddot{\eta} = -(\ddot{x} + 2\dot{y}\omega - x\omega^2)\sin\omega t + (\ddot{y} - 2\dot{x}\omega - y\omega^2)\cos\omega t\end{cases} \tag{1-26}$$

将式(1 - 24) ~ (1 - 26) 的关系代入盘质心在 ξ、η 方向的绝对加速度表达式,可得

$$\begin{aligned}&[\ddot{x} - e\omega^2\cos(\omega t + \varphi_e)]\cos\omega t + [\ddot{y} - e\omega^2\sin(\omega t + \varphi_e)]\sin\omega t \\ &= \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi - e\omega^2\cos\varphi_e\end{aligned} \tag{1-27}$$

$$\begin{aligned}&-[\ddot{x} - e\omega^2\cos(\omega t + \varphi_e)]\sin\omega t + [\ddot{y} - e\omega^2\sin(\omega t + \varphi_e)]\cos\omega t \\ &= \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta - e\omega^2\sin\varphi_e\end{aligned} \tag{1-28}$$

式中,$-2\omega\dot{\eta}$、$2\omega\dot{\xi}$ 即哥氏加速度;$-\omega^2\xi$ 、$-\omega^2\eta$ 为 o' 点即盘心的牵连加速度;$-\omega^2(\xi - e\cos\varphi_e)$、$-\omega^2(\eta + e\sin\varphi_e)$ 是圆盘质心 c 的牵连加速度。

盘心在 ξ、η 方向的绝对速度为

$$\begin{cases}\dot{x}\cos\omega t + \dot{y}\sin\omega t = \dot{\xi} - \omega\eta \\ -\dot{x}\sin\omega t + \dot{y}\cos\omega t = \dot{\eta} + \omega\xi\end{cases} \tag{1-29}$$

圆盘在运动中受到惯性力、弹性恢复力、阻尼力及重力的作用,处于动态平衡位置,因此可导出圆盘的运动方程

$$m(\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi - e\omega^2\cos\varphi_e) + c(\dot{\xi} - \omega\eta) + k_\xi\xi = -mg\cos\omega t$$

$$m(\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta - e\omega^2\sin\varphi_e) + c(\dot{\eta} + \omega\xi) + k_\eta\eta = mg\sin\omega t$$

或

$$\begin{cases}\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi + \dfrac{c}{m}(\dot{\xi} - \omega\eta) + p_\xi^2\xi = e\omega^2\cos\varphi_e - g\cos\omega t \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta + \dfrac{c}{m}(\dot{\eta} + \omega\xi) + p_\eta^2\eta = e\omega^2\sin\varphi_e + g\sin\omega t\end{cases} \tag{1-30}$$

式中,p_ξ、p_η 为转子在 ξ、η 平面的横向振动固有频率。

现在,分别讨论其各项振动特性:

(1) 不平衡强迫振动、两个弯曲临界转速

如前所述,一般情况下阻尼对临界转速的影响很小,为简化先暂时略去,并略去自重的影响,则式(1 - 30) 简化为

$$\begin{cases}\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi + p_\xi^2\xi = e\omega^2\cos\varphi_e \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta + p_\eta^2\eta = e\omega^2\sin\varphi_e\end{cases} \tag{1-31}$$

它的解为

$$\begin{cases}\xi = \dfrac{e\omega^2\cos\varphi_e}{p_\xi^2 - \omega^2} \\ \eta = \dfrac{e\omega^2\sin\varphi_e}{p_\eta^2 - \omega^2}\end{cases} \tag{1-32}$$

$$x = \xi\cos\omega t - \eta\sin\omega t,\ y = \eta\cos\omega t + \xi\sin\omega t$$

可见,相应有在 ξ、η 平面内的两个弯曲临界转速。若 $k_\xi > k_\eta$,则 $\omega_{cr,\xi} > \omega_{cr,\eta}$

$$\begin{cases}\omega_{cr,\xi} \approx p_\xi \\ \omega_{cr,\eta} \approx p_\eta\end{cases} \tag{1-33}$$

由式(1－32)可见，这一强迫振动表现为轴像静态弯曲那样地旋转——同步进动，如像圆形轴时一样。虽为单盘对称转子，却出现了两个临界转速，有点像是支承非对称刚度时的情形，然而当 ω 运行于 $\omega_{cr,\xi}$ 与 $\omega_{cr,\eta}$ 之间时，并不出现反进动，而是将可能失稳。

(2) 固有振动

这时式(1－31)简化为

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\omega\dot{\eta}-\omega^2\xi+p_\xi^2\xi=0\\ \ddot{\eta}+2\omega\dot{\xi}-\omega^2\eta+p_\eta^2\eta=0\end{cases}\tag{1-34}$$

它的解为

$$\begin{cases}\xi=\bar{\xi}e^{\lambda t}\\ \eta=\bar{\eta}e^{\lambda t}\end{cases}\tag{1-35}$$

代入式(1－34)，由 $\bar{\xi}$、$\bar{\eta}$ 有非零解的条件——其系数行列式之值为零，可得特征方程

$$\lambda^4+(p_\xi^2+p_\eta^2+2\omega^2)\lambda^2+(p_\xi^2-\omega^2)(p_\eta^2-\omega^2)=0\tag{1-36}$$

由上式解得

$$\lambda^2=\frac{1}{2}\left[-(p_\xi^2+p_\eta^2+2\omega^2)\pm\sqrt{(p_\xi^2+p_\eta^2+2\omega^2)^2-4(p_\xi^2-\omega^2)(p_\eta^2-\omega^2)}\right]\tag{1-37}$$

$$\lambda=\pm\sqrt{\lambda^2}=\lambda_0+i\omega_0\tag{1-38}$$

由式(1－37)可见，若 $\omega<\omega_{cr,\eta}<\omega_{cr,\xi}$，即 $\omega<p_\eta<p_\xi$，或 $\omega>p_\xi>p_\eta$，则 λ^2 恒为负值，故 λ 为虚数，由式(1－35)可知，这时的固有振动为正进动或反进动。

若 $p_\eta<\omega<p_\xi$，即工作转速位于两个临界转速 $\omega_{cr,\xi}$、$\omega_{cr,\eta}$ 之间，则 λ^2 可能为正值，即系统将会失稳(当 λ_0 为正时)。

(3) 自重影响

若转子为完全平衡的，现考虑自重的影响。在这种情况下，若略去阻尼，则式(1－30)简化为

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\omega\dot{\eta}-\omega^2\xi+p_\xi^2\xi=-g\cos\omega t\\ \ddot{\eta}+2\omega\dot{\xi}-\omega^2\eta+p_\eta^2\eta=g\sin\omega t\end{cases}\tag{1-39}$$

它的解为

$$\xi=\xi_g\cos\omega t,\ \eta=\eta_g\sin\omega t$$

代入式(1－39)可得

$$\begin{cases}(p_\xi^2-2\omega^2)\xi_g-2\omega^2\eta_g=-g\\ -2\omega^2\xi_g+(p_\eta^2-2\omega^2)\eta_g=g\end{cases}\tag{1-40}$$

由此可解得

$$\begin{cases}\xi_g=\dfrac{-g(p_\eta^2-4\omega^2)}{(p_\xi^2-2\omega^2)(p_\eta^2-2\omega^2)-4\omega^4}\\ \eta_g=\dfrac{g(p_\xi^2-4\omega^2)}{(p_\xi^2-2\omega^2)(p_\eta^2-2\omega^2)-4\omega^4}\end{cases}\tag{1-41}$$

从式(1－41)可见，当分母为零，即

$$\omega_{cr}'=\sqrt{\frac{p_\xi^2p_\eta^2}{2(p_\xi^2+p_\eta^2)}}=\sqrt{\frac{k_\xi k_\eta}{2(k_\xi+k_\eta)m}}\tag{1-42}$$

时，ξ_g、η_g 将达到极大值。

若令

$$k = \frac{1}{2}(k_\xi + k_\eta)$$

$$\Delta k = \frac{1}{2}(k_\xi - k_\eta)$$

则式(1－42)可改写为

$$\omega_{cr}' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}\left[1 - \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2\right]}$$

通常 $\Delta k/k << 1, k/m \approx \omega_{cr}^2$，因此

$$\omega_{cr}' \approx \frac{1}{2}\omega_{cr} \tag{1-43}$$

这表示非圆形轴在重力作用下会出现副临界现象。

在非圆形轴转子振动分析中，为分析简明起见，采用了随轴一起旋转的动坐标系。在固定坐标系中的响应可借坐标变换关系求得，即

$$\begin{cases} x = \xi\cos\omega t - \eta\sin\omega t \\ y = \eta\cos\omega t + \xi\sin\omega t \end{cases} \tag{1-44}$$

1.1.2.5 初弯曲

由于制造及装配误差，或在停车过程中，未在慢车转速停留适当时间而再次启动，转子就可能有初弯曲。

现仍以 Jeffcott 转子为例来讨论初弯曲的影响，盘的瞬时位置如图 1－10 所示。

图中 r_s 代表初弯曲，r_d 为运行后因初弯曲引起的转子进一步的弯曲，r 为总的动挠度。与 1.1.2.4 中相仿地可导出初弯曲转子的运动方程

$$\begin{cases} m(\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \xi\omega^2) + c(\dot{\xi} - \omega\eta) + k(\xi - \xi_s) = 0 \\ m(\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \eta\omega^2) + c(\dot{\eta} + \omega\xi) + k(\eta - \eta_s) = 0 \end{cases} \tag{1-45}$$

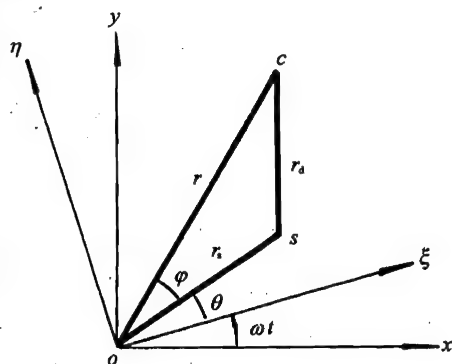


图 1－10 轴有初弯曲的转子圆盘的瞬时位置

借坐标关系变换式(1－44)，可将式(1－45)转换为在固定坐标系中的运动方程

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\zeta p\dot{x} + p^2 x = p^2 x_s \\ \ddot{y} + 2\zeta p\dot{y} + p^2 y = p^2 y_s \end{cases} \tag{1-46}$$

其中

$$\begin{cases} x_s = r_s\cos(\omega t + \theta) \\ y_s = r_s\sin(\omega t + \theta) \end{cases} \tag{1-47}$$

将式(1－47)代入式(1－46)，并令 $r = x + iy$，则式(1－46)可改写为

$$\ddot{r} + 2\zeta p\dot{r} + p^2 r = p^2 r_s e^{i(\omega t + \theta)} = p^2 \bar{r}_s e^{i(\omega t)} \tag{1-48}$$

它的解为

$$r = \bar{r}e^{i\omega t} \tag{1-49}$$

代入式(1－48)可得

$$\bar{r} = \frac{p^2 \bar{r}_s}{p^2 - \omega^2 + i2\zeta p\omega} \tag{1-50}$$

$$|\bar{r}| = \frac{p^2 |\bar{r}_s|}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta p\omega)^2}} \tag{1-51}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\zeta p\omega}{p^2 - \omega^2} \tag{1-52}$$

可见转子的初弯曲会像质量偏心那样使转子产生同步进动,并可由式(1 - 51) 求得相应的临界转速为(使 $|\bar{r}|$ 为极大值)

$$\omega_{cr} = p\sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{1-53}$$

即转子的初弯曲使转子的临界转速稍小于其横向固有频率。

1.1.2.6　扭矩

扭矩的影响可以反映于轴单元的传递矩阵,文献[6] 中导出了考虑扭矩作用下的传递矩阵,轴单元的简图如图 1 - 11 所示。

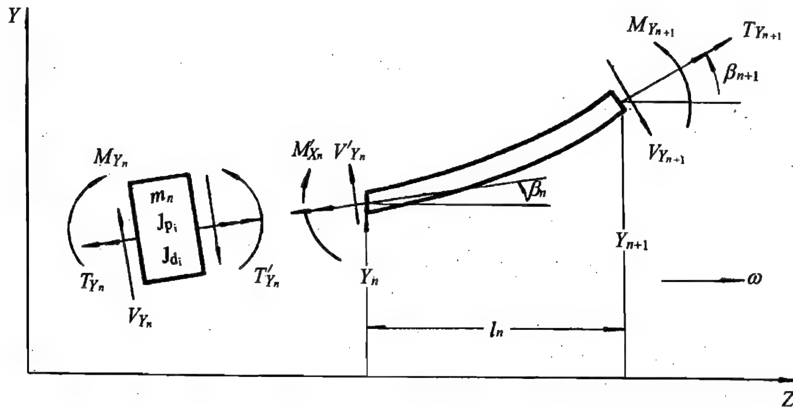


图 1 - 11　计及扭矩影响的轴单元

若略去剪切的影响,无质弹性轴单元在考虑扭矩影响下的传递矩阵为

$$\begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ M_x \\ Q_x \\ y \\ \beta \\ M_y \\ Q_y \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & l & t_{13} & t_{14} & 0 & 0 & t_{17} & t_{18} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} & 0 & 0 & t_{27} & t_{28} \\ 0 & 0 & t_{33} & t_{34} & 0 & 0 & t_{37} & t_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{53} & t_{54} & 1 & l & t_{57} & t_{58} \\ 0 & 0 & t_{63} & t_{64} & 0 & 1 & t_{67} & t_{68} \\ 0 & 0 & t_{73} & t_{74} & 0 & 0 & t_{77} & t_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ M_x \\ Q_x \\ y \\ \beta \\ M_y \\ Q_y \end{Bmatrix}_{n} \tag{1-54}$$

式中:$t_{13} = t_{57} = t_{24} = t_{68} = \xi(1 - \cos\gamma)$;

$t_{14} = t_{58} = \xi(l - \xi T\sin\gamma)$;

$t_{17} = -t_{53} = t_{28} = -t_{64} = \xi\sin\gamma - l/T$;

$t_{18} = -t_{54} = \xi^2 T(1 - \cos\gamma) - l^2/(2T)$;

$t_{23} = t_{67} = \sin\gamma/T$;

$t_{27} = -t_{63} = (\cos\gamma - 1)/T$;

$t_{33} = t_{77} = \cos\gamma$;

$t_{34} = t_{78} = \xi T\sin\gamma$;

$t_{37} = -t_{73} = -\sin\gamma$;

$t_{38} = -t_{74} = \xi T(\cos\gamma - 1)$。

式中：$\xi = \dfrac{EI}{T^2}, \gamma = \dfrac{Tl}{EI}$。

当扭矩 $T \to 0$ 时

$$\lim_{T\to 0} t_{14} = l^3/(6EI);\qquad \lim_{T\to 0} t_{17} = 0;$$

$$\lim_{T\to 0} t_{13} = l^2/(2EI);\qquad \lim_{T\to 0} t_{18} = 0;$$

$$\lim_{T\to 0} t_{34} = l;\qquad \lim_{T\to 0} t_{23} = l/(EI);$$

$$\lim_{T\to 0} t_{33} = 1;\qquad \lim_{T\to 0} t_{27} = 0;$$

$$\lim_{T\to 0} t_{37} = 0;\qquad \lim_{T\to 0} t_{38} = 0。$$

从以上分析可见，只要 T 足够小，使 $\sin\gamma \approx \gamma$，则扭矩的影响可以略去不计。若 $\gamma \leqslant 0.1$ 就可以满足这个要求(实际上，当 $\gamma = 0.2$ 时，$\sin\gamma$ 与 γ 之差也仅为 7‰)，即

$$T \leqslant 0.1EI/l \tag{1-55}$$

同时，也可以预计，由于 T(扭矩)较大时，将使 $\sin\gamma \neq \gamma$，且 $\sin\gamma < \gamma$，即轴单元将因 t_{13} 略为变小而稍为变刚。因此，通常在计算临界转速时不考虑扭矩的影响。

1.1.2.7 轴向力

由于拧紧力和气体力的作用，发动机轴还受有轴向力(通常为拉力) T，它对转子临界转速的影响，也可反映在轴单元的传递矩阵中。

若不计剪切变形的影响，无质量轴单元的受力及变形如图 1-12 所示。

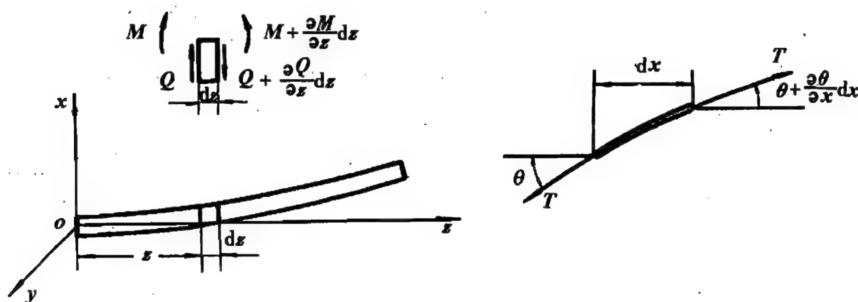


图 1-12 计及轴向力影响的轴单元

参见图 1-12，由微元段的力平衡条件可得

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = T\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \tag{1-56}$$

由微元段的力矩平衡条件可得

$$Q = \frac{\partial M}{\partial z} \tag{1-57}$$

由材料力学

$$M = EI\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \tag{1-58}$$

故有

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = T\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = EI\frac{\partial^4 x}{\partial z^4}$$

即

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} - \frac{T}{EI}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0 \tag{1-59}$$

它的解为

$$x = X(z)F(t) \tag{1-60}$$

$$X(z) = ce^{\lambda z} + \alpha_1 + \alpha_2 z \tag{1-61}$$

代入式(1－59)可得

$$\lambda^4 - \frac{T}{EI}\lambda^2 = 0 \tag{1-62}$$

故

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{T}{EI}} = \pm\lambda_1$$

所以

$$X(z) = c_1\mathrm{sh}(\lambda_1 z) + c_2\mathrm{ch}(\lambda_1 z) + \alpha_1 + \alpha_2 z \tag{1-63}$$

由起始端的边界条件,可得

$$\begin{cases} x_0 = c_2 + \alpha_1 \\ x'_0 = \alpha_0 = c_1\lambda_1 + \alpha_2 \\ M_{x0} = EIx''_0 = EIc_2\lambda_1^2 \\ Q_{x0} = EIx'''_0 = EIc_1\lambda_1^3 \end{cases} \tag{1-64}$$

从式(1－64)可得

$$\begin{cases} c_1 = Q_{x0}/(EI\lambda_1^3), \quad c_2 = M_{x0}/(EI\lambda_1^2); \\ \alpha_2 = \alpha_0 - Q_{x0}/(EI\lambda_1^2), \quad \alpha_1 = X_0 - M_{x0}/(EI\lambda_1^2) \end{cases} \tag{1-65}$$

代入式(1－63)可得

$$X(z) = Q_{x0}\mathrm{sh}(\lambda_1 z)/(EI\lambda_1^3) + M_{x0}\mathrm{ch}(\lambda_1 z)/(EI\lambda_1^2) + X_0 - M_{x0}/(EI\lambda_1^2) + [\alpha_0 - Q_{x0}/(EI\lambda_1^2)]z \tag{1-66}$$

从式(1－66)可得

$$\begin{cases} X_1 = X_0 + \alpha_0 l + Q_{x0}\left[\dfrac{\mathrm{sh}(\lambda_1 l)}{EI\lambda_1^3} - \dfrac{l}{EI\lambda_1^2}\right] + M_{x0}\left[\dfrac{\mathrm{ch}(\lambda_1 l)}{EI\lambda_1^2} - \dfrac{1}{EI\lambda_1^2}\right] \\ \alpha_1 = \alpha_0 + Q_{x0}\left[\dfrac{\mathrm{ch}(\lambda_1 l)}{EI\lambda_1^2} - \dfrac{1}{EI\lambda_1^2}\right] + M_{x0}\dfrac{\mathrm{sh}(\lambda_1 l)}{EI\lambda_1} \\ M_{x1} = Q_{x0}\dfrac{\mathrm{sh}(\lambda_1 l)}{\lambda_1} + M_{x0}\mathrm{ch}(\lambda_1 l) \\ Q_{x1} = Q_{x0}\mathrm{ch}(\lambda_1 l) + M_{x0}\lambda_1\mathrm{sh}(\lambda_1 l) \end{cases} \tag{1-67}$$

从式(1-67)可得考虑轴向力作用下无质量弹性轴单元的传递矩阵

$$\begin{Bmatrix} X \\ \alpha \\ M_x \\ Q_x \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & l & t_{13} & t_{14} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} \\ 0 & 0 & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \alpha \\ M_x \\ Q_x \end{Bmatrix}_0 \tag{1-68}$$

式中：$t_{13} = t_{24} = \dfrac{\mathrm{ch}(\lambda_1 l) - 1}{EI\lambda_1^2}$；

$t_{14} = \dfrac{1}{EI\lambda_1^2}\left[\dfrac{\mathrm{sh}(\lambda_1 l)}{\lambda_1} - l\right]$；

$t_{23} = \dfrac{\mathrm{sh}(\lambda_1 l)}{EI\lambda_1}$；

$t_{33} = t_{44} = \mathrm{ch}(\lambda_1 l)$；

$t_{34} = \dfrac{\mathrm{sh}(\lambda_1 l)}{\lambda_1}$；

$t_{43} = \lambda_1 \mathrm{sh}(\lambda_1 l)$。

当 $T \to 0$ 时，$\lambda_1 \to 0$，并有

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} t_{13} = \frac{\left[1 + \frac{1}{2}(\lambda_1 l)^2 + 0^4\right] - 1}{EI\lambda_1} = \frac{l^2}{2EI};$$

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} t_{14} = \frac{1}{EI\lambda_1^3}\left[\left(\lambda_1 l + \frac{1}{6}(\lambda_1 l)^3 + 0^5\right) - \lambda_1 l\right] = \frac{l^3}{6EI};$$

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} t_{23} = \frac{1}{EI\lambda_1}(\lambda_1 l + 0^3) = \frac{l}{EI};$$

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} t_{33} = 1;$$

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} t_{34} = l;$$

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} t_{43} = 0。$$

这正是无质量弹性轴单元不受轴向力时的传递矩阵。

显然轴向拉力将使轴段的横向固有频率提高，即将使转子的临界转速有所提高。从上面的分析还可知，略去的最大微量为 0^3，因此可以认为，若 $\lambda_1 l \leqslant 0.1$，轴向力的影响可以略去不计。这一条件也可表示为

$$T \leqslant 0.01 EI/l^2 \tag{1-69}$$

1.1.2.8 转子加速(或减速)

现代航空发动机转子常工作于刚体型临界转速以上，当转子以加速(或减速)越过临界转速时，其振动特性将有如下变化：以最简单的 Jeffcott 转子为例，其稳态不平衡响应如图1-3所示。实际上，除非人为地附加有足够的阻尼，很难由试验得到这种曲线。

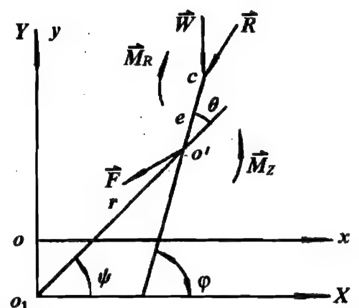


图1-13 圆盘的瞬时位置及其受力

当转子以变转速运行时，Jeffcott 转子的瞬时盘心位置及受力情况如图1-13所示。

设盘心的坐标为 x、y，则质心的坐标为

$$\begin{cases} x_c = x + e\cos\varphi \\ y_c = y + e\sin\varphi \end{cases} \tag{1-70}$$

求导可得

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \dot{x} - e\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y}_c = \dot{y} + e\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \tag{1-71}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = \ddot{x} - e\ddot{\varphi}\sin\varphi - e\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ \ddot{y}_c = \ddot{y} + e\ddot{\varphi}\cos\varphi - e\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases} \tag{1-72}$$

圆盘在惯性力、惯性力矩、重力、重力矩 M_g、阻尼力、阻尼力矩 M_d、弹性恢复力和驱动力矩 M_s 的作用下，处于动态平衡状态，由此可列出方程

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_1\dot{x} + kx = me\dot{\varphi}^2\cos\varphi + me\ddot{\varphi}\sin\varphi \\ m\ddot{y} + c_1\dot{y} + ky = me\dot{\varphi}^2\sin\varphi - me\ddot{\varphi}\cos\varphi - mg \end{cases} \tag{1-73}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J_p\dot{\varphi} + m(x_c\dot{y}_c - y_c\dot{x}_c] = M_g + M_d + M_s$$

即

$$\begin{aligned} J_p\ddot{\varphi} + m[&(x + e\cos\varphi)(\ddot{y} + e\ddot{\varphi}\cos\varphi - e\dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\ &- (y + e\sin\varphi)(\ddot{x} - e\ddot{\varphi}\sin\varphi - e\dot{\varphi}^2\cos\varphi)] \\ &= - mg(x + e\cos\varphi) - c_2\dot{\varphi} + M_s \end{aligned} \tag{1-74}$$

若转子变转速运行时是等加速或等减速的，且设 $t = 0$ 时，$\varphi_0 = 0$，则有

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \alpha \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \alpha t \\ \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases} \tag{1-75}$$

因此，从转速为 $\dot{\varphi}_0$ 时的稳态不平衡响应出发，可借式(1-73)、(1-75)用数值积分法求出转子在等加速(或等减速)运行时的不平衡响应；借式(1-74)可求出所需的瞬时驱动力矩 M_s。

文献[7]试验并计算了如下一个转子：一个厚5cm、直径为12cm、质量为4.7kg的圆盘，安装在一根长52cm、直径为1.7cm的轴中央，轴的两端均为滚珠轴承，其临界转速约41.6r/s。它以等加速度 $\alpha = 2\pi \times 5.7\mathrm{rad/s^2}$ 越过临界转速时的试验与计算结果如图1-14所示；它以等减速度 $2\pi \times 4.5\mathrm{rad/s^2}$ 越过临界转速时的试验与计算结果如图1-15所示。

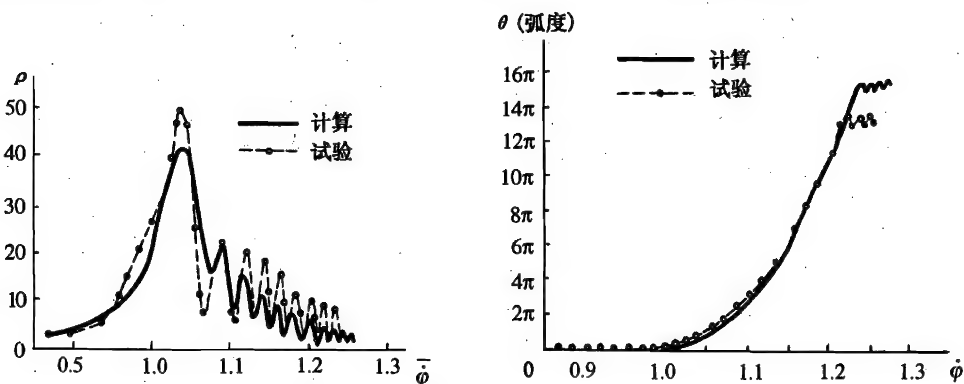


图1-14 等加速时的计算与试验结果

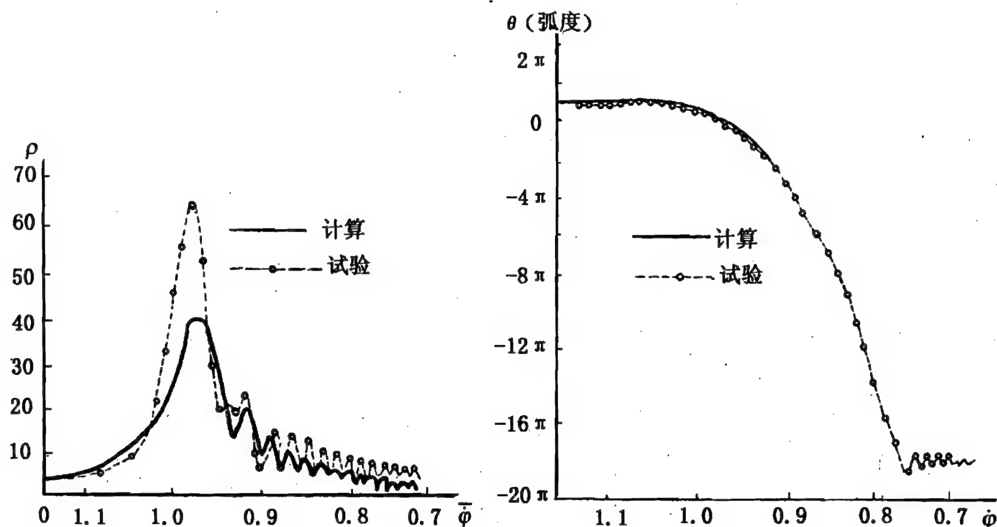


图 1-15 等减速时的计算与试验结果

转子的偏心 e 为 3μm(等加速时) 及 4.5μm(等减速时),图中的$\bar{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}/\omega_{cr}, \rho = r/e$。

从上述分析可见,当转子以变转速越过临界转速时,最大振幅总是滞后出现。一般讲,$|\alpha|$越大,滞后越大,响应曲线变化趋于平缓。从实例也可见,实际计算发动机转子变转速时的不平衡响应是比较复杂与困难的。

1.1.3 调整转子-支承系统临界转速的主要方法

1.1.3.1 调整临界转速的目的

1.1 中已列举了在航空发动机研制、使用及排故过程中转子动力学的任务,在文献[9] 中,更明确提出:

为了达到所要求的转子动力学特性,必须满足五项主要设计准则:

容许的转子临界转速;

容许的挠曲应变能;

适当的工作叶片和导向叶片间隙控制;

容许的支承结构载荷;

容许的转子稳定性储备。

这五项设计准则的根本目的是保证重量轻、转速高的航空发动机不仅能安全可靠运行,而且性能好、寿命长。

由于平衡及装配误差,以及动平衡状况与发动机工况的显著差异,实际的发动机转子总是存在较大的残余不平衡量(参考文献[10])(如果能在试车台上作本机平衡,可以大大改善平衡状况,如 CFM56 发动机),如果发动机工作于临界转速附近,将产生剧烈的共振。因此,航空涡轮发动机结构完整性大纲中建议:“对于高于最大工作转速和低于慢车转速的有害共振状态,规定裕度至少是 20%。” 并且规定:“必须提供足够的阻尼和适当的平衡,使发动机能平稳地通过低于最大工作转速的转子临界转速。”

为满足上述要求,许多现代航空涡轮发动机是这样设计的:采用弹性支承,使转子的正常工作转速(巡航、额定、最大转速) 高于最低两阶的“刚体型” 临界转速,并使支承有适当的阻

尼。通常具有滚动轴承的燃气涡轮发动机，其临界阻尼比仅为 0.015 ~ 0.025(参考文献[2])。

1.1.3.2　调整临界转速的方法

从 1.1.2 的分析可知，影响临界转速的因素有很多，然而，其中的若干因素，如回转效应、轴向力、扭矩，它们的影响是使临界转速略有改变，除扭矩的影响是使临界转速略为减小外，其余因素均使临界转速略为增大，因此，只是当需要更精确地确定转子 - 支承系统的临界转速时，才予以考虑，而并非是调整临界转速的因素。

还有一些因素，如初弯曲、变转速、非圆形轴，则应了解其对临界转速的影响，从而有助于正确分析转子系统的振动特性，以免错误，如在变转速过程中测定临界转速，在非圆形轴的两个临界转速间运行而致失稳 ……

在发动机研制阶段，能有效地调整转子系统临界转速的方法为：

(1) 采用弹性支承

由式(1 - 10) 可见，对于最简单的模型 ——Jeffcott 转子，如果弹性支承的刚度远小于轴的刚度，则合成刚度约等于弹性支承刚度，即这一转子的临界转速将取决于弹性支承的刚度，并近似地正比于$\sqrt{k_s}$(k_s 为弹性支承刚度)。

因此，如前面所分析的，为了调整临界转速，常常希望降低支承的刚度，即采用弹性支承。

由于滚动轴承的阻尼非常小，所以采用挤压油膜阻尼器是适当的，尤其当转子应变能超过该振型的总应变能的 25% 时。为了充分发挥阻尼器的作用，应将阻尼器配置在振幅较大的轴承位置上。

若记轴承刚度与转子刚度之比为

$$R_k = k_s/k_r \tag{1-76}$$

文献[12] 的研究表明，只要实际可行，R_k 作得越小，则不平衡响应及不稳定的趋向也越小。当然要避免在机动飞行条件下，因冲击载荷而使叶片碰摩。

在调整临界转速时，除应满足 1.1.3.1 中的基本要求以外，如还能满足如下要求：

转子工作转速与最低阶临界转速之比

$$R_\omega = \omega_{max}/\omega_{cr,1} < 2 \tag{1-77}$$

经验及分析研究均证明，对避免失稳是有益的。

还应使转子应变能与总应变能之比(对于工作转速范围内的每一振型)

$$R_e = \frac{E_r}{E_r + E_s} \tag{1-78}$$

尽可能地小。如前所述，当 $R_e > 0.25$ 时，就应采用挤压油膜阻尼器。

同时，为了提高轴承的寿命，应减少传给静子结构的振动(载荷)，即传输率

$$T_f = F_e/F_\infty \tag{1-79}$$

应小于 1，越小越好。F_e、F_∞ 分别表示弹性支承或(和) 挤压油膜阻尼器、刚性支承条件下的外传力。

(2) 转子的刚度

从式(1 - 8) 可见，转子的临界转速

$$\omega_{cr} \propto \frac{r}{l^2}\sqrt{E/\rho} \tag{1-80}$$

$\sqrt{E/\rho}$ 取决于转子的材料。虽然这一关系式是对于一个简单模型转子导出的，它也同样适用于任一复杂结构的实际涡轮机转子。只要发动机转子的材料、几何形状已定，它的临界转速(参考

文献[2])

$$\omega_{cr} = \bar{c}\frac{d}{l^2} \tag{1-81}$$

式中,$\bar{c}$ 为一常数,d 为轴的直径,l 为转子的跨度。

$\frac{d}{l^2}$ 就反映了转子的刚度,因此要提高临界转速可以借增大转子的刚度,最有效的乃是减小转子的跨度,其次为增大转轴的直径。所以,文献[9]中明确指出:“通常应这样选择轴承位置,就是使转子的纯弯曲型临界转速位于最大工作转速以上。如果这种振型的临界转速落到最大工作转速以下,则需在转子系统中增加另一个轴承,以便减小轴承之间的距离。”

转子材料的 E/ρ 值,也直接影响转子的临界转速(见式(1-80)),所以也有研究用复合材料制造转子,以提高其 E/ρ 值的,如文献[13]。

(3) 转子的结构

发动机转子结构复杂,使相应的力学模型不够准确,是临界转速计算误差的主要来源。将转子结构设计得尽可能地简单,最好是一个整体式转子(如F401发动机),不仅能使临界转速精度的控制有保证,从而可以减少共振的可能;而且还可减少许多内阻尼的来源,有利于转子的稳定运行。

(4) 涡轴发动机中的特殊问题

航空涡轴发动机,由于多采用前传动(如直升机),带来了许多特殊的转子动力学问题。若采用套轴结构,动力涡轮轴必须很长。如用轴间轴承又会引起特殊的转子动力学和维护性问题(参考文献[14]、[15])。因此某些前传动的涡轴发动机,其动力涡轮轴工作于一阶弯曲型临界转速以上,称为超临界运行。其安全运行借下述方法来达到:

转子轴组件的精密高速平衡(柔性转子平衡——参见第12章);

提供足够大的外阻尼。

如果不想使动力涡轮轴超临界工作,则必须:

将动力涡轮轴转速设计得较低;

采用轴间轴承;

重新设计燃气发生器,以增大动力涡轮轴的直径;

动力涡轮轴采用特殊材料,它具有显著较高的 E/ρ 值。

如采用轴间轴承,又受到空间的限制。若用滑动轴承,将遇到润滑问题、散热问题及可靠性问题,所以至今未获成功。若采用滚动轴承,不仅需要较大的径向空间,而且还会遇到供油困难及滚子打滑问题。轴间轴承还是非同步振动的来源之一。

增大动力涡轮轴的直径需要增大燃气发生器轴承的直径,会使它的DN值增大。

采用离心式压气机可使动力涡轮缩短,但会增大涡轴发动机的迎面尺寸。

采用铍制造动力涡轮轴,它的 E/ρ 可比钢或铝大两倍,但尚待解决它的切口敏感性及脆性问题。假若能够克服这些缺陷,采用铍制造的动力涡轮轴也许可使工作转速提高20%,而不必超临界运行。

钛(Ti-6-4)-碳化硅纤维复合材料是另一种正在研究的制造轴的金属基复合材料,它的 E/ρ 比钢的高约50%。

还可研制具有更高强度的轴材料,以减少轴的壁厚,从而提高固有频率。Pratt & Whitney公司在军方支持下,正研究一种Ni-Mo-Al结晶晶粒的超耐热合金。

另外,传动系统还会遇到扭转振动,甚至出现扭转失稳问题。

1.2 发动机整机振动基础

1.2.1 整机振动现象与危害性

安装在飞机或台架上的航空发动机,是一个无限多自由度的振动系统,所谓发动机的整机振动,就是这一系统在各种激振力作用下的响应。

为了保证发动机和外部调节器、附件和硬件(如管路等)在飞行和地面包线范围内的所有发动机转速和推力状态下(包括稳态和瞬态),在设计使用寿命内均没有破坏性振动,应在发动机压气机和涡轮机匣、附件传动机匣上,如果可能,在内部结构上安装加速度传感器测量并规定最大许用振动限制值(参考文献[8])。

由于发动机结构复杂,难以准确计算其整机振动特性,故在研究发动机的整机振动现象时,总是力图求得这个问题的近似解,将发动机简化为某种理想化的振动系统,它具有最少的自由度,但保持了实际发动机的主要振动性质(详见1.2.4)。

由于转子不平衡和气体力是发动机整机振动的主要激振源(详见1.2.2),所以发动机的整机振动,主要指在所有发动机工作状况下,包括最大进气畸变、失速、各种可变几何行程的极限、最大压气机引气和功率输出、发动机最大进气压力、最高温度及其组合,包括工作转速及高于慢车转速的每一个危险转速等工况下,在发动机机匣、附件(如燃油调节器、燃油泵、阀门、管路等)及内部结构(如主轴承的适当位置上)的振动响应。如果整机振动过大,可能造成转子与静子在小间隙处(如密封、叶尖)的碰摩,轴承载荷过大,附件振动应力过大,驾驶员及乘员的不适,飞机仪表板上指针晃动等。

整机振动过大是发动机制造、装配质量不高的反映;也可能是发动机已产生某种故障的表现,如失衡、失稳等。

因此,整机振动可以作为生产中的一种质量控制的指标,也是确定是否应该从飞机上拆下发动机进行维修的一个指标。

1.2.2 造成整机振动的主要原因分析

1.2.2.1 转子源

(1) 转子的残余不平衡

转子不平衡的原因是多种多样的:有材料的缺陷,如密度不均匀、空隙和疏松;有结构上的缺陷,如因存在键、开口销、孔而造成的质量不对称,因公差选择不当造成的偏差;有制造的缺陷,如空心零件的壁厚差,加工过程中热变形造成的尺寸偏差;有装配的缺陷,如对接部分间的不同心和相互偏斜,热配合时的温度变形,键配合紧度造成的偏差,螺栓连接拧紧力不均等。这些缺陷在很大程度上已被转子的平衡所补偿。消除使用中的缺陷要困难些,如由于转子不均匀受热和冷却造成的热变形,由于转子各部分热膨胀系数的不同,连接松动,不均匀的腐蚀、磨损等,尤其是已组合平衡好的转子因装配需要而重新分解再装,常常使发动机转子具有相当大的实际残余不平衡量。

转子的残余不平衡主要引起同步进动,即$1\times n$频率分量。在旋转的不平衡力作用下,发动机机匣的每一个点在垂直于旋转轴线的平面内作接近圆形的运动;当转子-机匣系统的刚性

在各个半径方向不相同时,则轨迹是一个椭圆或其他封闭曲线。因此可以在垂直或水平方向(或任一径向)测得这一频率为 $1 \times n$ 的振动。

当转子在不同直径方向的刚性不均匀时,转子不平衡还可以激起二阶谐波及高阶的谐波($2 \times n$、$3 \times n\cdots$ 频率分量),阶次越高,该频率分量的振动也越弱。

(2) 转子初弯曲(参见 1.1.2.5)

转子初弯曲激起的整机振动频率在亚临界转速区和转子不平衡力激起的相同。转子初弯曲和不平衡激起的振动幅值均随转速的上升而增大;但增大的情况不同,初弯曲引起的振幅在低转速时就较大,由于转子初弯曲和不平衡量的方向是随机的,因而两者共同激起的振动,则可能为振动幅值随转速的上升而增大,也可能为振动幅值几乎不随转速而变化,偶尔还可表现为振动幅值随转速上升而下降,或开始不变,至某一转速时振幅突增的现象。

(3) 螺旋桨

螺旋桨转子的质量不平衡,与主转子的残余不平衡,其产生及作用机理是相仿的。除了机械的原因外,螺旋桨转子尚有气动不平衡。

产生气动不平衡的原因,是桨叶的气动特性各不相同,因为气动特性不同,各个桨叶的拉力和旋转阻力是不相同的,因此它们的合力除了拉力及扭矩以外,还有不平衡的气动力矩和不平衡气动力作用在桨轴上,并随之一起转动。

无论螺旋桨转子的质量不平衡还是气动不平衡,都主要将激起频率为 $1 \times n_p$ 的整机振动,n_p 为螺旋桨转速。

1.2.2.2 流场源

(1) 进气畸变

各种因素均可造成进气畸变,如机翼和机身对气流的障碍、飞行姿态及试车台进气流场不均等。由于流场沿周向的不均匀性,可使作用在桨叶、压气机叶片的力在旋转一周内是变化的。例如在障碍物处,气流速度减小,压力增大,桨叶经过这些障碍物的瞬间,因为气流速度减小而攻角增大,造成桨叶拉力和阻力的瞬间增大。在旋转一周内,每一桨叶受到的脉动力数目和障碍物的数目相同,例如机翼造成每周两个脉动力,机身造成每周一个脉动力。因此螺旋桨转子受到的激振力频率为

$$f = izn_p \tag{1-82}$$

式中,z 为桨叶数;$i = 1,2,3\cdots$ 为阶次,一般讲阶次愈高,激振力愈弱,i 等于障碍物数者例外。

相仿地,因进气畸变压气机转子受到的激振力频率为

$$f_i = z_i n \quad (i = 1,2,3\cdots) \tag{1-83}$$

式中,i 代表第 i 级;f_i 也称为叶片经过频率。

这种激振力在进气畸变确定的情况下,其作用平面也是确定的,因此所激起的整机振动在各个径向可能有明显的差异。

由于 f_i 的值很大,例如某级叶片数为30,n 为200r/s,其经过频率为6 000Hz,因此虽然这种整机振动的位移幅值很小,其加速度幅值却非常大。例如,设振动位移幅值仅为 0.5μm,其振动加速度的幅值将为 $72g$.

显然,进气畸变将逐级趋于减小,即频率为 f_i 的整机振动分量随 i 增大而迅速减小。

(2) 流场畸变

压气机可调导向叶片、防喘引气、流道中的整流支板、各个火焰筒出口流场差异、环形燃烧室出口流场不均等许多因素,均可产生流场畸变,使紧随其后的几级压气机或涡轮转子受到频

率为叶片经过频率及其倍数的激振力

$$f_j = z_j n i \tag{1-84}$$

式中,j代表第j级压气机或涡轮;$i = 1,2,3 \cdots$,i越小,或i等于火焰筒数、放气活门数、整流支板数时,该阶频率分量的激振力也越强。

由于航空发动机测振的频率上限为10kHz,所以式(1－84)中的许多频率分量实际上已超出此上限。

(3) 旋转失速

当压气机产生失速时,在前几级的流道内会出现一个或几个旋转的分离区,其旋转方向与转子转动方向相同,而旋转速度较低。在这些旋转的分离气团的作用下,将使发动机产生频率为

$$f = (0.3 \sim 0.5)n \tag{1-85}$$

的整机振动,它的出现预示了产生喘振的可能。

1.2.2.3　声源

(1) 声学振动与振荡燃烧

在燃烧室或其他结构所包的燃气容积中,可能产生固有的纵向和横向振动,它的频率正比于声速 α,反比于波经过的长度 l:

$$f_i = i\frac{1-M^2}{m}\frac{\alpha}{l} \tag{1-86}$$

式中:M 为马赫数;m 为由边界条件决定的系数;$i = 1,2,3 \cdots$。

振荡燃烧则为燃烧过程和声学振动系统互相作用所致的不稳定燃烧,它的频率稍不同于式(1－86)的值,这是因为燃烧改变了声学系统的参数,由于燃烧区的声波被遏止时,它的一部分被反射,改变了边界条件和计算长度的 l 值。因此,振动频率随工作状况的变化而改变,一些振动波形可能消失,而另一些振动波形可能出现。

在发动机中,振荡燃烧最可能在加力燃烧室中产生,尤其是当非常富油或非常贫油时。当然,也可能在燃烧室中产生振荡燃烧。不燃烧时的声学振动,则往往是由涡流的周期脱离造成的。

这种振动总的频率范围约为50～5000Hz,纵向振动的频率最低,径向振动的频率最高。振动的烈度随着频率的增大而减弱。

从上述分析可见,声学振动与振荡燃烧将激起机匣纵向及径向的振动,低频的强烈振动使测得的整机振动值剧增、超限(工厂中称听到的加力燃烧室振荡燃烧为“牛叫”),高频振动可能使薄壁结构因声振而疲劳。

(2) 噪声

发动机的主要噪声源是燃气流、螺旋桨、风扇。

排气噪声是排气和周围空气紊流掺合造成的,噪声的频谱是连续的。

螺旋桨噪声中,旋转噪声最主要。螺旋桨每旋转一周,给定点的空气被截断 z_p 次(z_p 是桨叶数),引起旋转噪声,它的基频为

$$f_{n,p} = z_p n_p \tag{1-87}$$

风扇噪声主要是风扇旋转噪声及涡流噪声,风扇旋转噪声的基频为

$$f_{n,f} = z_f n_f \tag{1-88}$$

涡流噪声是因涡流从叶片两面交替地脱离造成的,它的频率等于涡流从叶片一面形成的频率。

噪声首先是激起薄壁结构的声振，连续的噪声谱中，突出了相当于这些构件的固有频率分量。个别情况下，薄壁结构可能发生强烈的振动，以致疲劳损坏。

1.2.2.4 结构源

(1) 轴承

轴承激起的振动是轴的旋转中心线周期地偏离几何中心线的结果。已知有两种基本的振动源：各个轴承元件的几何不精确度和可变的柔度。

轴承内环的壁厚差导致 $1 \times n$ 的振动，内环的椭圆度则导致 $2 \times n$ 频率的振动，由于跑道的波纹度产生的振动频率则为

$$f_{w} = \frac{D_0 \pm d}{2D_0} \cdot \frac{Z_w Z_r}{q} n \tag{1-89}$$

式中 D_0 为滚子中心所在圆的直径；d 为滚子直径；Z_w 为环上的波纹数；Z_r 为滚子数；q 为 Z_w、Z_r 的最大公约数。当考虑外环波纹度时取“-”号，当考虑内环的波纹度时取“+”号。

由于滚子波纹度(棱度)产生的振动频率为

$$f_{w,r} = \frac{D_0^2 - d^2}{2D_0 d} Z_w Z_r n \tag{1-90}$$

变柔度激起振动的原因有两个：由于轴承外环的弹性变形和滚子间载荷分布不均造成的变接触柔度。振动频率等于滚子在外环上的经过频率

$$f = \frac{D_0 - d}{2D_0} Z_r n \tag{1-91}$$

振动振幅正比于载荷、径向间隙及滚子尺寸的不均匀性。

保持架在游隙内的活动会激起以其旋转频率的振动

$$f = \frac{D_0 - d}{2D_0} n \tag{1-92}$$

(2) 齿轮

由于齿轮的不平衡度和啮合齿在载荷作用下的变形，激起的振动频率为

$$f = iZ_g n_g \qquad (i = 1,2,3 \cdots) \tag{1-93}$$

式中：Z_g—— 齿数；

n_g—— 齿轮转速。

齿轮的运动误差，是由于制造误差(如分度误差、齿形误差)、安装误差(如中心距偏差、中心线偏斜)、结构(如齿、齿圈 ……)的弹性变形等原因造成的。最重要的成分是累计节距误差，它将激起的振动频率为

$$f = in_g \qquad (i = 1,2,3 \cdots) \tag{1-94}$$

齿轮传动激起的整机振动，随着传动载荷和圆周速度的增加而增大。当圆周速度增大时，齿轮传动可能工作在不连续的状态下，这时产生的强烈冲击会激起齿轮和机匣的固有振动和共振，这一成分的振动比一般的要大几倍。

(3) 附件转子

各种附件转子，如起动发电机、燃油泵 …… 的转子，因其不平衡，也会激起相应频率

$$f_a = in_a \qquad (i = 1,2,3 \cdots) \tag{1-95}$$

的整机振动，$i = 1$ 及某一特征数(如柱塞泵的柱塞数)时振动最大。

1.2.2.5 故障源

许多发动机故障会产生独特的发动机整机振动，故障不同，其特征也不同。因此，可借整机振动信号的分析与处理，诊断出发动机的故障（种类、严重程度及发生部位），这种技术称为发动机的振动故障诊断。这里只列举一些典型的发动机故障及其相应的振动特征。

(1) 密封碰摩

它可能引起 $1\times n$ 频率成分振动增大，也可能引起转子或静子固有频率的振动，也可能引起 $(0.4\sim1)\times n$ 频率成分的振动，还可能引起高次谐波（$2\times n, 3\times n, \cdots$）或次谐波（$n/2, n/3, \cdots$）的振动，并也可能引起极高频率的振动。其振幅常随转速的上升而增大，并随转速的下降而减小。

(2) 轴承间对中性不好

它主要将使 $2\times n$ 频率成分的振动增大，$1\times n$ 频率振动也可能增大。

(3) 支承刚度在垂直与水平面内不相等

主要表现为 $2\times n$ 振动增大，它可能激起转子的临界振动或静子的共振振动，高次谐波（$3\times n$ 及以上）也可能增大。

(4) 次谐波共振

振动频率精确等于 $\frac{1}{2}n$、$\frac{1}{4}n$、$\frac{1}{8}n$，它们只能发生在非线性系统中，如零件松动或有间隙（在转子或承力系统内，或在联轴器中）；转轴裂纹则可能产生 1/3 阶的次谐波振动。

(5) 叶片碰摩

工作叶片与静子碰摩将激起转子或静子固有频率的振动，及甚高频率的振动（密封产生的“尖叫声”）。它在发动机启动过程（升速）中常常表现为振幅突然增大，而在停车过程中（降速）中常常保持不变。但有时也表现为在启动过程、停车过程中振幅突然减小。

(6) 转子或静子松动

转子或静子松动（如由于螺栓松动、过盈不足或过盈丧失 ……），主要产生转子或静子固有频率（最低阶）的振动，并通常表现为转速升至某一值时，振幅突然增大，转速降至某一值时，振幅突然减小。

(7) 轴承内、外环损伤

若轴承内、外环上存在一处损伤或工作间隙，都会引起频率为滚子在内外环上经过频率的振动，即

$$f_{\mathrm{p}} = \frac{D_0 \pm d}{2D_0} n Z_{\mathrm{r}} \tag{1-96}$$

当为滚珠轴承时，d 应代之以 $d\cos\beta$，β 为接触角。

(8) 工作叶片裂纹

当工作叶片裂纹时，会在相应叶片经过频率处出现两个边频，边频与经过频率之差等于叶片的固有频率（即导致叶片产生疲劳裂纹的那一阶固有频率）。

(9) 失衡、振荡燃烧、旋转失速、临界转速等

这些都是极常见与重要的发动机故障。

(10) 失稳

失稳的特点是产生剧烈的非同步进动，例如，叶尖、密封气弹力导致的失稳（参考文献[17]），螺旋桨转子的颤振涡动（参考文献[18]）等。

(11) 结构共振

从前面的分析可知，发动机中的激振源如此之多，发动机的结构又是如此复杂，因此很容易产生某一构件的共振现象，尤其要注意避免引起附件管路、叶片的共振。假如共振转速远离工作转速，则不会产生严重危害，因此对共振转速亦应保持有至少 10% 的裕度。必须作出标明主要激振阶次(见以上分析）和发动机主要零组件(如叶片、盘片组件、封严装置、轴、隔圈、安装节、机匣和其他可能发生高频振动的零组件）各种振型的固有频率与转速的关系曲线(即坎培尔图)，借理论计算与试验分析，要求保证发动机在设计使用寿命和设计用法条件下没有破坏性振动。

1.2.3 减小整机振动的主要方法

1.2.3.1 临界转速设计符合要求

文献[8] 中规定："在发动机全部工作转速范围内，转子必须没有有害的共振。高于发动机工作转速范围的转子临界转速至少要高于最大工作转速 20%"，"装有发动机的安装系统的固有频率，对应于由转子残余不平衡引起的全部有害的振型，至少要低于慢车转速 20%。"

调整临界转速的方法参见 1.1.3.2。

1.2.3.2 提供足够的阻尼

文献[8] 中规定："必须提供足够的阻尼和适当的平衡，使低于最大工作转速的转子临界转速，在发动机平稳工作的情况下安全通过。"

提供阻尼的方法是在振幅较大的轴承位置上配置挤压油膜阻尼器。

1.2.3.3 适当的平衡

根据发动机转子动力学特性，对转子适当平衡，除了应有高精度的动平衡以外，还应精心安排平衡工艺(如动态静平衡、分步平衡等)，必要时可做本机平衡。

1.2.3.4 避免机匣共振

由于转子不平衡激起的机匣共振，也应符合临界转速的设计要求。

1.2.3.5 排除故障

如因发动机发生故障(如振荡燃烧、失稳、喘振或失速、叶片断裂、碰摩 ……) 而使整机振动增大，在确诊出原因后，予以排除。这往往是一项反复、费时的工作，并需多方面人员的共同努力。

1.2.4 整机振动的简易估算方法

发动机整机振动的首要激振源是转子不平衡，而整机振动值是用安装在压气机和涡轮机匣、附件传动机匣上的加速度传感器，如果可能，也用安在内部结构上的加速度传感器来测量。所以，整机振动估算，就是要估算由给定位置给定不平衡度激起的测振点处的振动。

若为了准确地分析临界转速和强迫响应，则发动机模型需有 200 ~ 300 个质量点，如图 1 - 16 所示。

为了能比较简捷地估算发动机的整机振动，下面介绍两种整机振动简易估算方法。

1.2.4.1 单双低自由度模型

如图 1 - 17 所示，它是一台两支点发动机，它的承力机匣被看成是由没有质量的刚性元件连接在一起的两个主质量 m_1、m_2 组成，附件等则视作与承力机匣弹性或刚性连接的一些质量。

按照这个简图，承力机匣的振动是被刚性转子的不平衡力激起的，而附件的振动是被它

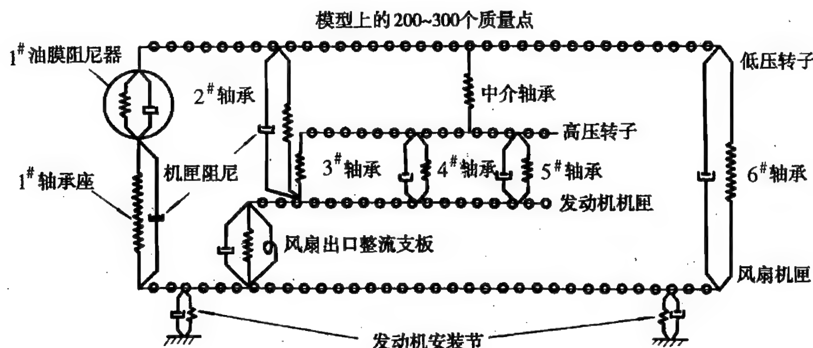


图 1－16　某发动机不平衡响应分析模型

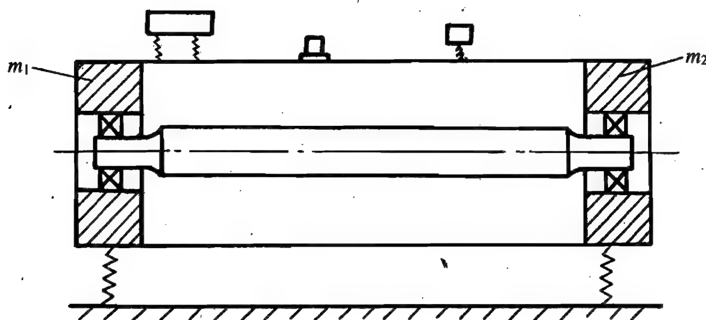


图 1－17　最简单的发动机振动系统模型

安装处的机匣振动激起的。假定飞机或台架对发动机的振动没有显著影响，附件等对承力机匣的振动没有显著的影响（由于质量相对地小得多）。在这些假设下，承力机匣的振动代表了发动机总的振动状况，转子的不平衡度及附件等受激振的程度，也代表了用来估价发动机对飞机或台架的作用的总振动能量。因为动能直接正比于质量及振动速度的平方，而总的振动能量基本上集中在发动机的主要质量上，承力机匣的振动正是主要质量的（含转子质量 —— 在此模型中）振动。

这一最简单的模型只适合于在低频（几十赫兹）下作整机振动估算，例如估算低于慢车转速的转子临界转速（装有发动机的安装系统的固有频率）。

1.2.4.2　导纳法

假若有条件，可以借试验测得从转子主要不平衡面（例如可取为压气机转子、涡轮转子分别或一起组合平衡时的平衡修正面）到测振点的导纳，也即测振点对主要不平衡面上脉冲力的响应，则可借数字信号分析技术（如借各种数字信号分析仪器）求得

$$H_{ij}(f) = Y_i(f)/X_j(f) = G_{xyij}(f)/G_{xj}(f) \tag{1-97}$$

式中，i 代表第 i 个测振点；j 代表第 j 个主不平衡面；$G_{xj}(f)$ 为第 j 个主不平衡面施加的脉冲力（例如锤击力）的自功率谱；$G_{xyij}(f)$ 为第 i 个测振点的响应与第 j 个主不平衡面处的脉冲力的

互功率谱。

则第 j 个主不平衡面的不平衡量 U_j(设其单位为 g·cm) 在第 i 个测振点产生的振动为(设 $H_{ij}(f)$ 的单位为 g/N):

$$V_{ij} = k_1 H_{ij}(f) U_j \tag{1-98}$$

式中:$f = n/60$(n 为转速,r/min);$k_1 = 4 \times 10^{-4} f^2$。

设 $i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,l$,即共有 m 个测振点,l 个主不平衡面,并取 $k = 1,2,\cdots m, m+1, m+2,\cdots m+l$,则可以构成传递函数(导纳)矩阵 $\boldsymbol{H}(f)_{k\times k}$。这个矩阵是对称的,即上述的导纳 $H_{ij}(f)$ 也可以由在第 i 个测振点施加脉冲力,测第 j 个主不平衡面的响应求得,即

$$H_{ij}(f) = G_{xyji}(f)/G_{xi}(f) = H_{ji}(f) \tag{1-99}$$

即材料力学中的卡斯的龙定理。利用这一性质,可能使试验较为方便。

1.2.4.3 整机振动频谱概貌

由前面对整机振动各种激振源的详细分析,结合对各种类型正常工作发动机的频谱分析与统计,可以概略地综合出各种类型航空发动机的整机振动频谱。当然,假定发动机为一线性系统,从而可以应用振动叠加原理。

一般情况下,各类发动机的整机振动可以表示为

$$x_\Sigma(t) = \sum_{i=1}^{m} [x(t)]_i + n(t) \tag{1-100}$$

$$G_x(f) = G_m(f) + G_n(f) \tag{1-101}$$

即有 m 个主要分量,及用振动噪声来表示的所有其他次要分量。

主要分量为数不多,它们的幅值通常是显著的,这种分量一般包括:转子不平衡激起的振动 n 或 n_h、n_l(如果是双转子);螺旋桨激起的振动,即 n_p、$n_p \times 2$(如果是对转螺旋桨),及 $n_p Z_p$;各级风扇叶片经过频率 nZ_i。

所有其他激振源(轴承、齿轮、压气机和涡轮叶片、气流噪声等)通常都为次要分量,其振动速度的幅值约小于 5mm/s。

在这里,应强调指出,这是指正常工作发动机的整机振动。如果发动机出现故障(例如,振荡燃烧、失速或喘振、失稳、碰摩 ……),则显然其相应的特征分量将也是主要分量。同时,若振动谱是用的加速度谱,则某些高频分量,例如涡轮转子与压气机工作叶片的经过频率也可成为主要分量。

据统计,一般航空发动机整机振动速度的主要分量在 10 ~ 50mm/s 之间。各个主要分量的幅值相差约为 1.5 ~ 3 倍。但是各个主要分量的振动位移幅值或加速度幅值相差可达几百倍。

沿发动机的长度方向,振动是不相同的。在最低的频率下,振型的影响是主要的。随着振动频率的增大,发动机的振动传输性不好的特点,即振动在振源区的局限作用也越明显。例如,在发动机前部的转子源振动,经常主要决定于压气机的不平衡量;而在后部的决定于涡轮的不平衡量。

减小承力机匣刚性,增大外部尺寸,转子 - 支承系统复杂(如多转子),都会使振动的局限作用更甚(振动传输性更差)。在高频振动时,局部作用表现得特别明显。例如,风扇源振动强烈地出现在发动机的前部,而在后部几乎没有。

参 考 文 献

[1] 顾家柳等编著.转子动力学.北京:国防工业出版社,1985.

[2] Vance J M. Rotordynamics of Turbomachinery. New York: John Wiley & Sons, 1988.
[3] 伽西,非莜耐著.转子动力学导论.北京:机械工业出版社,1986.
[4] 钟一谔等编.转子动力学.北京:清华大学出版社,1987.
[5] 张文编.转子动力学理论基础.北京:科学出版社,1990.
[6] Yim K B. Load - Induced Rotordynamic Instability in Turbomachinery. Ph D. Dissertation in Mechanical Engineering, Texas A&M Univ, 1984.
[7] Shigeo Yanaba and Akigoshi Tamura. Vibration of a Shaft Passing Through a Critical Speed. Bulletin of The JSME, V.14, N.76, 1971, 1050 ~ 1058
[8] 发动机结构完整性大纲.美国军用标准.MIL - STD - 1783, 1984.
[9] 燃气涡轮发动机结构设计准则的研究 - 最终报告.AFAPL - TR - 76 - 104, 1976.
[10] 顾家柳.航空发动机的整机振动.航空科技, HK - 80007, 1980.
[11] 航空涡轮发动机结构完整性大纲.1995.
[12] Barrett L E et al. Optimum Bearing and Support Damping for Unbalance Response and Stability of Turbomachinery. J. of Eng. for Power, 1978, 89 ~ 94.
[13] Wettergren H L. Dynamic Instability of Composite Rotors. Proceedings of The 4th International Conference on Rotordynamics, IFToMM, Chicago, USA, 1994, 287 ~ 292
[14] Hibner D H et al. Analytical and Experimental Investigation of the Stability of Intershaft, Squeez Film Dampers, Part I: Demonstration of Instability. J. of Eng. for Power, 1977, 47 ~ 52
[15] Gunter E J et al. Dynamic Characteristics of a Two - Spool Gas Turbine Helicopter Engine. Proceedings of The Conference on Stability and Dynamic Response of Rotors with Squeez Film Bearings, Charlottesville, USA, 1979.
[16] Collacott R A. Mechanical Fault Diagnosis and Condition Monitoring. Chapman and Hall Ltd, 1977.
[17] Sohre J. Operating Problems with High Speed Turbomachinery, Causes and Corrections. Sawyer's Turbomachinery Maintenance Handbook, Vol: Ⅱ, Turbomachinery Publications, 1980.
[18] 洪杰.轴流叶轮偏心旋转引起的自激力和稳定性研究.博士论文,北京航空航天大学,1994.
[19] 秦卫阳,顾家柳.迷宫式密封装置气弹力的计算.航空动力学报, V.9, N.2, 1994, 117 ~ 119
[20] 顾家柳等.螺桨转子的颤振涡动.航空学报, V.13, N.8, 1992, B362 ~ B369

第2章 计算模型的建立和刚度计算

2.1 建立转子－支承－机匣系统计算模型的一般方法

转子－支承－机匣系统包括了发动机的各种重要零件：叶片、轮盘、轴、鼓筒、轴颈、轴承、轴承座、轴与轴及轴盘之间各种连接件、支承着转子系统的机匣及支板等。因此，建立其计算模型的关键是如何建立以上这些零件的力学模型。如果这些零件的力学模型与实际相差甚远，将会使动力特性分析结果产生很大的误差；但是由于转子－支承－机匣系统包括了发动机上绝大多数零件，如果对每个零件都严格按“精确”模型处理，则整个系统的自由度数、所需机时及内存以及数据准备工作量将很大，甚至可能使计算分析无法实现。本章结合工程实际中的常见结构，重点阐述套齿、端齿等连接件、弹性支承及轴、机匣本身的力学模型的建立。

质量、刚度、阻尼是影响动力特性的主要因素，也是建模中的主要参数。通常叶片、轮盘可视为具有回转效应（计及转动惯量）的“刚体”，可以简化为集中质量与转动惯量，作用在其质心上。但是对展弦比较大的风扇叶片、螺旋桨桨叶、旋翼或轴向尺寸较小的薄盘等，则还应考虑其柔度的影响，不宜再视其为刚体而应视为弹性体。此时的力学模型比刚性叶片及刚性盘的模型要复杂得多，并需求解叶片－盘－轴三者全弹性体耦合振动问题。

轴及轴上的小零件，如轴套等，可划分为若干轴段，将其质量集中作用在相应节点上，而轴段将成为无质量有弹性的轴段；更准确的作法是将其处理为分布质量轴段，此时轴段既有质量又有弹性，既能考虑轴的回转效应影响又能考虑刚度影响。轴大多采用梁单元来模拟，在分析转子横向振动时需考虑轴的弯曲刚度、拉伸刚度、回转效应及剪切变形影响。在分析转子扭转振动时还需考虑扭转刚度。因此轴的力学模型可以描绘为具有分布质量，其两端端节点具有垂直、水平（及轴向）位移及相应转角等8个（或12个）自由度的弹性梁。具体作法参见第3章“转子－支承系统临界转速和应变能分布计算方法”及《航空发动机设计手册》第18册“叶片轮盘主轴强度分析”第12章“主轴振动分析”。

支承着转子系统的机匣及支板，如果其本身属薄壁结构并具有较大弹性，例如某些涡轴涡桨发动机中压气机及涡轮机匣的壁厚只有2 mm，则应考虑机匣柔性对转子振动的影响，即应按转子机匣耦合振动建模。此时宜将机匣简化为截锥壳元或曲面壳元，支板简化为板单元、曲面壳元或弹簧，有的分析方法，如传递矩阵法，则直接将机匣简化为梁。如果机匣及支板的厚度较大，例如铸造机匣，则可认为转子支承在刚性支座上，不需虑及机匣的影响。具体作法参见第3章及《航空发动机设计手册》第17册“载荷及机匣承力件强度分析”第11章“机匣振动分析”。

转子之间的连接件可简化为一弹簧或中间铰或刚性连接。涡桨、涡轴发动机转子常采用端齿相连，这种连接结构可采用“端齿梁元”来模拟，采用有限元素法直接算出端齿刚度，或先将端齿梁元视为普通梁元，然后将普通梁元的刚度乘以考虑端齿影响的折减系数后作为端齿梁元的刚度。

轴承及轴承座视具体情况可简化为刚性铰支、固支或具有一定阻尼的弹性支承。结构本身的结构阻尼、材料阻尼等均很复杂，但数值很小，一般情况下不予考虑，但油膜阻尼等外阻尼对

转子动力特性影响较大，应考虑其影响。

2.2　一般连接件的力学模型

发动机转子之间的连接件即联轴器，是连接两轴、传递运动与功率的一种装置。能将两轴刚性地连成一体的称为“刚性联轴器”；不仅传递扭矩、轴向力、径向力，并允许转子轴线之间有一定偏斜角，在两轴不同心时仍能保证转子良好工作的联轴器称为“柔性联轴器”，该类联轴器可以起到补偿两轴相对位移及减振作用。

刚性联轴器有套齿式联轴器、套筒式联轴器、凸缘螺栓式联轴器等。柔性联轴器有套齿式联轴器、端齿联轴器、万向联轴器、链条联轴器及带有非金属弹性元件的橡胶块（环）式、尼龙绳式或带有金属弹性元件的弹簧式、叠片式、波纹管式联轴器等等。下面仅针对航空发动机中常见联轴器进行分析。

2.2.1　套齿、花键联轴器的力学模型

(1) 刚性套齿联轴器

图 2－1 为 WP7 发动机高压转子刚性套齿联轴器。涡轮转子与压气机转子通过套齿传扭，两者间定心靠 A、B 两圆柱面。两轴相配合的轴头均为锥体，在 88.3 kN 轴向力的夹紧下用大螺母将两轴刚性地连在一起。其他的发动机，如 J85、JT9D、PW2037、PW4000、V2500 等，其高压转子也采用刚性套齿相连，不过并不像 WP7 发动机那样都采用锥面夹紧。

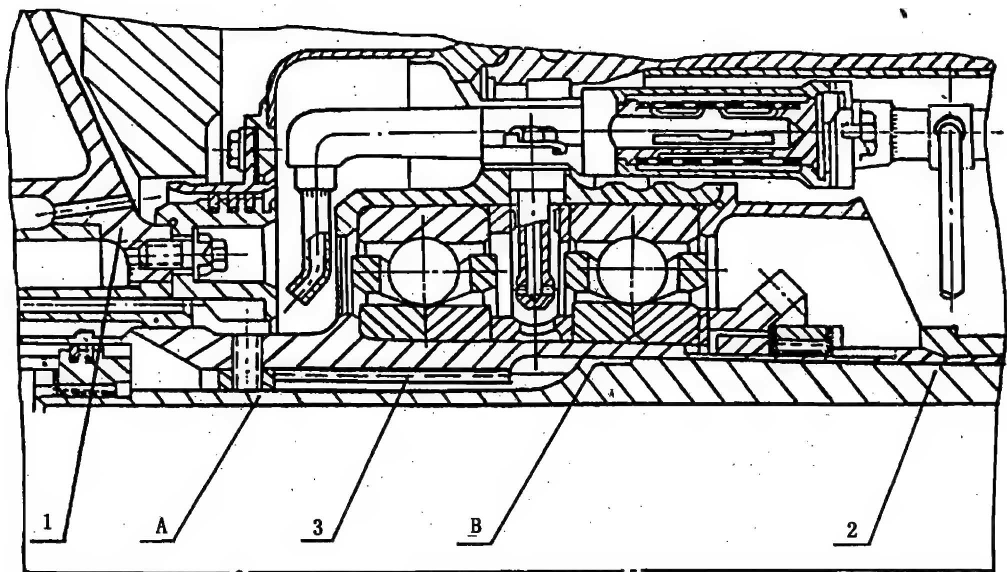


图 2－1　WP7 发动机高压转子刚性套齿联轴器

1— 压气机后轴；2— 涡轮轴；3— 套齿

这种刚性套齿联轴器，除传递扭矩外，还传递轴向力、径向力、弯矩，且两根轴互相啮合的节点处的力、位移及转角均完全相同。由于它“刚性”地将两轴相连，因此对它不需单独建模，

在分析转子动力特性时可以直接将两轴视为无连接件的一根轴。

(2) 带有球形接头的柔性套齿联轴器

WP8 发动机压气机与涡轮转子之间采用了带有球形接头的柔性套齿联轴器,如图 2-2 所示。

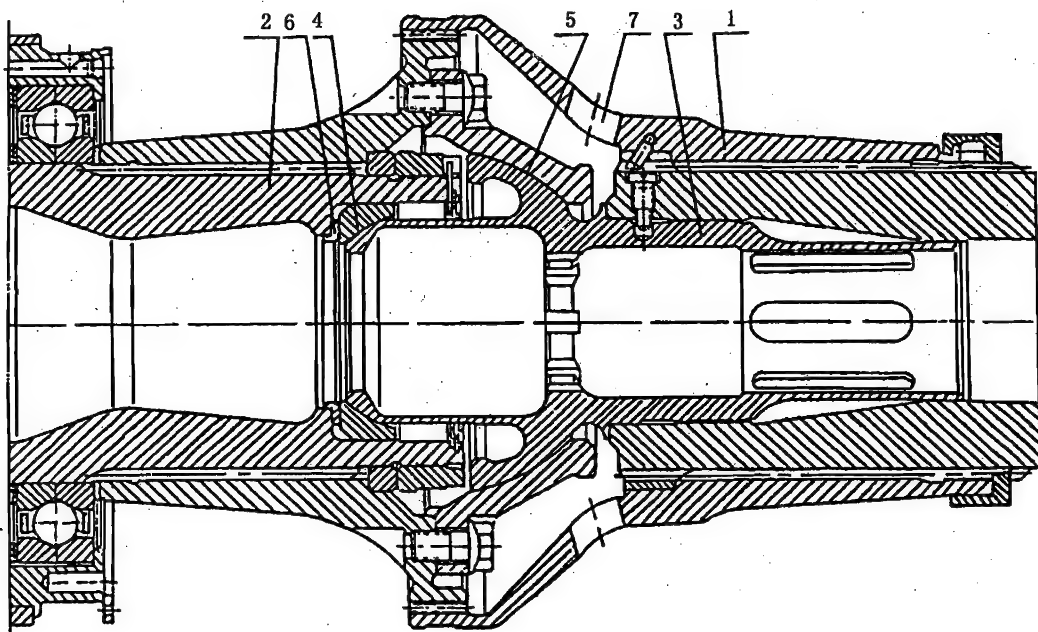


图 2-2 WP 8 发动机柔性套齿联轴器

1— 涡轮轴;2— 压气机后轴颈;3— 球头短轴;4— 小球面;5— 大球面;6— 调节垫;7— 喷油孔

该类联轴器中采用了球心在同一点上的半径不同的两个球面,且球心落在套齿中分线上,涡轮轴的扭矩通过主动套齿即轴前端的内套齿传给装于压气机后轴颈上的从动套齿即轴后端的外套齿;涡轮轴向后的轴向力通过用螺纹连到涡轮轴轴头的带有球头的短轴 3 传至用螺钉固定到从动套齿上的球头盖上,涡轮轴前端的径向力也是通过短轴 3 上的球面传至压气机后轴颈的。

这种联轴器不仅传递扭矩、轴向力、径向力,而且还可视为涡轮转子的支点。这种连接结构可允许两轴线有较大偏斜角,如 WP8 发动机两轴间最大偏斜角可达 1′8.4″,因此基本上不传弯矩或只能传一部分弯矩,要视具体情况而定。在作转子弯曲振动分析时视具体情况可简化为"铰接式"模型(不传弯矩时)或具有一定刚性的"弹簧"(传递部分弯矩时)。在作扭转振动分析时可简化为扭转弹簧。

(3) 带有半球形接头的柔性套齿联轴器

WP6 发动机采用了带有半球形接头的柔性套齿联轴器,如图 2-3 所示。它与图 2-2 带球形接头联轴器的不同之处在于球心偏离套齿中分线。为适应两轴较大偏斜角 1′18″,套齿侧面啮合间隙较大,为 0.1 ~ 0.2 mm。

该类联轴器除传扭、传轴向力外,也传递径向力。涡轮轴扭矩直接通过轴头上的外套齿传至与它啮合的压气机后轴颈内套齿上,涡轮轴的轴向力与径向力通过半球形球头联轴器传至

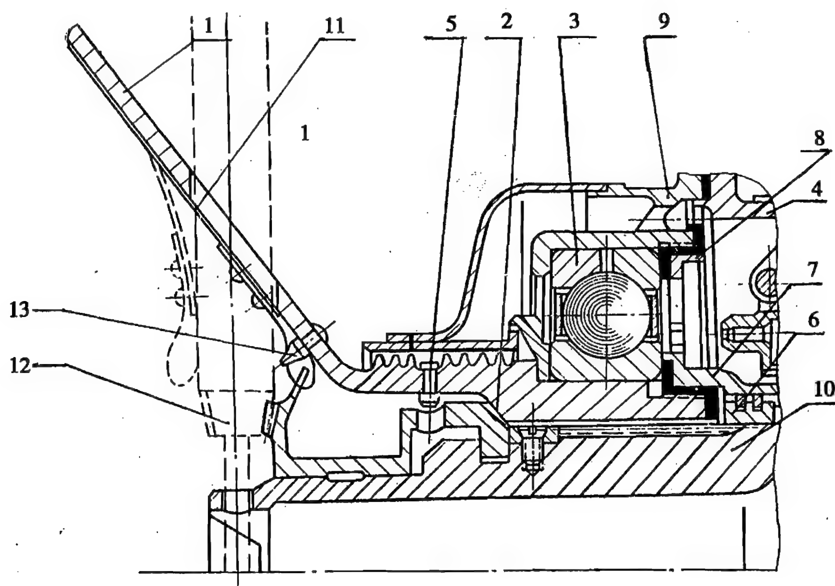


图 2-3　WP6 发动机柔性套齿联轴器

1—压气机后轴颈；2—球头联轴器；3—滚珠轴承；4—涡轮轴机匣；5—限动销钉；
6—封油环；7—螺帽；8—螺帽；9—中轴承座；10—涡轮轴；11—弹簧锁片；
12—装拆工具；13—锥形头销钉

压气机后轴颈的球窝上。简化的计算模型与第(2)种类同。

(4) 具有浮动球形垫圈的柔性套齿联轴器

WP7 发动机低压转子采用了具有球形垫圈的柔性套齿联轴器，如图 2-4 所示。

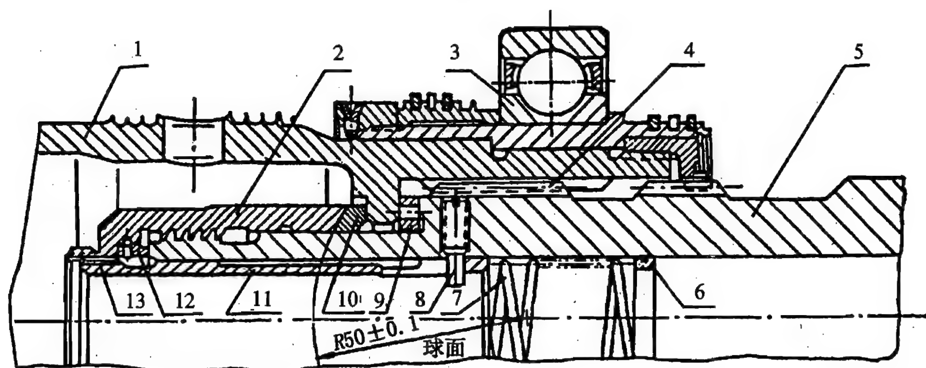


图 2-4　WP7 发动机低压转子柔性套齿联轴器

1—低压压气机轴；2—球形螺帽；3—低压止推轴承；4—套齿；
5—低压涡轮轴；6—弹簧座；7—弹簧；8—止动螺钉；9—调整垫；
10—球形垫圈；11—保险衬套；12—调整垫；13—套齿

它与前两种不同之处在于球形结构并未定心在涡轮轴或压气机轴后轴颈上，而是浮动于两轴间，成为浮动球形垫圈 10。这种结构更能适应两轴线间的偏斜角，如该联轴器的偏斜角为

7′47″,侧向啮合齿隙为0.18 ~ 0.31 mm。该浮动结构保证了涡轮转子沿球面偏斜时不受约束。在发动机不工作时,涡轮轴径向力直接通过套齿传至压气机后轴上;发动机工作时,涡轮径向力通过端面摩擦阻力传至压气机轴上。因此该类结构与第(2)种及第(3)种一样既能传扭、传轴向力,也能传径向力,但传递弯矩能力比前两种更差。简化计算模型与前两种类同。

(5) 浮动式柔性套齿联轴器

在4支点的发动机支承结构中,考虑到两个转子的4个支点很难保证同心,采用了所谓浮动套齿联轴器,如图2-5所示。

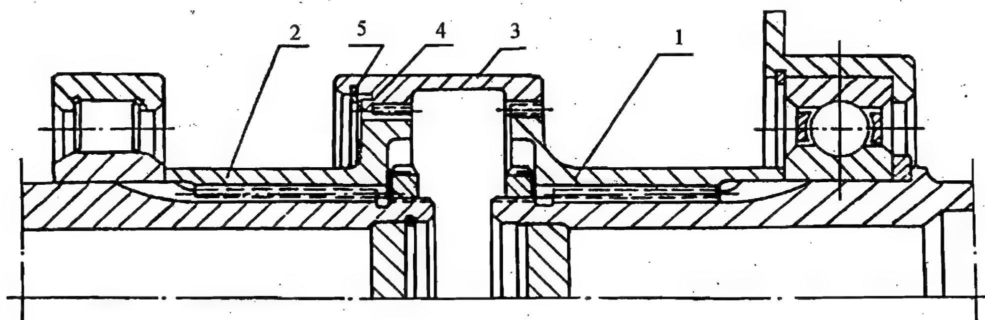


图2-5 浮动套齿联轴器

1—主动衬套;2—从动衬套;3—套齿衬套;4—定位凸环;5—弹簧卡圈

该结构中,涡轮轴与压气机轴颈上的套齿分别与主动套齿衬套1及从动套齿衬套2相连,而浮动的套齿衬套3松动,自由地套在两衬套的外套齿上。当两轴不同心时利用套齿间大的侧向间隙来补偿。这种联轴器仅传递扭矩,可简化为"中间铰"的力学模型。

2.2.2 螺栓连接件的力学模型

短螺栓连接是现代发动机上广泛采用的一种连接结构,如图2-6所示。这种连接形式在

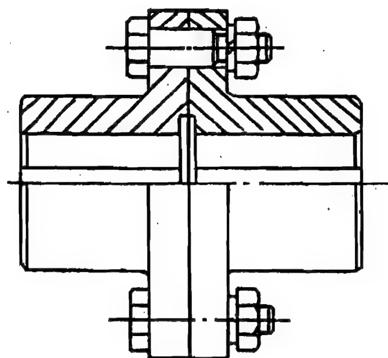


图2-6 凸缘联轴器

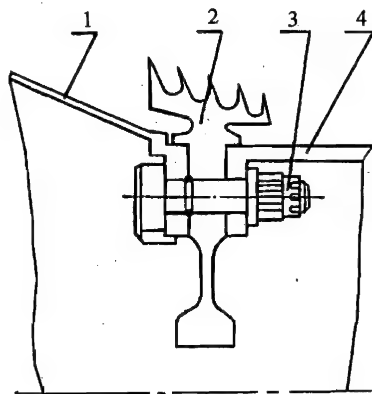


图2-7 CFM56发动机高压转子联轴器

1—压气机后轴;2—封严盘;

3—自锁螺母;4—涡轮轴

机械设计中称为凸缘联轴器,它将两轴刚性地连在一起,保证两轴精确对中,一般采用圆柱面定心,紧度配合,靠摩擦和剪切共同传扭。

CFM56发动机高压转子采用了如图2-7所示短螺栓联轴器。压气机后轴与涡轮轴分别与封严盘的前、后端面接触,三者间用短螺栓相连。RB211等发动机上也采用了这种连接形式。

在分析转子动力特性时,当这种连接采用紧度配合,并且这种螺栓联轴器的刚度相对轴的刚度较大时,可将其简化为"刚性连接模型",类同2.2.1的(1)情况。但在有条件时,这种螺栓联轴器更准确的计算模型可视为柔性弹簧,其弹簧刚度主要由试验确定。

2.2.3 叠片联轴器的力学模型

在直升机传动轴系上或发动机试车台上及有关试验器上,经常使用一种称之为"叠片联轴器"的结构形式。它又称为膜片联轴器,采用一种厚度很薄的弹簧片(0.2 ~ 0.5mm)叠合而成,膜片可制成圆环形、多边形等各种形状,用螺栓将它们分别与主动轴及从动轴上的法兰盘相连接,法兰盘通过主动螺栓传递载荷给叠片组,叠片组将载荷传递给从动螺栓,再传递给从动法兰盘。图2-8为叠片联轴器结构形式。

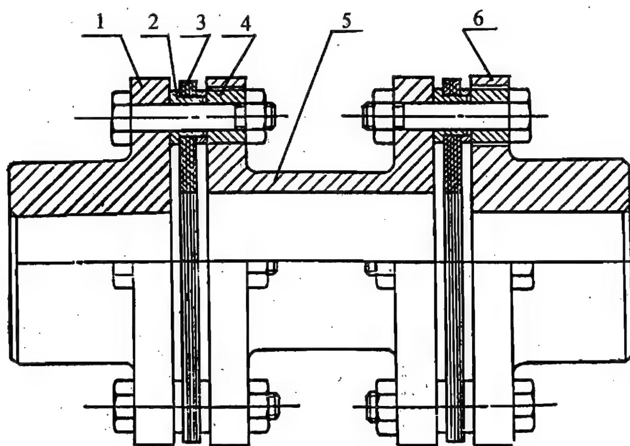


图2-8 叠片联轴器

1—法兰盘;2—衬套;3—膜片;4—垫圈;5—中间轴;6—法兰盘

这种联轴器具有轴向、角向、径向不对中的补偿能力,有时轴向补偿可达10mm,角向补偿可达1°。其计算模型可简化为具有扭转刚度、轴向刚度、径向刚度及角向刚度的"弹簧",这些刚度的计算方法将在本章2.6.3中进行专述。在方案设计初始阶段,当无法提供叠片的有关设计数据而又需对转子进行动力特性计算分析时,可以粗略地将叠片联轴器简化为"中间铰"。

2.2.4 其他连接件

以上所述套齿、螺栓、叠片及下面将述的端齿连接都属可分解式连接。发动机中还经常采用不可分解式连接方式,销钉连接就是其中一种。图2-9示出了WP7发动机涡轮轴与盘之间销钉连接形式。在该结构中盘轴间采用一圈径向销钉定心,剪切传扭,盘轴间采用紧度配合,销子与盘之间也采用紧度配合。

随着焊接技术的发展,现代先进发动机转子中采用焊接式连接结构也越来越多,例如在盘与轴之间或盘与安装边之间等。图2-10是RB199发动机焊接结构。该发动机的高压涡轮轴与涡轮盘之间采用了电子束焊。质量好的电子束焊的焊接强度可达基体强度的90%。

焊接属不可分解式连接方式,只是对局部强度有影响,而对转子动力特性基本上无影响,因此在建模时将这些连接件与基体视为一体,不考虑焊接连接对动力特性的影响。

除以上所述发动机上常用的联轴器外,在发动机转子试验器上还经常用到以下形式联轴器,如图2-11、图2-12、图2-13所示。

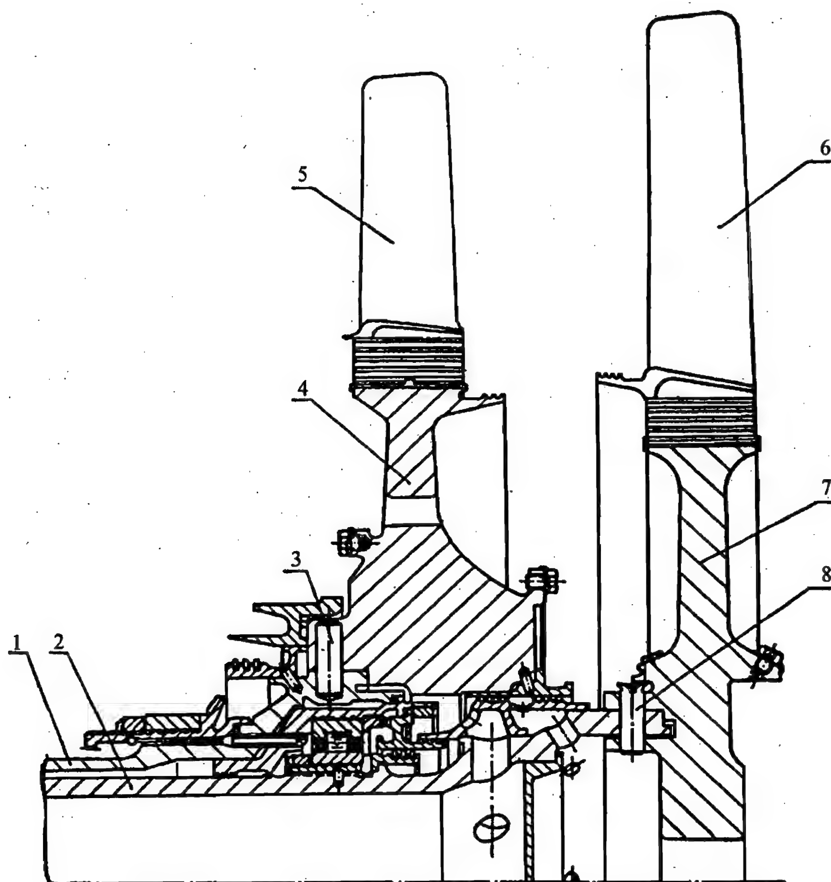


图 2-9 WP7 发动机涡轮轴与盘之间销钉连接结构

1— 高压涡轮轴;2— 低压涡轮轴;3— 销钉;4— 第一级盘;
5— 第一级转子叶片;6— 第二级转子叶片;7— 第二级盘;8— 销钉

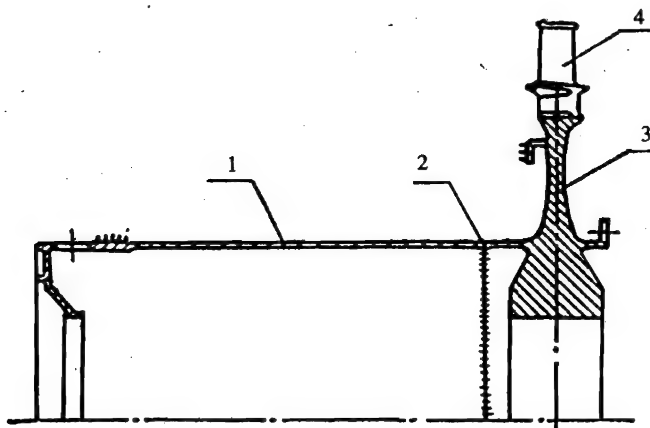


图 2-10 RB199 发动机盘轴焊接的高压涡轮转子

1— 涡轮轴;2— 电子束焊处;3— 涡轮盘;4— 叶片

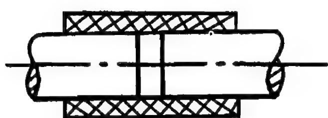


图 2－11 纱布橡皮管式联轴器

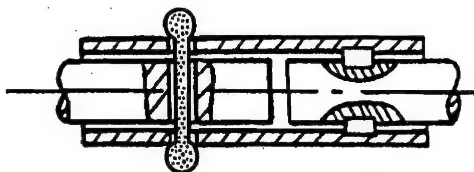
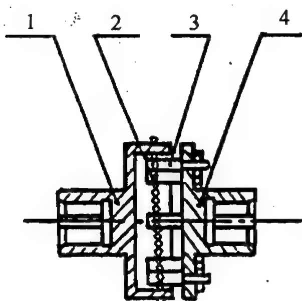


图 2－12 简单尼龙绳式联轴器



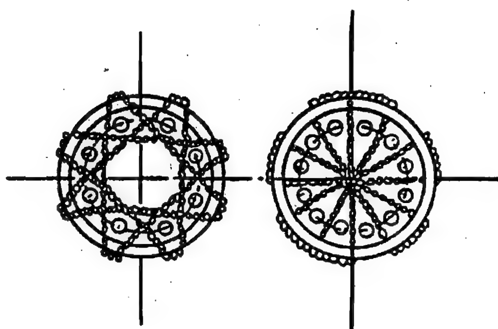


图 2－13 拨销式尼龙绳联轴器

1— 转接轴；2— 尼龙绳；3— 销子；4— 转接轴

纱布橡皮管式联轴器适用于功率不大的转子，柔性较大，既可传递扭矩，又可减小对转子运动的干扰，但不结实，需经常更换。尼龙绳结实、柔软，试验器上常用到这种形式。简单尼龙绳式联轴器结构简单，拨销式尼龙绳联轴器工作时通过尼龙绳带动销子，又允许两法兰盘相互倾斜错动，结构稍复杂些，在防止对转子的干扰方面效果更好。该三种联轴器只传递扭矩，不传递别的力，可以简化为“中间铰”模型。

2.3 轴向预紧端齿连接件的力学模型

现代中小型航空涡桨涡轴发动机，多已采用轴向预紧的端齿连接结构。这种结构的转子系统不是一个整体结构，而是通过端齿（圆弧端齿）把压气机、涡轮等各个转动部件连接起来。为保证各部件正常相连而不松散，整个转子用一根或二段中心拉杆施加轴向预紧力而紧压在一起。端齿连接具有传扭性能好、装卸方便、容易定心等优点。但由于其非整体性及随转速而变化的很大的轴向力，必然影响其动力特性。端齿结构示意图见图 2－14，用端齿相连的转子示意图可参见图 2－46。

文献[1]根据端齿连接特点，提出了“端齿梁元”的概念。取一含端齿的轴段（图 2－14）作为分析模型。考虑到端齿连接的接触传力特点，采用解决固体接触问题的三维有限元分析方法，在轴段端面按梁理论变形的前提下，进行端面承受单位位移或单位力情况下的有限元分析。由该有限元分析结果，可得出梁元型刚度矩阵中绝对值不同的四组刚度系数的数值。利用

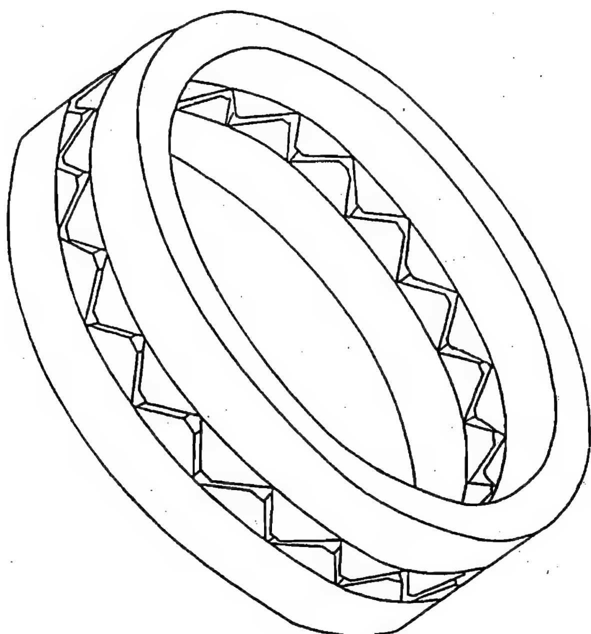


图 2-14 端齿轴段示意图

梁元平衡方程及整体梁元刚度系数的解析解和有限元解，最后通过单系数法或双系数法修正确定端齿轴段的梁元型刚度矩阵中的四个"基本"刚度系数，从而得到端齿梁元的刚度矩阵。文献[1]对模拟转子及现有的多台发动机的20对端齿刚度进行了分析和计算，计算结果表明，端齿的存在对于局部区域的刚度削弱较明显，端齿梁元的刚度系数大致为相应整体梁元刚度系数数值的25%～60%。但由于端齿梁元的轴向长度在全转子轴向尺寸中占的比例很小，因此考虑端齿影响后，转子固有频率降低大致在10%以内。

对于该类端齿连接转子，由于端齿连接的结构特点，需对转子施加较大的轴向预紧力才能将转子连成一体，这也是该类转子与普通转子的显著不同之处。因此在建立端齿力学模型时，必须考虑这一重要因素。文献[1]中着重考察了随转速变化的转子离心力对于轴向力的影响。在建立分析模型时，将整个转子简化为一循环对称结构，不保留各转子叶片，而是将叶片离心力施加于各级轮盘上，各处端齿用齿牙数彼此相同的端齿代替，但各处端齿齿牙的"锥度"仍与真实齿牙一样。分析方法也采用处理固体接触问题的三维有限元分析技术，但还利用了循环对称关系及循环对称接触关系，从而可分析一级或多级转子的一个基本段。利用给定转速下离心力引起的端齿齿牙上接触力的数值或中心拉杆上轴向应力的数值，可以算出表征转速对于轴向力影响的影响系数 α。考虑到离心力与转速平方成正比，从而可以由该影响系数及初始轴向预紧力得到任一转速下的轴向力数值(参考文献[12])：$H(\omega) = H_0 + \alpha\omega^2$(这里 ω 为自转速度，H_0 为初始轴向预紧力，$H(\omega)$ 为转速 ω 下的轴向力)。

综上所述，端齿连接件力学模型可以综述如下：端齿连接件可视为具有一定刚度的端齿梁单元，而该梁单元刚度小于普通的整体梁单元刚度，其所受轴向力是随转速而变化的。

2.4 支承的力学模型

(1) 轴承

在分析转子横向弯曲振动特性时,只需考虑滚动轴承径向刚度的影响。当转子的刚度比轴承刚度小得多的时候,可视轴承为“刚性铰支”;若转子刚度及轴承座的刚度大于轴承刚度或与其数量级相当时,则轴承刚度对转子动力特性有显著影响,此时不能再视为“刚性铰支”,而应处理为具有一定弹性的弹簧。

(2) 弹性支承

发动机中常用的弹性支承有鼠笼式、拉杆式、弹性环式(单环式、多环式)。某些涡桨发动机转子上及某些试验器上还经常用到非金属弹性支承,如橡胶支座等。弹性支承的刚度对转子动力特性影响很大,其简化模型为典型的“弹簧”。

(3) 带挤压油膜的弹性支承

为了有效减振,发动机在采用弹性支承的同时往往还要加入挤压油膜,这种支承的力学模型是一种弹簧与阻尼器的组合,需考虑油膜刚度。

2.5 工程转子建模实例

转子 - 支承系统由支座、连接件、叶片、盘、轴等组成。前面已阐述了这些构件的力学模型的建立方法,要建立转子 - 支承系统的力学模型,只需将它们进行组合即可,具体建模过程在下面的算例中详述。

例 1:某机高低压转子系统动力特性计算模型

该机结构示意图示于图 2 - 15。

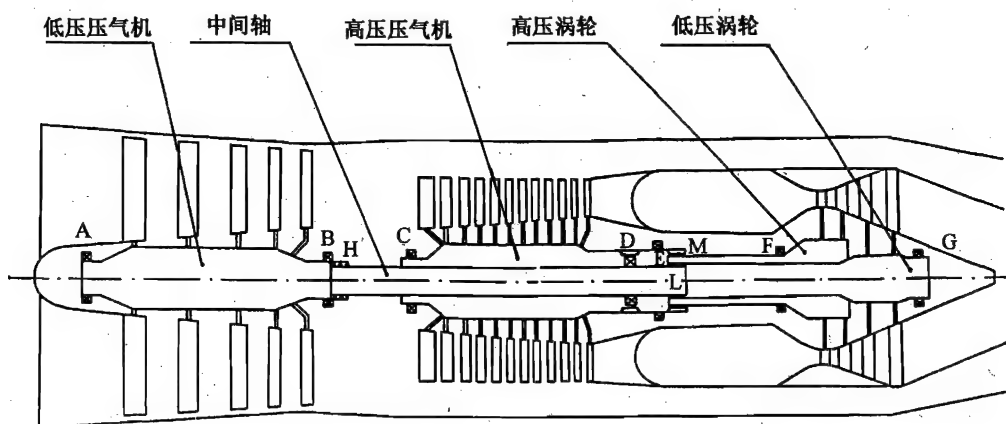


图 2 - 15 某发动机结构示意图

它的转子系统由高低压轴系的五个转子组成,即由低压压气机转子、中间轴、低压涡轮转子组成的低压轴系以及由高压压气机转子、高压涡轮转子组成的高压轴系。它们分别支承在A、B、C、D、E、F、G七个支承上。H、L、M三处均为套齿。低压转子的止推支点D为中介支点,其载荷通过高压转子止推轴承E外传,其余各支点的载荷直接通过机匣等承力构件外传。除B、C两

处外,其余支承均为弹性支承。低压压气机转子有5级,高压压气机转子共有12级,高低压涡轮转子各有2级。简化的计算模型示于图2-16。

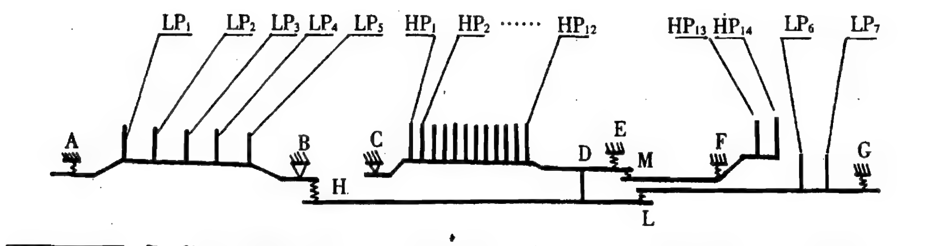


图2-16 某发动机转子系统计算模型

建模方法如下:

(1) 转子轴采用梁单元;

(2) 求出各级叶片及盘的质量及转动惯量,以集中质量形式作用在其质心上,更简单的作法(在方案设计阶段)是直接作用在各盘的中心上;

(3) B、C简化为刚性铰支支点,A、E、F、G为弹性支点,它们直接支承在机匣等承力件上;H、M、L套齿简化为弹性耦合界面,其耦合刚度由套齿刚度决定;D为中介支点,可简化为刚性耦合界面。

例2:某机水平尾轴动力特性计算模型

某机水平尾轴结构简图及计算模型示于图2-17。

它是一直径为32mm、长4.36m的细长结构。前后轴段通过叠片联轴器B相连,左、右两端通过叠片联轴器A、C分别与别的轴相连。尾轴后段支承在1# ~ 5# 五个支承上,为了减振,五个轴承外环上均套有橡胶减振套,其结构形式参见图2-53。

1# ~ 5# 支承可简化为弹性支承,其刚度由轴承及橡胶减振套刚度组合而成,可由计算或试验获得。文献[18]给出了1# ~ 5# 支承刚度实测值,分别为1954N/mm、1954N/mm、1888N/mm、1993N/mm和1863 N/mm。叠片联轴器A、B、C可简化为弹簧,当然对图2-17的计算模型来说,因A、C联轴器靠近轴端,因此只有联轴器B对该轴系动力特性影响较大。

2.6 连接件刚度的计算方法

刚度是指产生单位位移(或转角)所需的力(或力矩),因此它包括线刚度和角刚度。柔度则是刚度的倒数,即施加单位力(或力矩)所产生的位移(或转角)。

2.6.1 套齿、花键刚度计算

在转子横向弯曲振动分析模型中,套齿联轴器被模拟为轴系的一个特殊轴段。套齿联轴器刚度包括横向刚度(lateral stiffness)及角向刚度(angular stiffness),所谓横向刚度是指通过轴的中心线的直径方向刚度,所谓角向刚度是指正交于轴中心线的转动,但不是扭转刚度。本节仅给出套齿横向刚度估算式。

(1) 主要假设条件

轴本体是刚硬不变的,也就是说联轴器的位移完全来自于在刚性支承(指轴本体)上齿的

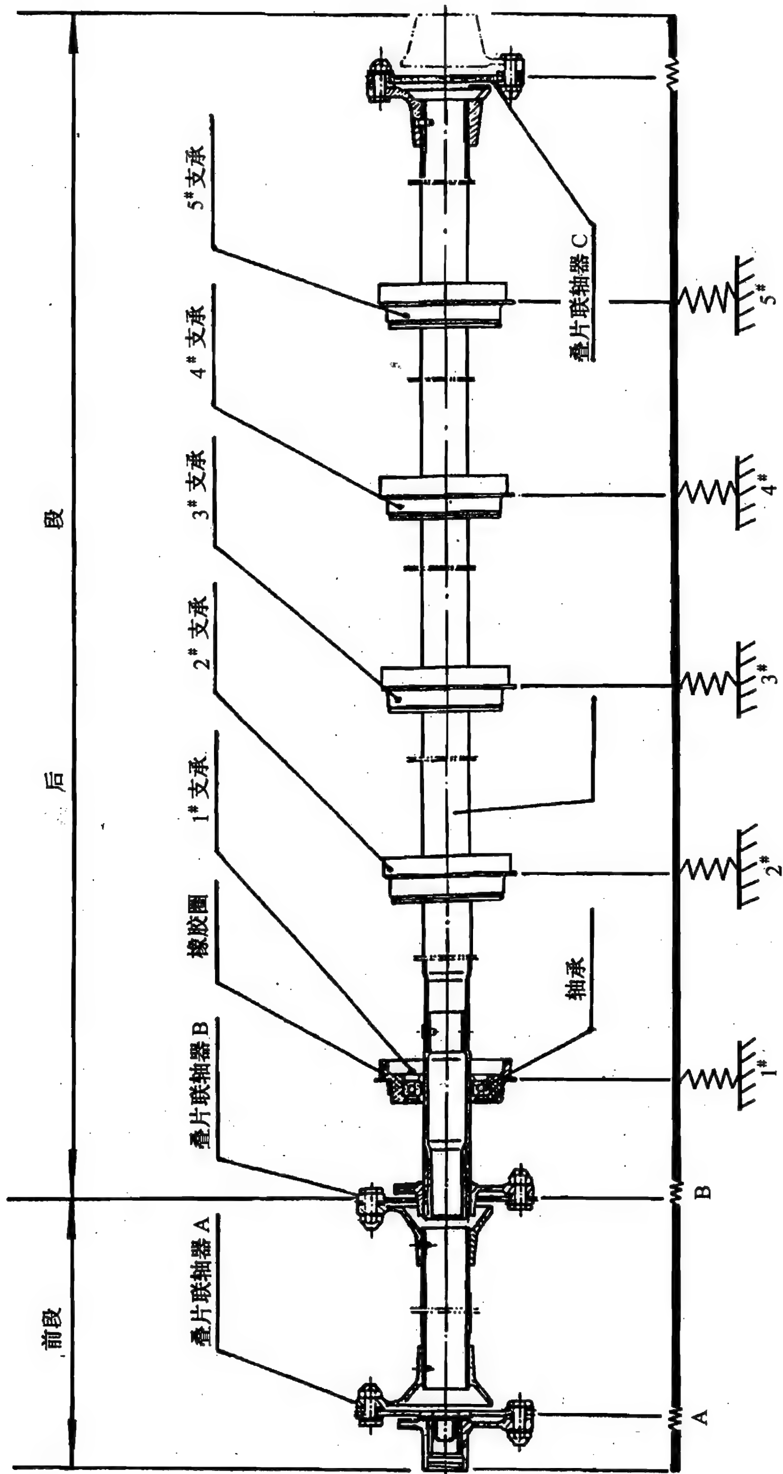


图 2－17　某机水平尾轴结构简图及计算模型

位移；所有位移很小，且所有变形为弹性变形；齿的装配误差及型面误差均较小，每一对齿为线性接触状态，且承受相同载荷；忽略摩擦力矩。

(2) 套齿啮合状况及几何参数

套齿的典型啮合状况为侧面啮合及径向啮合两种，如图 2-18 所示。侧面啮合是指外套齿（阳键）与内套齿（阴键）侧面相接触。径向啮合是指外套齿的齿顶与内套齿的齿根相接触，也就是外套齿齿顶主直径圆与内套齿齿根主直径圆是重合的，所以也叫主直径啮合。

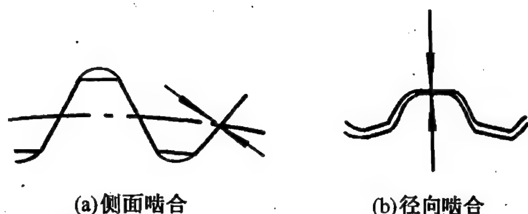


图 2-18 套齿的典型啮合状况

单个齿可视为由具有均匀横截面的 m 个受载微齿段组成，其模型示于图 2-19。

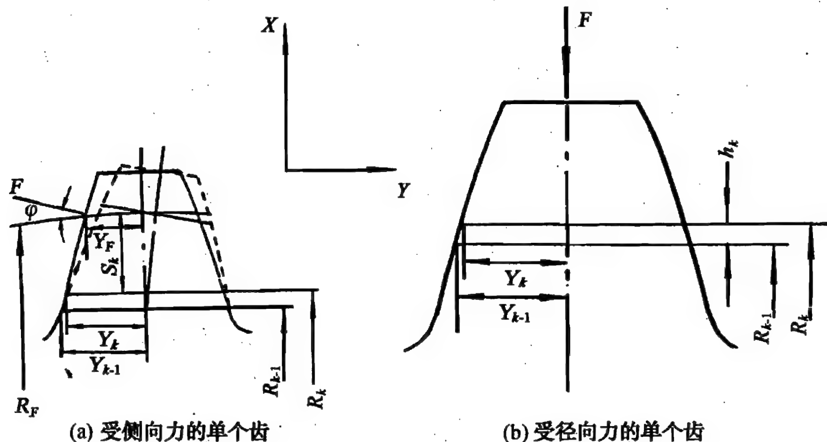


图 2-19 单个齿模型

图2-19中，φ 为接触角，F 是对一对齿施加的任意载荷，对于侧面啮合情况假设它以集中力形式沿法向作用于节圆上，对于径向啮合情况假设它以集中力形式垂直作用于齿顶中心线上。设 L 为齿长度，Y_k 及 Y_{k-1} 为第 k 微齿段上、下表面半齿宽，R_k 及 R_{k-1} 为第 k 微齿段上、下表面半径，R_F 为力 F 的作用点的半径。齿段面积、惯性矩等参数分别由以下计算式求出：

第 k 微齿段上、下表面平均面积 $A_k = L(Y_k + Y_{k-1})$；

第 k 微齿段截面惯性矩 $I_k = \frac{1}{3}L(Y_k^3 + Y_{k-1}^3)$；

第 k 微齿段高度 $h_k = R_k - R_{k-1}$；

第 k 微齿段上表面到节圆距离 $S_k = R_F - R_k$。

为了考虑泊松效应，还需对套齿材料弹性模量进行修正，采用以下修正式：

$$E_\mu = \frac{E}{1-\mu^2}$$

式中，E、μ 分别为套齿材料的弹性模量及泊松比，E_μ 为修正后的弹性模量。

以上几何参数各计算式均可用于齿上渐开线部位及齿根部位的每个齿段。

(3) 单个齿的刚度

a. 切向刚度

对图2－18(a)所示侧面啮合状况,单个齿模型示于图2－19(a)。先求出该模型由单位载荷引起的位移即柔度,再求其倒数则可得到刚度。其位移分别由弯曲、剪切、支座(轴本体)弹性、材料屈服挤压四种机械变形引起。一般情况下,由于轴本体弹性引起的变形较小,仍可采用前面的关于"刚性支承"的假设,不需修正,另外在一般情况下也不需考虑材料屈服挤压情况,因此本文不考虑后两种机械变形,仅考虑前两种主要变形,即弯曲变形及剪切变形。

(a) 弯曲变形

设第 k 段内任意一点 c 的弯曲变形为 f_{bk},利用莫尔定理,f_{bk} 可由下式求出:

$$f_{bk}=\int_0^{h_k}\frac{M(x)M^0(x)}{E_\mu I_k}\mathrm{d}x \tag{2-1}$$

式中:$M(x)$ 表示 c 点的总弯矩;$M^0(x)$ 为单位力产生的弯矩,分别由下式求出:

$$\begin{cases}M(x)=F[(S_k+x)\cos\varphi-Y_F\sin\varphi]\\M^0(x)=(S_k+x)\cos\varphi-Y_F\sin\varphi\end{cases} \tag{2-2}$$

以式(2－2)代入式(2－1)经整理得

$$f_{bk}=\frac{F}{E_\mu}\Big[\frac{\cos^2\varphi}{3}\cdot\frac{h_k}{I_k}(h_k^2+3S_kh_k+3S_k^2)-Y_F\cos\varphi\sin\varphi\frac{h_k}{I_k}(h_k+2S_k)+Y_F^2\sin^2\varphi\frac{h_k}{I_k}\Big] \tag{2-3}$$

设单齿受载微齿段段数为 m,则单齿的总弯曲变形为 $f_b=\sum\limits_{k=1}^{m}f_{bk}$,单齿的弯曲柔度 Δ_b 为

$$\Delta_b=\frac{f_b}{F}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}f_{bk}}{F}=\frac{1}{E_\mu}\Big[\frac{\cos^2\varphi}{3}\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k}{I_k}(h_k^2+3S_kh_k+3S_k^2)-Y_F\cos\varphi\sin\varphi\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k}{I_k}(h_k+2S_k)+Y_F^2\sin^2\varphi\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k}{I_k}\Big] \tag{2-4}$$

(b) 剪切变形

设第 k 段内任意一点 c 的剪切变形为 f_{sk},利用卡氏定理,f_{sk} 可由下式求出

$$f_{sk}=\int_0^{h_k}\frac{BQ(x)}{G_kA_k}\cdot\frac{\partial Q(x)}{\partial F}\mathrm{d}x \tag{2-5}$$

式中:G_k 为套齿材料剪切模量;A_k 为截面积;B 为截面形状系数,对于矩形 $B=1.2$,F 为外力,$Q(x)=F\cos\varphi$,将它们代入(2－5)式经整理得

$$f_{sk}=1.2F\frac{h_k}{G_kA_k}\cos^2\varphi \tag{2-6}$$

设单齿受载微齿段段数为 m,则单齿的总剪切变形为 $f_s=\sum\limits_{k=1}^{m}f_{sk}$,单齿的剪切柔度 Δ_s 为

$$\Delta_s=\frac{f_s}{F}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}f_{sk}}{F}=\frac{1.2\cos^2\varphi}{G}\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k}{A_k} \tag{2-7}$$

对一对齿的柔度 Δ_T 进行计算,用下标1和下标2依次表示一对齿中的一个齿及另一个齿,则 Δ_T 为

$$\Delta_T=\Delta_{b1}+\Delta_{s1}+\Delta_{b2}+\Delta_{s2} \tag{2-8}$$

一对齿的切向刚度 K_{Ti} 为

$$K_{Ti} = \frac{1}{\Delta_T} \tag{2-9}$$

b. 径向刚度

对图2-18(b)所示径向啮合状况，单个齿模型示于图2-19(b)，因一对齿的齿顶齿根弯曲曲率相同，不需考虑赫兹接触位移，仅考虑挤压情况。设第 k 微齿段变形为 Δh_k，应力为 σ_k，应变为 ε_k，则有

$$\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{E_\mu} = \frac{\Delta h_k}{h_k} \tag{2-10}$$

设单齿受载微齿段段数为 m，以 $\sigma_k = \dfrac{F}{A_k}$ 代入式(2-10)，得单个齿总变形为

$$\sum_{k=1}^{m} \Delta h_k = \frac{F}{E_\mu} \sum_{k=1}^{m} \frac{h_k}{A_k} \tag{2-11}$$

单齿柔度 Δ_r 为

$$\Delta_r = \frac{\sum_{k=1}^{m} \Delta h_k}{F} = \frac{1}{E_\mu} \sum_{k=1}^{m} \frac{h_k}{A_k} \tag{2-12}$$

单齿径向刚度 K_{ri} 为

$$K_{ri} = \frac{1}{\Delta_r} \tag{2-13}$$

(4) 套齿联轴器的刚度

对于本文分析中所考虑的侧面及径向两种啮合类型的联轴器，其横向刚度是不相同的。求出单个齿的刚度后，求联轴器的总刚度时视每个齿为一单独的弹簧，确定联轴器总刚度的套齿模型示于图2-20。

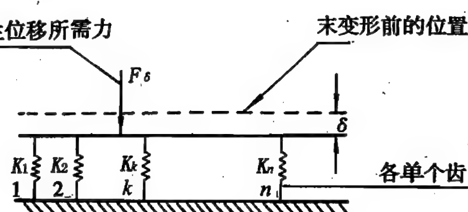
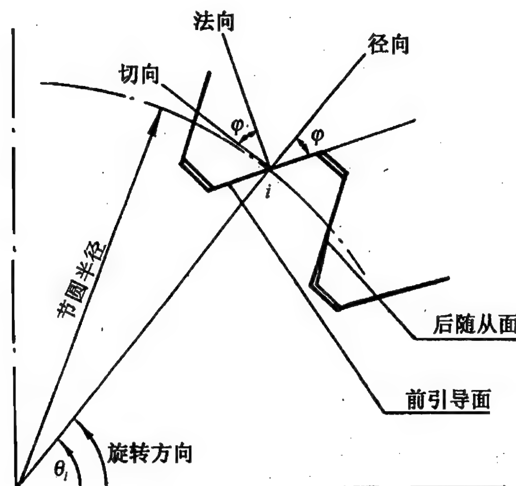


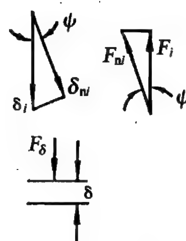
图2-20　确定总刚度的套齿模型

a. 侧面啮合时联轴器横向刚度

侧面啮合的套齿模型示于图2-21。



(a) 齿的几何形状



(b) 力及位移

图2-21　侧面啮合的套齿模型

接触点 i 在节圆线上，由它确定 θ_i 角。图中 F_{ni}、δ_{ni} 分别为接触面的法向力及法向位移。δ_i 为第 i 个齿垂直方向位移，δ 为联轴器垂直方向总位移。

第 i 个齿接触面的法向与垂直方向的夹角 ψ_i，由下式确定

$$\psi_i = \theta_i + \varphi \tag{2-14}$$

由前面推导可知，K_{Ti} 是根据图 2 - 19 (a) 导出，外力 F 作用方向实际上是法线方向而不是切线方向，因此由式(2 - 9) 求出的所谓切向刚度 K_{Ti} 实际上就是法向刚度 K_{ni}，因此下面求解法向力时可直接由 K_{Ti} 求出。

第 i 个齿法向位移：

$$\delta_{ni} = \delta_i \mid \cos\psi_i \mid$$

第 i 个齿法向力：

$$F_{ni} = K_{Ti}\delta_{ni}$$

第 i 个齿垂直方向的力：

$$F_i = F_{ni} \mid \cos\psi_i \mid = K_{Ti}\delta_i\cos^2\psi_i$$

联轴器垂直方向的力：

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} K_{Ti}\delta_i\cos^2\psi_i \tag{2-15}$$

由式(2 - 15) 可得联轴器横向刚度 K 为

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_{Ti}\cos^2\psi_i \tag{2-16}$$

式中：n—— 联轴器的啮合齿对数；

K_{Ti}—— 单齿刚度，由式(2 - 9) 求出；

ψ_i—— 由式(2 - 14) 求出。

需说明的是，利用式(2 - 14) 求 ψ_i 角时，需先确定接触角 φ 的正负号，而 φ 的正负与前引导面传递载荷方式有关，当外套齿为主动齿时，φ 取负值，当内套齿为主动齿时，φ 取正值。对于图 2 - 21 所示情况，φ 取负值。

b. 径向啮合时联轴器横向刚度

对于径向啮合情况，它的向心径向位移可由图 2 - 22 所示模型求出。

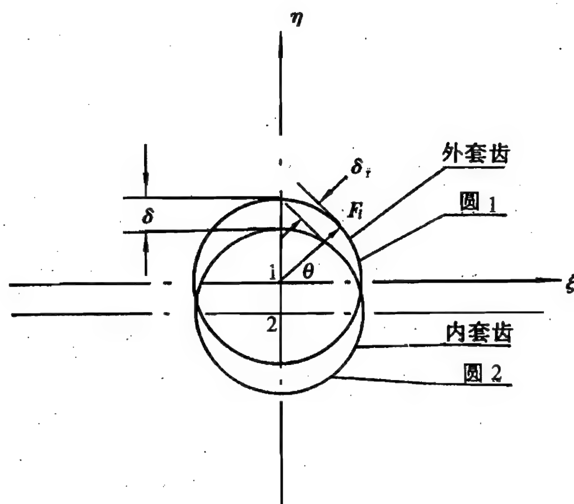


图 2 - 22　径向啮合的套齿模型

图中圆 1 是外套齿的外缘，圆 2 与内套齿齿根主直径圆重合。圆 1 与圆 2 最初是重合的。当圆 2 产生向下位移 δ 时，每个齿受到向心压缩。设圆 1 周线上角度为 θ 的齿的向心压缩量为 δ_r，在小位移情况下，δ_r、F_r 等由下面各式求出。

单个齿向心位移：

$$\delta_r \approx \delta\sin\theta \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

单个齿向心力：

$$F_r = K_{ri}\delta_r$$

向心力在 η 方向分力：

$$F_\eta = F_r\sin\theta$$

产生 δ 位移的总力：

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_{\eta i} = \delta\sum_{i=1}^{n} K_{ri}\sin^2\theta_i \qquad (0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi)$$

最后可求出联轴器横向刚度 K 为

$$K = \frac{F}{\delta} = \sum_{i=1}^{n} K_{ri}\sin^2\theta_i \qquad (2-17$$

式中：n—— 在 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 范围内联轴器的啮合齿对数；

K_{ri}—— 单齿刚度，由式(2－13)求出；

θ_i—— 第 i 个齿位置角度。

2.6.2　螺栓、销钉刚度计算

推荐以下两种方法：

(1) 采用有限元素法对该类联轴器进行刚度计算分析，例如，可采用《航空发动机设计手册》第18册"叶片轮盘主轴强度分析"第1篇"静强度分析"中所述相应方法。

(2) 采用实验方法实测连接柔度。例如，美国某公司的一种称之为振型比较法的实验方法。可以通过实验找出转子共振时的频率和振型，而后用计算确定转子连接柔度。这是一种实验参数识别技术。

图2－23为美国某公司给出的连接件弯曲柔度额定值图，在方案设计阶段，可参考此图选取连接件初始柔度值，也可供检验所设计的连接柔度是否合适作参考比较用。

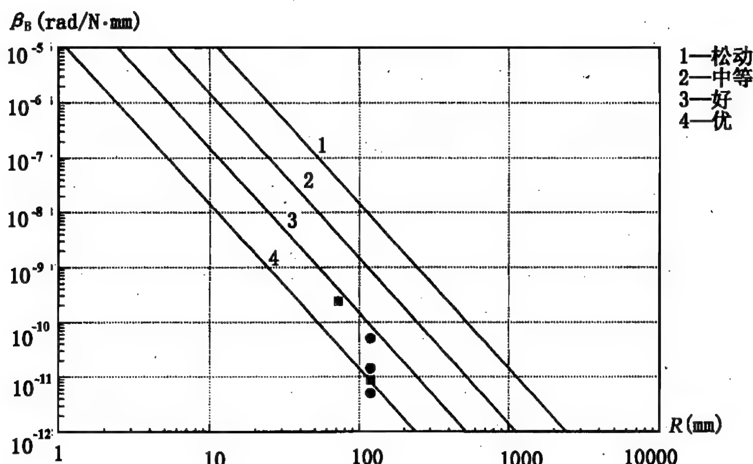


图2－23　美国某公司给出的连接件弯曲柔度额定值

R— 连接件半径，mm；β_B— 连接件弯曲柔度，rad/N·mm；

●— 压气机安装边连接件；■— 涡轮套齿

2.6.3 叠片联轴器刚度计算

叠片联轴器的膜片有圆环形，也有多边环形，如图 2 - 24 所示。多边环形膜片联轴器刚度计算很复杂，下面仅给出圆环形膜片联轴器的刚度计算式。

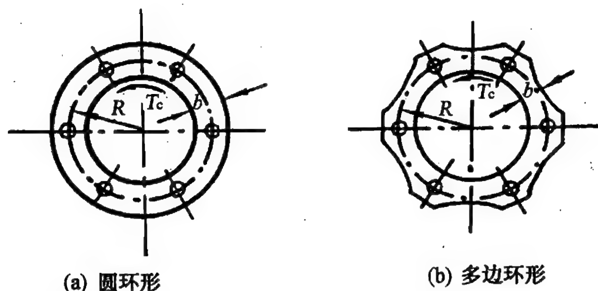


图 2 - 24　叠片联轴器中的圆环形及多边环形膜片

(1) 联轴器的扭转刚度 K_T

$$K_T = \alpha_c NEtR^2 \quad (\mathrm{N \cdot mm/rad}) \tag{2-18}$$

(2) 联轴器的径向刚度 K_r

$$K_r = \frac{\beta_c NEtZ}{12} \quad (\mathrm{N/mm}) \tag{2-19}$$

(3) 联轴器的轴向刚度 K_a

$$K_a = \frac{2.15Ebt^3 ZNF(u)}{(R\theta)^3} \quad (\mathrm{N/mm}) \tag{2-20}$$

(4) 联轴器的角向刚度 K_α

$$K_\alpha = \frac{1.15Ebt^3 ZN}{R\theta^3} \quad (\mathrm{N \cdot mm/rad}) \tag{2-21}$$

式(2 - 18) ~ (2 - 21) 中各圆环形膜片联轴器参数定义如下：

N —— 法兰盘上连接螺栓数；

t—— 膜片厚度，mm；

E—— 膜片材料的弹性模量，MPa；

R—— 连接螺栓中心圆圆周半径，mm；

Z—— 膜片层数；

b—— 膜片环边径向宽度，mm；

d_1—— 垫圈外径，mm；

θ—— 相邻连接螺栓间膜片可弹性变形部分的夹角，$\theta = \frac{\pi}{N} - \frac{0.8d_1}{R}$，rad；

α_c—— 与 θ、b/R 有关的系数，查图 2 - 25 获得；

β_c—— 与 θ、b/R 有关的系数，查图 2 - 26 获得；

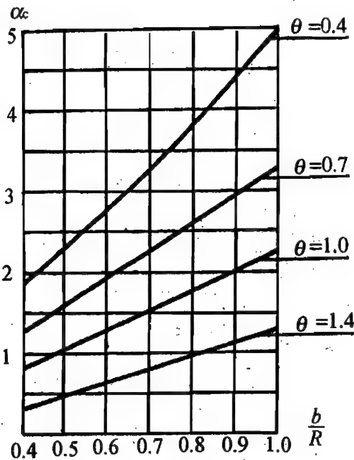


图2-25 系数α_c与b/R关系

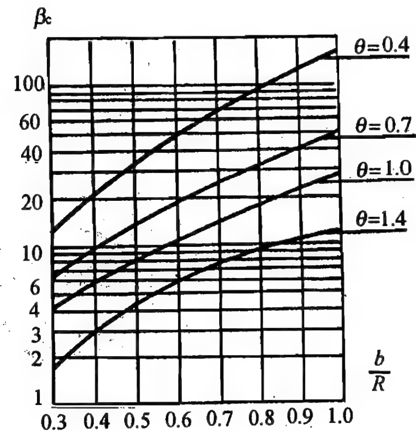


图2-26 系数β_c与b/R关系

$F(u)$——与轴向位移有关的参数，$F(u)$取值范围为0～2，轴向位移较大时，$F(u)$取大值。

2.6.4 端齿刚度计算

2.6.4.1 基本考虑与假设

对于图2-14所示一段含端齿的轴段，在建立端齿梁元刚度矩阵时，有如下基本考虑与假设：

(1) 接触传力处理

一对端齿的相应齿牙之间通过接触传递载荷。由于端齿齿牙表面光度很高，其摩擦系数很低；为保证中心拉杆强度，轴向预紧力也不能太大。因此，可在不考虑摩擦的情况下，认为接触面间只传递法向力；而在实体轴段中，任一剖面的任一点处均可传递任一方向的作用力。

(2) 对称性处理

由于端齿齿牙数目较多，可以认为齿牙相互啮合的端齿轴段基本上是一个轴对称结构。不考虑端齿左、右轴段材料可能不同而造成的差异(例如左、右轴段材料性质差异较大时可取其平均值)。因此，可利用此近似的轴对称性及左右对称性在任一方便坐标系下只计算某些方向间的刚度系数，以减少刚度计算及动力特性分析工作量。

(3) 轴力处理

含端齿轴段上总是承受一定轴向压力，与实体轴段相比，除齿牙部分要承受自身平衡的周向力外，轴向力的传递无本质差别。因此，轴向力引起的轴段刚度仍可单独处理。这里只考虑端齿存在对于轴段弯曲刚度的影响。

2.6.4.2 有限元分析模型

根据上面所述的基本考虑与假设，取图2-14所示含端齿轴段的四分之一作为其有限元分析模型(见图2-27)。在这个分析模型中，处于相互啮合的端齿齿牙表面上的任一对互相接触的节点i与j，应满足如下关系：

$$u_{in} = u_{jn} \tag{2-22}$$

$$f_{in} = -f_{jn} \tag{2-23}$$

式中，u、f 分别表示节点位移及节点接触力，下标中第一个字母表示节点，第二个字母表示法向分量（以 i 点处外法向为正向）。

对于齿牙表面的所有接触节点对，均可导出式(2－22)、(2－23)形式的接触关系，并可设法引入到针对含端齿轴段分析模型写出的一般位移型有限元刚度方程中：

$$KU = F \tag{2-24}$$

式中，$\boldsymbol{K}$ 为整个三维有限元分析模型的总刚度矩阵；$\boldsymbol{U}$ 为总节点位移向量；$\boldsymbol{F}$ 为总节点力向量。

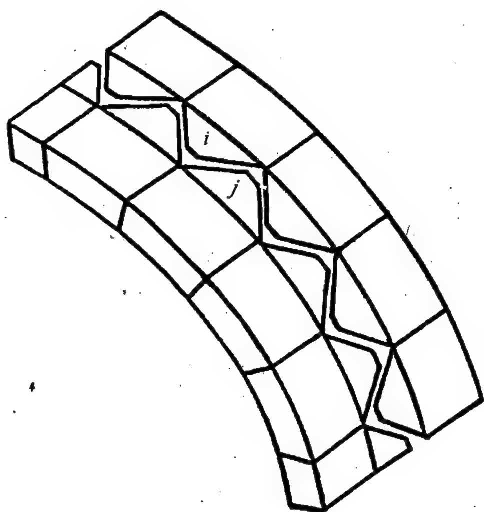


图 2－27　端齿轴段有限元分析模型

在式(2－24)中引入所有接触节点对处的接触关系式后，即可在给定边界条件下求解，关于边界条件的规定方式将在下面说明。必须指出，虽然端齿齿牙啮合面在足够预紧力作用下总是相互接触，但在计算含端齿轴段的梁元型刚度矩阵时可以不考虑轴向力存在。因此，此时在特定载荷作用下并不是齿牙啮合面上的所有节点均处于接触状态。在某一假设接触状态下求解式(2－24)后，可根据求出的啮合面上对应节点的位移关系及接触力数值，按如下方式改变接触状态。

a. 如果原设节点 i 与 j 互不接触：

当 $u_{in} < u_{jn}$ 时，仍应设为不接触；

当 $u_{in} \geqslant u_{jn}$ 时，应改设为接触。

b. 如果原设节点 i 与 j 相互接触：

当 $f_{in} < 0$ 时，仍应设为接触；

当 $f_{in} \geqslant 0$ 时，应改设为不接触。

在新的假设接触状态下，又可建立式(2－24)形式的修正刚度方程，并可在给定边界条件下求解。如此重复，直至假设的接触状态不需要更改为止。此时求出的位移及应力场即为正确接触状态下的解答。

2.6.4.3　端齿梁元刚度矩阵系数的确定

(1) 取值不同的刚度系数个数

根据 2.6.4.1 的基本考虑与假设，近似认为含端齿轴段仍是一个轴对称及左右对称结构，故端齿梁元的刚度矩阵仅在数值上与一般实体梁元刚度矩阵不同，二者取不同数值的刚度系数的个数仍然相同，均为四个。也就是说，根据梁元刚度系数的定义，可将刚度矩阵的下三角矩阵中绝对值相等的非零刚度系数分为如下四组(见图 2－28)：

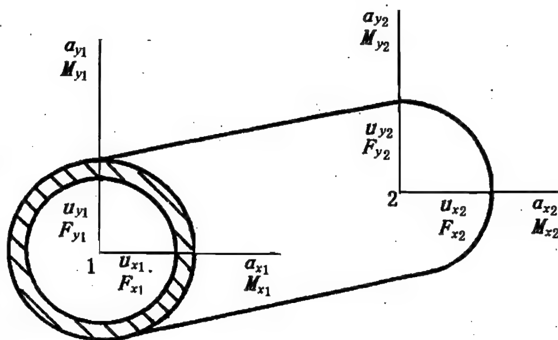


图 2－28　节点位移及节点力

A：$K_{F_{x1},u_{x1}}$；$K_{F_{y1},u_{y1}}$；$K_{F_{x2},u_{x1}}$；$K_{F_{x2},u_{x2}}$；$K_{F_{y2},u_{y1}}$；$K_{F_{y2},u_{y2}}$

B：$K_{M_{x1},\alpha_{x1}}$；$K_{M_{y1},\alpha_{y1}}$；$K_{M_{x2},\alpha_{x2}}$；$K_{M_{y2},\alpha_{y2}}$

C: $K_{M_{x2},\alpha_{x1}}$; $K_{M_{y2},\alpha_{y1}}$

D: $K_{M_{x1},u_{y1}}$; $K_{M_{y1},u_{x1}}$; $K_{F_{x2},\alpha_{y1}}$; $K_{F_{y2},\alpha_{x1}}$;

$K_{M_{x2},u_{y1}}$; $K_{M_{x2},u_{y2}}$; $K_{M_{y2},u_{x1}}$; $K_{M_{y2},u_{x2}}$

式中,下标 F 表示力;u 表示位移;M 表示力矩;α 表示转角;x、y 分别表示坐标方向;1、2 分别表示轴段的两个端面。

(2) 边界条件的规定及载荷的施加

在本方法中采用的有限元分析模型是一种三维模型,要通过这种模型的分析结果计算梁元的刚度系数,显然应对该三维模型的变形方式作某些限制。这里,在施加位移边界条件时,仅对图 2-27 所示分析模型的两个端面上的节点位移作平截面变形的规定,即端面平动或转动。至于模型内部的节点位移,则无法作出类似限制,仍按其固有方式变形。

对于图 2-27 所示分析模型的处于两个端面上的节点,注意到整个圆周上的端齿齿牙数总是偶数,可分别利用对称及反对称条件规定其上的节点位移。

在端面上施加载荷时,为简单起见,仅在中径节点上施加外力,横向力在中径上均布,与弯矩相应的轴向力则按下式确定(见图 2-29):

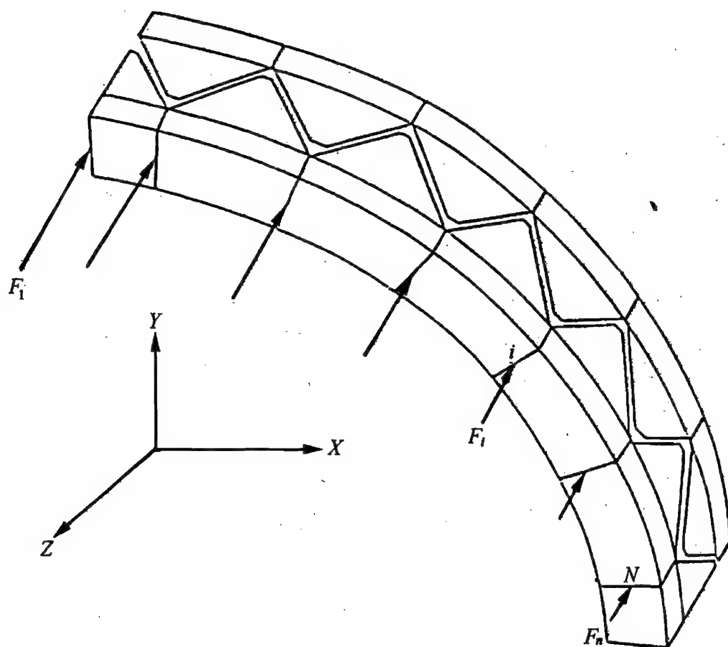


图 2-29 弯矩转换为轴向力施加

$$M_x = \sum_{i=1}^{N} F_i Y_i \tag{2-25}$$

$$F_i = \frac{Y_i}{Y_1} F_1 \tag{2-26}$$

式中，N 为施有外力的节点总数，其他符号的含义见图 2－29。

(3) 刚度系数的计算

由前所述可知，只需算出 A、B、C、D 四组中各一个刚度系数，即可建立整个端齿梁元的刚度矩阵。例如，考察 $K_{F_{x1},u_{x1}}$、$K_{M_{x1},\alpha_{x1}}$、$K_{M_{x2},\alpha_{x1}}$、$K_{M_{y2},u_{x1}}$，根据刚度定义有下式：

$$K_{F_{x1},u_{x1}} = F_{x1}/u_{x1} \tag{2-27}$$

$$K_{M_{x1},\alpha_{x1}} = M_{x1}/\alpha_{x1} \tag{2-28}$$

$$K_{M_{x2},\alpha_{x1}} = M_{x2}/\alpha_{x1} \tag{2-29}$$

$$K_{M_{y2},u_{x1}} = M_{y2}/u_{x1} \tag{2-30}$$

以上各式右端各量均可按如下两种方法求得，一种是在有限元模型分析中把分母作为位移边界条件事先规定，然后通过有限元分析结果求得作为反力的分子。另一种方法是在有限元模型分析中把分子规定为力的边界条件，通过有限元分析的位移结果求得有关分母。当然，在两种方法中，对于与分子及分母指明的自由度无关的那些端面自由度，均要规定其位移为零。这一规定是由刚度系数的基本定义确定的。

在整理有限元模型的分析结果时，同上面对规定位移边界条件及外力边界条件的作法一样，也必须将所得两端面上的三维位移场简化为符合梁元的平截面变形假设的结果。例如，u_{x1} 及 α_{x1} 等应是端面中径节点或整个端面上节点相应量的平均值。至于 F_{x1}、M_{x1}、M_{x2}、M_{y2} 等，则取整个端面所有节点相应量的合量。

2.6.4.4 端齿梁元型刚度矩阵的确定

上述含端齿轴段的梁元形式的有关刚度系数，是由一考虑啮合齿牙的无摩擦接触传力的三维有限元分析模型的结果整理而得。由此所得四个数值不同的刚度系数之间的关系，不能准确满足按解析解所得四个对应刚度系数能满足的如下平衡关系(见图 2－30)：

$$\frac{F_{x1}}{u_{x1}}L = \frac{M_{y2}}{u_{x1}} + \frac{M_{y1}}{u_{x1}} = 2\frac{M_{y2}}{u_{x1}} \tag{2-31}$$

$$\frac{F_{y1}L}{\alpha_{x1}} = \frac{M_{x2}}{\alpha_{x1}} + \frac{M_{x1}}{\alpha_{x1}} = \frac{M_{y2}}{u_{x1}}L \tag{2-32}$$

式中，L 为轴段长度。应指出，以上表达式利用了 $\frac{F_{y1}}{\alpha_{x1}} = \frac{M_{x1}}{u_{y1}} = \frac{M_{y1}}{u_{x1}}$ 这一由贝氏定理及对称性导出的等式及 $\frac{M_{y1}}{u_{x1}}$ 与 $\frac{M_{y2}}{u_{x1}}$ 间的等值性。即使不考虑接触，若用三维有限元模型来分析一整体轴段，由于内部节点的位移无法满足平截面假设(在轴段长度较小时尤其如此)，算出的刚度系数与梁元刚度系数的解析解也不尽一致。这里的解析解是指直接采用材料力学中梁的刚度计算式算出的刚度系数值。

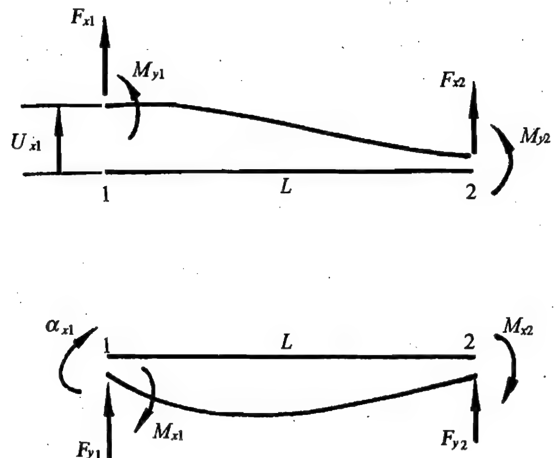


图 2－30 某一节点位移分量引起的各节点反力

为此，在按上述方法计算含端齿轴段的四个刚度系数时，同时也计算相应整体

轴段的四个对应刚度系数。计算时所用模型与一般三维有限元分析的一样，但也可利用含端齿轴段的计算模型，唯一不同之处在于在啮合齿牙的相互接触节点处施加如下一体关系（即两点实际上成为一体）：

$$u_{in} = u_{jn}, u_{i\tau} = u_{j\tau}, u_{i\nu} = u_{j\nu} \tag{2-33}$$

$$f_{in} = -f_{jn}, f_{i\tau} = -f_{j\tau}, f_{i\nu} = -f_{j\nu} \tag{2-34}$$

式中，τ、ν 分别表示接触处的两个切向，其他符号含意同前。在具体确定端齿梁元刚度系数时我们首先对于算出的整体轴段的4个系数，以相应的解析解为“准确解”，排定其计算精度，并认为相应含端齿轴段的刚度系数也有类似的精度顺序。然后，可按如下两种方法修正算出的含端齿轴段的刚度系数。这里式(2-27)、(2-28)、(2-29)、(2-30)定义的四个刚度系数分别以 K_1、K_2、K_3、K_4 来表示。

(1) 单系数法

先利用含端齿轴段的精度最高的那个刚度系数，求出其与相应整体轴段有限元解或解析解的比例关系，然后按同一比例折减，由整体轴段刚度系数的解析解算出含端齿轴段的对应刚度系数。具体计算公式如下：

$$K_i = \frac{K_{jcf}}{K_{jsf}} K_{isa} \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{2-35}$$

$$K_i = \frac{K_{jcf}}{K_{jsa}} K_{isa} \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{2-36}$$

式中，下标 c 表示端齿轴段；s 表示整体轴段；f 表示有限元分析解；a 表示解析解；下标 j 是使相对误差

$$\Delta = \left| \frac{K_{isa} - K_{isf}}{K_{isa}} \right| \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{2-37}$$

取最小值者。

(2) 双系数法

先选择含端齿轴段的不同时出现于方程(2-31)与(2-32)中的精度最高的两个刚度系数，然后由这两个刚度系数通过方程(2-31)与(2-32)算出另外两个刚度系数。也可先对头两个刚度系数按算出的相应整体轴段刚度系数与解析解的比例进行修正。

显然，这样得到的端齿梁元的4个刚度系数 K_1、K_2、K_3、K_4 是满足平衡方程的。由这些系数即可建立如下形式的端齿梁元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$。

$$\boldsymbol{K} = \begin{array}{c} \\ u_{x1} \\ u_{y1} \\ \alpha_{x1} \\ \alpha_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \alpha_{x2} \\ \alpha_{y2} \end{array} \begin{array}{cccccccc} u_{x1} & u_{y1} & \alpha_{x1} & \alpha_{y1} & u_{x2} & u_{y2} & \alpha_{x2} & \alpha_{y2} \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc} K_1 & & & & & & & \\ 0 & K_1 & & \text{对} & & & & \\ 0 & -K_4 & K_2 & & & & & \\ K_4 & 0 & 0 & K_2 & & & & \\ -K_1 & 0 & 0 & -K_4 & K_1 & & \text{称} & \\ 0 & -K_1 & K_4 & 0 & 0 & K_1 & & \\ 0 & -K_4 & K_3 & 0 & 0 & K_4 & K_2 & \\ K_4 & 0 & 0 & K_3 & -K_4 & 0 & 0 & K_2 \end{array} \right] \tag{2-38}$$

式(2-38)中 u_i、α_i 等符号表示自由度方向。

应指出,按单系数法确定的 $K_1 \sim K_4$ 与各个对应整体梁元刚度系数解析解间具有同一比例关系,这样可由对应整体梁元刚度矩阵解析解按式(2-35)或(2-36)中的比例系数(可称为刚度折减系数)折算得到端齿梁元的刚度矩阵。但若采用双系数法,则无此简单的比例关系。

2.7 轴承刚度计算方法

轴承刚度一般在 $2\times10^7 \sim 1\times10^9$ N/m 量级范围内,滚棒轴承刚度比滚珠轴承刚度大。

(1) 接触角的确定

轴承的几何参数及结构简图示于图 2-31。

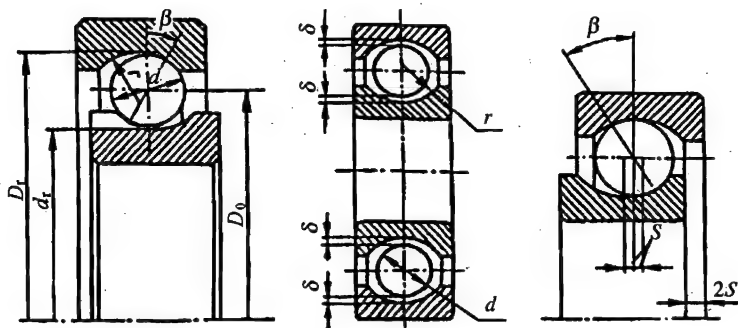


图 2-31 向心止推轴承的横剖面简图

对于无负荷轴承,不考虑材料的弹性变形,此时轴承的轴向游隙与接触角的关系式为

$$S = \left(r - \frac{d}{2}\right)\sin\beta \tag{2-39}$$

式中:S—— 轴向游隙;

β—— 接触角;

d—— 滚珠直径;

r——内、外环跑道半径,标准轴承的跑道半径 $r = 0.515d$,高速轴承的跑道半径 $r = 0.54d$。

轴向游隙 S 与径向游隙 δ 的关系式为

$$S = \sqrt{2\delta(r - d/2) - \delta^2} \tag{2-40}$$

向心止推滚珠轴承的接触角也可以根据轴向负荷 F_a 与径向负荷 F_r 的比值来确定:当 $F_a/F_r > 0.35$ 时,可采用 $\beta = 12°$、$26°$、$36°$ 向心止推轴承。接触角 β 增大,使轴承中回转效应增大,允许的径向负荷下降,因此很少采用 $\beta = 36°$ 的轴承。

(2) 轴承刚度计算方法之一(参考文献[4])

径向刚度:

$$K_{rr} = 0.76479\frac{F_0}{Z_0}\mathrm{ctg}^2\beta \tag{2-41}$$

轴向刚度:

$$K_{aa} = 1.52958 \frac{F_0}{Z_0} \tag{2-42}$$

$$Z_0 = \left(\frac{F_0}{n\alpha \sin^{5/2}\beta}\right)^{2/3} \tag{2-43}$$

式中：K_{rr}、K_{aa}——分别为径向、轴向刚度，N/mm；

F_0——轴向预紧力，N；

Z_0——预紧力引起的位移，mm；

β——接触角；

n——滚珠数目；

α——比例系数，对于200系列滚珠轴承，$\alpha = 0.409 \times 10^6$。

(3) 轴承刚度计算方法之二（参考文献[3]）

轴承刚度近似计算公式列于表2-1中。

表2-1　轴承刚度近似计算公式

轴承类型	径向位移 Y_r (mm)	径向刚度 K_{rr} (N/mm) 轴向刚度 K_{aa} (N/mm)
单列向心球轴承 或 单列向心推力球轴承	$127.53 \times 10^{-5}\sqrt[3]{\frac{F_r^2}{n^2 d\cos^5\beta}}$	$K_{rr} = 0.117 \times 10^4 \sqrt[3]{F_r n^2 d\cos^5\beta}$ $K_{aa} = 0.344 \times 10^4 \sqrt[3]{F_a n^2 d\sin^5\beta}$
调心球轴承	204.28 [illegible] $\sqrt[3]{\frac{F_r^2}{n^2 d\cos^5\beta}}$	$K_{rr} = 0.073 \times 10^4 \sqrt[3]{F_r n^2 d\cos^5\beta}$ $K_{aa} = 0.214 \times 10^4 \sqrt[3]{F_a n^2 d\sin^5\beta}$
推力球轴承		$K_{aa} = 0.286 \times 10^4 \sqrt[3]{F_a n^2 d\sin^5\beta}$
球面滚子轴承	$71.54 \times 10^{-5}\sqrt[3]{\frac{F_r^3}{n^2 L^2\cos^7\beta}}$	$K_{rr} = 0.030 \times 10^4 \sqrt[3]{F_r n^3 L^2\cos^7\beta}$
圆柱滚子轴承 或 圆锥滚子轴承	$46.97 \times 10^{-6}\frac{F_r^{0.9}}{n^{0.9}L^{0.2}\cos^{1.9}\beta}$	$K_{rr} = 0.237 \times 10^5 F_r^{0.1} n^{0.9} L^{0.2}\cos^{1.9}\beta$

表中：d——滚珠直径，mm；

L——滚子有效长度，mm；

n——滚珠或滚子数目；

β——接触角；

Y_r——径向位移，mm；

F_r——径向外力，N；

F_a——轴向外力，N；

K_{rr}——轴承径向刚度，N/mm；

K_{aa}——轴承轴向刚度，N/mm。

2.8　支承刚度计算方法

2.8.1　鼠笼式弹性支承刚度计算

鼠笼式弹性支承结构简图示于图 2 - 32。

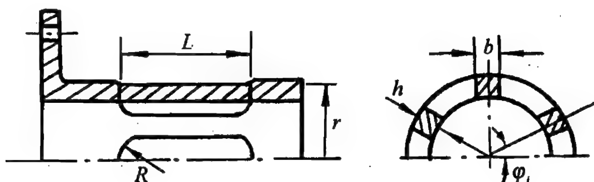


图 2 - 32　鼠笼式弹性支承

刚度计算式有以下三种形式，可任意选择：

$$K_{\pi} = \frac{nEb^2h^2}{L^3} \tag{2 - 44a}$$

$$K_{\pi} = \frac{nEbh}{2}\left[\frac{1}{\frac{L^3}{h^2}+\frac{13L}{6}}+\frac{1}{\frac{L^3}{b^2}+\frac{13L}{6}}\right] \tag{2 - 44b}$$

$$K_{\pi} = \frac{12E}{L^3}\sum_{i=1}^{n}(I_{\mathrm{h}}\cos^2\varphi_i + I_{\mathrm{b}}\sin^2\varphi_i) \tag{2 - 44c}$$

式中：n —— 鼠笼肋条数；

E —— 材料弹性模量；

L —— 鼠笼肋条长度；

b —— 鼠笼肋条截面宽度；

h —— 鼠笼肋条截面高度；

$I_{\mathrm{h}} = \frac{bh^3}{12}$；

$I_{\mathrm{b}} = \frac{b^3h}{12}$。

式(2 - 44a)是在将鼠笼肋条视为两端固支的等截面梁条件下导得的。但由于鼠笼肋条在靠近根部处必然存在圆角 R(见图 2 - 32)，因此按式(2 - 44a)计算的刚度值比实际刚度值低，需要修正。在有条件时，可利用结构类似的鼠笼弹性支承刚度的实验结果，获得修正曲线，对计算的刚度值进行修正。某些例子表明，修正后的刚度值误差比原计算值相对实际值的误差小得多。

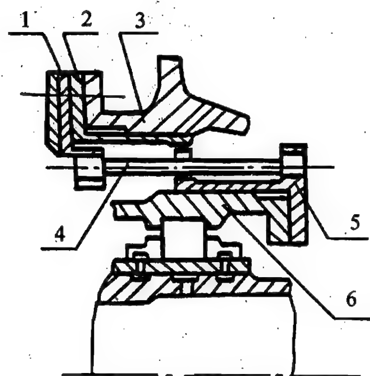


图 2 - 33　某机拉杆式弹性支承
1— 固定座；2— 限制器外环；3— 机匣；4— 拉杆；5— 支座；6— 轴承外环

2.8.2　拉杆式弹性支承刚度计算

拉杆式弹性支承结构简图示于图 2 - 33。

刚度计算式为

$$K_{\pi} = \frac{3n\pi Ed^4}{16L^3} \tag{2-45a}$$

$$K_{\pi} = \frac{12nE\pi d^4}{64L^3 + 112.32d^2L} \tag{2-45b}$$

式中：n—— 拉杆根数；

E—— 拉杆材料的弹性模量；

L—— 拉杆长度；

d—— 拉杆直径。

2.8.3 弹性环式弹性支承刚度计算

弹性环式弹性支承由带凸台的弹性环及止动衬圈组成。其结构简图示于图2-34。

弹性环上有周向均匀交错的内外凸台，内凸台承受轴承的压力，而外凸台将此压力传给机匣。止动衬圈套在轴承外环及内弹性环之间，以防止弹性环相对机匣或轴承外环的转动。弹性环凸台数量不同，其刚度计算方法也不同。

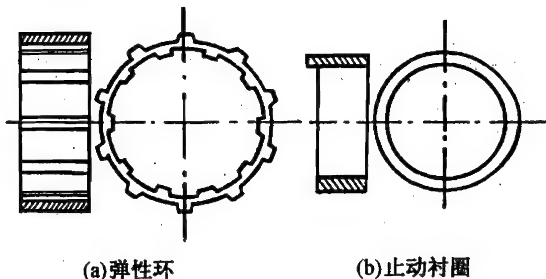


图2-34 弹性环式弹性支承结构简图

(1) 具有大量凸台的弹性环

此类弹性支承环的环段数很多，跨度小，环厚远小于环半径($h/r < 0.011$)，因此计算时假定每一环段为两端固支的直梁，采用材料力学方法导出其刚度计算式。设轴承总作用力为 F，各环段分力为 F_i，计算用图示于图2-35。

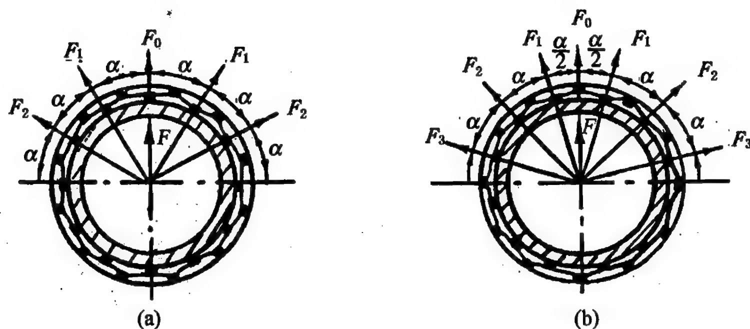


图2-35 弹性环式弹性支承计算用图

图2-35(a)表示轴承力 F 作用线通过顶部的环段中点。设共有 n 个尺寸不同的弹性环，每个环变形不同。一个环在 F 方向柔度为δ_{pj}，在 F 方向位移为y_{pj}，n 个弹性环在力F 方向总柔度 δ 为

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} \delta_{pj} \tag{2-46}$$

$$\delta_{pj} = \frac{y_{pj}}{F} \tag{2-47}$$

设每个环可分成 m 个环段，其中只有$(\frac{m}{2}-1)$个环段受力作用，每个环段受力为 F_0、F_1、……F_i。力 F 可写为

$$F = F_0 + 2\sum_{i=1}^{\frac{m}{4}-1} F_i \cos i\alpha \tag{2-48}$$

环段的径向位移 y_{ri} 为

$$y_{ri} = F_i \delta_0 \qquad (i = 0,1,2\cdots\cdots,\frac{m}{4}-1) \tag{2-49}$$

$$\delta_0 = \frac{L^3}{192EI}$$

式中：δ_0—— 两端固支等截面梁中央截面处的柔度；

L—— 环段长；

I—— 环段截面惯性矩；

E—— 环段材料弹性模量。

将式(2－48)、(2－49)代入式(2－47)可得

$$\delta_{pj} = \frac{y_{pj}}{F} = \frac{\delta_0}{1 + 2\sum_{i=1}^{\frac{m}{4}-1} \cos^2 i\alpha} \tag{2-50}$$

式中：$\alpha = \frac{2\pi}{m}$。

n 个弹性环在力 F 方向总刚度 K_{π} 为

$$K_{\pi} = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \delta_{pj}} \tag{2-51}$$

图 2－35(b)表示轴承力 F 作用线通过顶部环段的端点。与前面推导类似可得一个环在 F 方向的柔度 δ_{pj}

$$\delta_{pj} = \frac{\delta_0}{2\sum_{i=1}^{\frac{m}{4}} \cos^2 \alpha_i} \tag{2-52}$$

式中：$\alpha_i = \frac{\alpha}{2} + (i-1)\alpha$。

n 个弹性环在力 F 方向总刚度 K_{π} 为

$$K_{\pi} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \delta_{pj}} \tag{2-53}$$

值得指出的是，由式(2－50)及式(2－52)算得的柔度值是相同的。

(2) 具有少量凸台的弹性环

图 2－36 所示为具有三个外凸台和三个内凸台的弹性环。

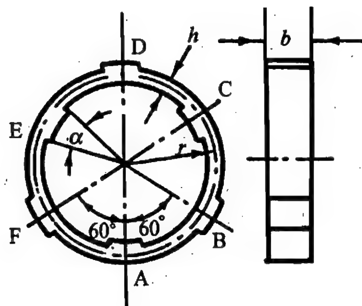


图 2－36　有三个外凸台和三个内凸台的弹性环

由于凸台较少，凸台间跨距较大，因此在建立力学模型时，不能再像前面那样将凸台之间的环段处理为两端固支的直梁。

对于图2－36所示弹性环，其力学模型是固支在外凸台上的整体环元件，通过建立轴的平衡方程及轴与环的共同平衡方程求解。在实际工程中，三个外凸台可能有时只有下面两个凸台(B、F)接触传力，三个内凸台中可能只有一个凸台(A)接触传力，传力方式不同，弹性环刚度计算式也不同，精确的计算需采用有限元素法，简单估算式分别列于表2－2中。

表2－2 具有三个内外凸台的弹性环刚度计算式

接触状况	六个凸台全部接触	外凸台D有间隙	凸台C、D、E有间隙
计算式	$K = 6.7724\dfrac{EI}{(\lambda r)^3}$	$K = 6.5830\dfrac{EI}{(\lambda r)^3}$	$K = 5.1751\dfrac{EI}{(\lambda r)^3}$

表中：λ——修正系数，$\lambda = (120° - \alpha)/120°$；

r——弹性环平均半径；

α——由凸台宽度确定的中心角；

I——环的截面惯性矩(由环厚 h 及环宽 b 确定)；

E——环材料弹性模量。

应指出：对于工程上某些特殊的弹性环来说，例如环径很大的弹性环，如果仅从凸台数目多少决定方法(1)或方法(2)的选取是不妥当的。此时除考虑凸台数目多少外，还应考虑环径大小。因为当环径很大时，尽管凸台数目较多，但凸台间跨距仍然较大，凸台间环段不宜再用直梁来模拟，此时再采用方法(1)并非很合适。

2.8.4 轴承及支承组件组合刚度计算

轴承和支座组合系统可视为两个串联的弹簧，示意图列于图2－37。

图中1代表支承，2代表轴承，轴承与支承组件的组合刚度为

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \tag{2-54}$$

式中：K——组件组合刚度；

K_1——支承刚度；

K_2——轴承刚度。

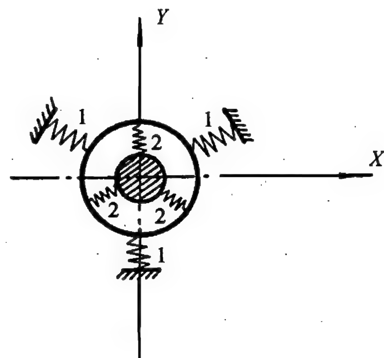


图2－37 轴承及支承组件刚度计算示意图

2.8.5 动刚度

在工程实践中，无论是连接件的刚度还是支承的刚度都是随转速而变化的，它是激振频率的函数，这就是所谓动刚度的概念。在进行转子动力特性分析时，应考虑这种动刚度的影响。动刚度的计算模型与静刚度相同，可采用有限元分析软件，施加交变作用力或力矩进行强迫振动分析，在不同的激振频率下计算载荷作用点的位移和转角响应，求出类似图2－38的刚度随激振频率变化曲线。

另外，转子端齿连接件刚度及轴承刚度，不但随转速而变化，还随轴向载荷的变化而变化，这也是设计中应考虑的因素，图2－39示出了某发动机轴承刚度随转速及轴向载荷变化曲线。

本章所述连接件及支承刚度计算方法，除端齿外，都是采用材料力学分析方法得出的近似计算公式，较适用于方案设计阶段，用其可估算刚度范围。在设计定型阶段，尤其对结构较复杂的连接件及支承，可采用有限元素法进行较准确的分析，例如，可采用NASTRAN等通用分析软件，或采用《航空发动机设计手册》第 18 册“叶片轮盘主轴强度分析”中相应软件。

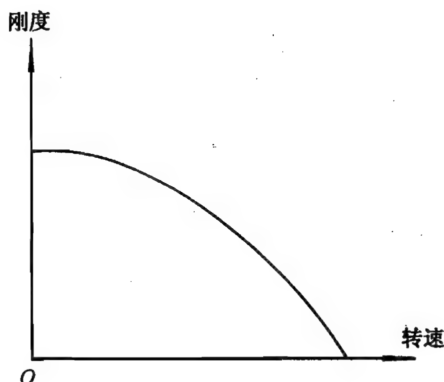


图 2－38　某支承动刚度曲线

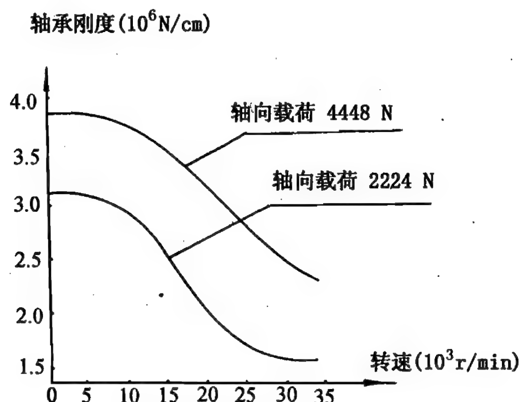


图 2－39　某机轴承刚度随转速、载荷变化曲线

2.9　连接件及支承刚度的工程算例分析

2.9.1　套齿花键联轴器的横向刚度分析算例

例 1：侧向啮合花键联轴器的横向刚度计算

已知某传动轴花键联轴器的外花键结构示意图如图 2－40 所示。该联轴器为侧向啮合渐开线花键，模数为 1，齿数为 13，接触角 $\varphi = 20°$，齿长 $L = 11$ mm，基圆直径为 12.216 mm，节圆直径为 13 mm，外花键小径 11.2 mm，内花键大径 14.8 mm，花键材料弹性模量 $E = 205$ GPa，剪切模量 $G = 82$ GPa，泊松比 $\mu = 0.25$。

采用本章 2.6.1“套齿花键刚度计算”中所介绍的方法对该联轴器的横向刚度进行计算。

(1)　几何参数计算

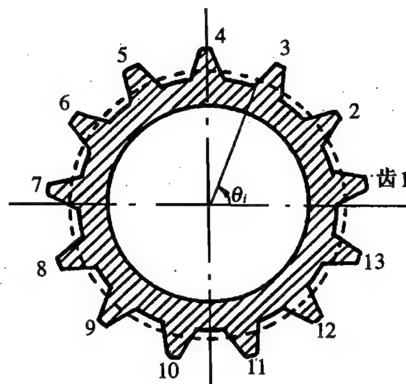


图 2－40　某花键联轴器外花键结构示意图

参见图 2－19 (a)，内外花键侧向啮合时，啮合力作用于节圆线上，受载段为节圆啮合点所在截面到齿根，节圆半径为 $R_F = 6.5$ mm，将内外花键受载齿段分为 3 段($m = 3$)，利用机械设计手册中有关公式先求出各齿段半齿宽 Y_k，再根据本章 2.6.1，(2) 有关公式求出各齿段有关几何参数，其计算结果列于表 2－3。表中各参数意义详见 2.6.1，(2) 。

表 2－3　内外花键各齿段参数计算结果

	序号	半径 R_k (mm)	半齿宽 Y_k (mm)	齿段高 h_k (mm)	距离 S_k (mm)	面积 A_k (mm^2)	截面惯性矩 (mm^4)	$\frac{h_k}{A_k}$	$\frac{h_k}{I_k}$
外花键	1	5.6	0.8806						
				0.3	0.6	19.0993	4.8012	0.0157	0.0625
	2	5.9	0.8557						
				0.3	0.3	18.5515	4.4000	0.0162	0.0682
	3	6.2	0.8308						
				0.3	0.0	17.7782	3.8790	0.0168	0.0773
	4	6.5	0.7854						
	总和							0.0487	0.2080
内花键	1	7.4	1.4060						
				0.3	0.6	28.2414	15.9352	0.0106	0.0188
	2	7,1	1.1614						
				0.3	0.3	23.2606	8.9193	0.0129	0.0336
	3	6.8	0.9532						
				0.3	0.0	19.1246	4.9519	0.0157	0.0605
	4	6.5	0.7854						
	总和							0.0392	0.1129

(2)　单齿切向刚度计算

修正的弹性模量 E_μ 为

$$E_\mu = \frac{E}{1-\mu^2} = 218.67 \times 10^3 \text{N/mm}^2$$

由式(2－4)，单齿的弯曲柔度 Δ_b 为

$$\Delta_b = \frac{1}{E_\mu}\left[\frac{\cos^2\varphi}{3}\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k}{I_k}(h_k^2 + 3S_kh_k + 3S_k^2) - Y_F\cos\varphi\sin\varphi\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k}{I_k}(h_k + 2S_k) + Y_F^2\sin^2\varphi\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k}{I_k}\right]$$

式中：$\varphi = 20°, m = 3, Y_F = 0.7854$ mm，其他各参数见表 2－3，将它们代入上式可得：

外花键单齿弯曲柔度：　$\Delta_{b1} = 0.7317 \times 10^{-7}$ mm/N

内花键单齿弯曲柔度：　$\Delta_{b2} = 0.2779 \times 10^{-7}$ mm/N

由式(2－7)，单齿的剪切柔度 Δ_s 为

$$\Delta_s = \frac{1.2\cos^2\varphi}{G}\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k}{A_k}$$

式中：$\varphi = 20°, m = 3, G = 82$ GPa，其他各参数见表 2－3，将它们代入上式可得：

外花键单齿剪切柔度：　$\Delta_{s1} = 0.6293 \times 10^{-6}$ mm/N

内花键单齿剪切柔度：　$\Delta_{s2} = 0.5063 \times 10^{-6}$ mm/N

由式(2－8)，单齿的剪切柔度 Δ_T 为

$$\Delta_T = \Delta_{b1} + \Delta_{b2} + \Delta_{s1} + \Delta_{s2} = 12.3654 \times 10^{-7} \text{ mm/N}$$

由式(2－9)，单齿切向刚度 K_{Ti} 为

$$K_{Ti} = \frac{1}{\Delta_T} = 0.8087 \times 10^6 \text{ N/mm}$$

(3) 联轴器的横向刚度计算

由式(2－16),侧向啮合联轴器的横向总刚度 K 为

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_{Ti}\cos^2\psi_i$$

参见图2－19 (a) 以及图2－21,由式(2－14),接触面的法向与垂直方向夹角 ψ_i 为

$$\psi_i = \theta_i + \varphi$$

接触角 $\varphi = -20°$,齿数 $n = 13$,每个齿之间夹角为 $360°/13 = 27.69°$。参见图2－40,为计算方便,取第一个齿的 θ 角为 27.69° 的一半即 13.85°,其余各齿 θ 角按下式推算:

$$\theta_i = \theta_{i-1} + 27.69°$$

最后可得 θ_i、ψ_i 以及总刚度 K 值,计算结果列于表2－4。

表2－4　θ_i、ψ_i 及联轴器总刚度计算结果

齿序号 \ 参数 / 单位	θ_i	ψ_i	$\cos^2\psi_i$	$K_{Ti}\cos^2\psi_i$
	(°)	(°)		N/mm
1	13.85	－6.15	0.988	0.7990×10^6
2	41.54	21.54	0.865	0.6995×10^6
3	69.23	49.23	0.426	0.3445×10^6
4	96.92	76.92	0.051	0.0412×10^6
5	124.62	104.62	0.064	0.0517×10^6
6	152.31	132.31	0.453	0.3663×10^6
7	180	160	0.883	0.7141×10^6
8	207.69	187.69	0.9821	0.7942×10^6
9	235.38	215.38	0.6647	0.5369×10^6
10	263.07	243.07	0.2051	0.1658×10^6
11	290.76	270.76	0.0002	0.0001×10^6
12	318.45	298.45	0.2269	0.1835×10^6
13	346.14	326.14	0.6895	0.5576×10^6
总刚度 K	$K = \sum_{i=1}^{13} K_{Ti}\cos^2\psi_i = 5.2544 \times 10^6$ N/mm			

例2:径向啮合花键的横向刚度计算

已知某轴花键联轴器外花键结构示意图仍为图2－40所示。该联轴器为径向啮合花键,模数为1,齿数为13,接触角 $\varphi = 20°$,齿长 $L = 11$ mm,外花键根圆直径为13.04 mm,齿顶圆直径为14.8 mm,花键材料弹性模量 $E = 205$ GPa,泊松比 $\mu = 0.25$。

采用本章2.6.1"套齿花键刚度计算"中所介绍的方法对该联轴器横向刚度进行计算。

(1) 几何参数计算

参见图2－19 (b),受载齿段为齿顶到齿根,将该花键受载齿段分为4段($m = 4$),利用机械设计手册中有关公式及2.6.1,(2) 有关公式求出各齿段几何参数,其计算结果列于表2－5。表中各参数意义详见2.6.1,(2)。

表2－5 各齿段参数计算结果

参数 / 序号	半径 R_k (mm)	半齿宽 Y_k (mm)	齿段高 h_k (mm)	面积 A_k (mm^2)	$\frac{h_k}{A_k}$
1	6.52	0.68			
			0.22	14.08	0.0156
2	6.74	0.60			
			0.22	12.32	0.0178
3	6.96	0.52			
			0.22	10.56	0.0208
4	7.18	0.44			
			0.22	8.80	0.0250
5	7.40	0.36			
总和					0.0792

(2) 单齿径向刚度计算

修正的弹性模量 E_μ 为

$$E_\mu = \frac{E}{1-\mu^2} = 218.67 \times 10^3 \text{N/mm}^2$$

由式(2－12),单齿柔度 Δ_r 为

$$\Delta_r = \frac{1}{E_\mu}\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k}{A_k} = 3.6218 \times 10^{-7} \text{ mm/N}$$

式中：$m = 4$,其余见表2－5。

由式(2－13),单齿径向刚度 K_{ri} 为

$$K_{ri} = \frac{1}{\Delta_r} = 0.2761 \times 10^7 \text{ N/mm}$$

(3) 联轴器的横向刚度计算

由式(2－17),径向啮合联轴器的横向刚度 K 为

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_{ri}\sin^2\theta_i$$

式中：n为在$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$范围内联轴器齿数,这里 $n = 7$,θ_i 为第i个齿位置的角度,参见图2－4(
及例1,将下列 θ_i 的值：

$$\theta_i = 13.85°, 41.54°, 69.23°, 96.92°, 124.62°, 152.31°, 180° \quad (i = 1,2,3,4,5,6,7)$$

代入上式可得联轴器横向刚度 K 为

$$K = 8.971 \times 10^6 \text{ N/mm}$$

2.9.2 叠片联轴器刚度计算算例

某圆环形膜片联轴器结构简图如图2－8及图2－24所示。采用2.6.3"叠片联轴器刚度计算"所介绍的方法进行计算分析,其扭转刚度、径向刚度、轴向刚度、角向刚度分别由式(2－18)～(2－21)确定。其几何参数及其他原始数据、刚度的计算过程及计算结果列于表2－6。

表2-6 圆环形膜片叠片联轴器刚度的计算及其结果

序号	项目	符号	几何意义	数值	单位	计算公式
1	原始数据	N	法兰盘上连接螺栓数	6	个	
2		t	膜片厚度	0.2	mm	
3		Z	膜片层数	24	层	
4		R	连接螺栓中心分布圆圆周半径	46	mm	
5		b	膜片环边径向宽度	22	mm	
6		d_1	垫圈外径	20	mm	
7		E	膜片材料弹性模量	196000	MPa	
8		θ	相邻连接螺栓间膜片可弹性变形部分的夹角 $\frac{\pi}{N}-\frac{0.8d_1}{R}$	0.1758	rad	
9	计算刚度所需其他数据	b/R		0.4783		
10		α_c	由图2-25插值出	2.6161		
11		β_c	由图2-26插值出	45.1225		
12		$F(u)$		1.2		
13	刚度计算结果	K_T	扭转刚度	1.302E+9	N·mm/rad	$K_T=\alpha_c NEtR^2$ 式(2-18)
14		K_r	径向刚度	2.123E+7	N/mm	$K_r=\beta_c EtNZ/12$ 式(2-19)
15		K_a	轴向刚度	2.4E+4	N/mm	$K_a=\frac{2.15NEt^3ZbF(u)}{(R\theta)^3}$ 式(2-20)
16		K_α	角向刚度	2.29E+7	N·mm/rad	$K_\alpha=\frac{1.15Ebt^3ZN}{R\theta^3}$ 式(2-21)

2.9.3 弹性支承刚度分析算例

(1) 鼠笼式弹性支承刚度分析算例

某发动机燃气发生器转子后支点鼠笼式弹性支承的结构形式如图2-32所示。该支承的刚度可由式(2-44)确定。原始数据及计算结果列于表2-7。

表 2－7 鼠笼式弹性支承刚度计算

序号	项目	符号	名　称	数 值	单 位	公　式
1	原始数据	N	鼠笼肋条数	15		
2		E	材料弹性模量	210000	MPa	
3		b	肋条截面宽度	3.6	mm	
4		h	肋条截面高度	3.6	mm	
5		L	肋条长度	28.5	mm	
6	计算结果	K	鼠笼支承刚度	2.286E＋4	N/mm	式(2－44a)
				2.209E＋4	N/mm	式(2－44b)
				2.285E＋4	N/mm	式(2－44c)

(2) 拉杆式弹性支承刚度分析算例

某拉杆式弹性支承结构形式如图 2－33 所示，该支承的刚度可由式(2－45) 确定。原始数据及计算结果列于表 2－8。

表 2－8 拉杆式弹性支承刚度计算

序号	项目	符号	名　称	数 值	单 位	公　式
1	原始数据	N	拉杆根数	12		
2		E	拉杆材料弹性模量	210000	MPa	
3		d	拉杆直径	1	mm	
4		L	拉杆长度	6	mm	
5	计算结果	K	支承刚度	6.87E＋3	N/mm	式(2－45a)
				6.55E＋3	N/mm	式(2－45b)

(3) 弹性环式弹性支承刚度分析算例

某弹性环式弹性支承由带大量凸台的弹性环及衬圈组成，其结构形式如图 2－34 所示。计算用图如图 2－35 (a) 所示。该支承的刚度可由式(2－50) 确定。表 2－9 所示为该算例的计算参数及计算结果。

表 2－9 弹性环式弹性支承刚度计算

序号	项目	符号	名　称	数 值	单 位	公　式
1	原始数据	L	环 段 长	16	mm	
2		E	环段材料弹性模量	210000	MPa	
3		I	环截面惯性矩	3	mm^4	
4		m	环 段 数	12	~	
5	计算刚度所需其他数据	α		$\frac{\pi}{6}$	rad	$\alpha = \frac{2\pi}{m}$
6		δ_0	两端固支等截面梁中央截面处的柔度系数	3.386E－5	mm/N	$\delta_0 = \frac{L^3}{192EI}$
7	计算结果	K	支承刚度	8.86E＋4	N/mm	$K = (1 + 2\sum_{i=1}^{\frac{m}{4}-1}\cos^2 i\alpha)\frac{1}{\delta_0}$ 式(2－50)

2.9.4　轴承、轴承座及其组合刚度的分析算例

某发动机模拟涡轮试验件转子的支承为单列向心球轴承，轴承内、外直径分别为 45mm 和 85mm，滚珠直径为 10mm，数量为 10，接触角为 0，轴承宽 19mm，该轴承安装在轴承座内，距固定端为 3.5mm，轴承座内、外径分别为 85mm 和 90mm，长度为 27.5mm，采用 38CrA 材料，其结构简图如图 2－41。

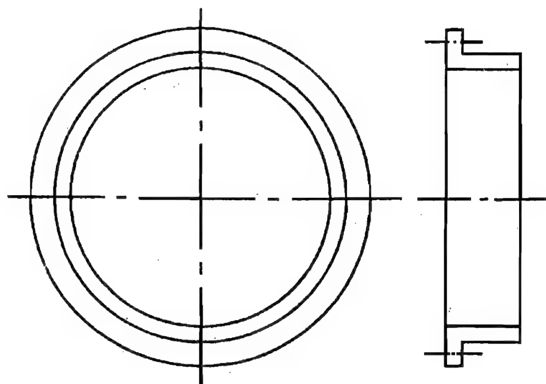


图 2－41　轴承座结构简图

按 2.7“轴承刚度计算方法”、2.8.4“轴承及支承组件组合刚度计算”所述方法以及有限元素法对该试验件转子轴承、轴承座刚度及它们的组合刚度进行计算分析。

(1) 轴承刚度 K_1 的计算

查表 2－1，单列向心球轴承的径向刚度为

$$K_1 = 0.117 \times 10^4 \sqrt[3]{F_r \cdot d \cdot n^2 \cdot \cos^5\beta} \quad \text{N/mm}$$

式中：滚珠直径 $d = 10$ mm；

滚珠数量 $n = 10$；

接触角 $\beta = 0$；

径向外力 $F_r = 137.2$ N；

径向刚度计算值 $K_1 = 6.034 \times 10^4$ N/mm。

(2) 轴承座刚度 K_2 的有限元分析

根据轴承座与机匣的连接特点，将轴承座简化为如图 2－43 所示的一端固支、一端自由的圆筒，并且圆筒只在轴承与它的连接区域承受外载。由于圆筒长度小于直径，根据圣维南(Saint Venant)原理，不能处理为悬臂梁，故不能用材料力学的方法求解。

本算例采用有限元法，利用 APOLANS 软件进行计算，采用八节点六面体单元，将轴承座沿圆周方向划分为 64 等分，沿长度方向分为 6 段，共有 384 个单元，896 个节点，其有限元网格图见图 2－42。

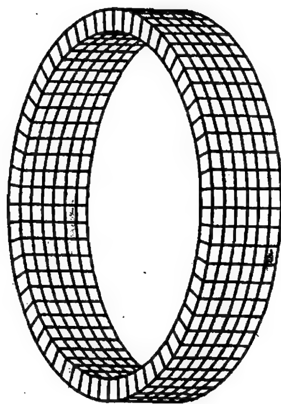


图 2－42 轴承座有限元网格图

由于轴承与轴承座之间的相互作用力非常复杂，它不仅沿轴承座长度方向和圆周方向变化，也与转速和时间有关，实际上为动刚度，而动刚度计算很复杂，下面仅对轴承座的静刚度进行分析。

假设了如下三种形式的外力分布：

模型 1：分布力 q 沿整个轴承长度范围均匀分布，沿圆周在 180° 范围内按余弦函数分布，如图 2－43 所示。

模型 2：分布力 q 沿整个轴承长度范围均匀分布，沿圆周在 90° 范围内按余弦函数分布，如

图2-44所示。

模型3:分布力 q 沿半个轴承长度范围均匀分布,沿圆周在180°范围内按余弦函数分布,如图2-45所示。

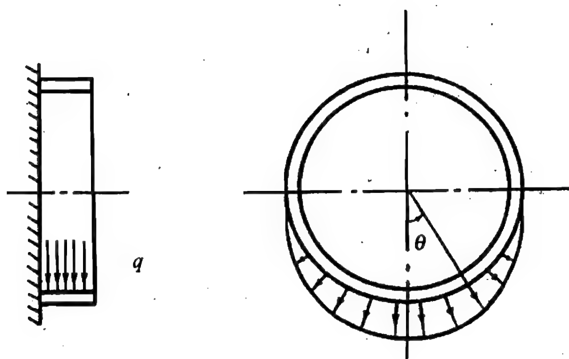


图2-43　轴承座受力模型1

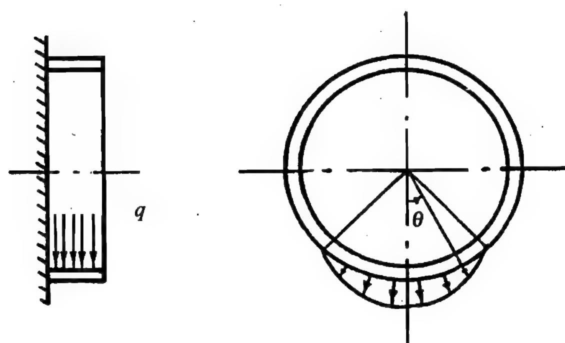


图2-44　轴承座受力模型2

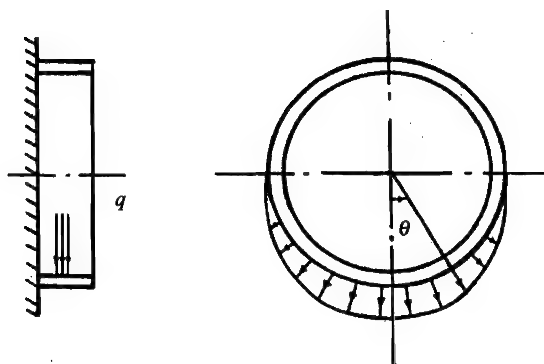


图2-45　轴承座受力模型3

若分布力的合力为 F_s，轴承座的位移为 δ，则轴承座刚度为 $K_2 = F_s/\delta$。

假定分布力的幅值为 100.0 N/m²，算出分布力合力 F_s，采用 APOLANS(参考文献[14])程序，求出位移 δ，从而求出 K_2。

三种形式外力分布情况下轴承座刚度的计算结果列于表 2－10。

表 2－10　轴承座刚度计算结果

模型编号	1	2	3
刚度　(N/mm)	481.95×10^4	217.65×10^4	414.17×10^4

由表 2－10 可以看出：

a. 模型 1 和模型 2 的结果相对误差为 54%，而模型 1 和模型 3 的结果相对误差为 7%，这说明载荷沿轴向的不同分布函数对刚度的影响比载荷沿轴承座圆周方向的不同分布函数对刚度的影响小得多，所以轴承座刚度的计算误差主要来源于对载荷沿圆周方向分布所作的简化；

b. 工程实践中轴承与轴承座之间的相互作用力不一定满足余弦关系，也不一定在整个 180° 的半圆周内都有分布力，因此可以认为模型 1 的结果是轴承座刚度的上界。

(3) 轴承及支承组合刚度 K 的计算

按 2.8.4"轴承及支承组件组合刚度计算"，本算例组合系统可视为两个串联弹簧，其组合刚度由式(2－54)确定：

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

式中：$K_1 = 6.034 \times 10^4$ N/mm；

$K_2 = 481.95 \times 10^4$ N/mm(取模型 1 的结果)；

组合刚度：$K = 5.96 \times 10^4$ N/mm。

2.9.5　端齿刚度有限元分析算例

某涡桨发动机燃气发生器转子结构示意图如图 2－46。

该转子由轴流叶轮、离心叶轮及两级涡轮等组成。通过拧紧螺母在中心拉杆上施加轴向预紧拉力，采用五对圆弧端齿将转子各零件连成一整体。

(1) 端齿轴段主要数据

该转子端齿轴段有关原始数据列于表 2－11。

表 2－11　某机转子端齿轴段几何及物理数据

端齿编号	位置	端齿类型	单边齿数	弹性模量 (GPa)	泊松比	外径 (mm)	内径 (mm)	其他尺寸
1	离心叶轮后端齿	圆弧端齿	20	141	0.3	74	64	见文献[13]
2	鼓筒轴前端齿	圆弧端齿	20	186	0.3	74	64	
3	Ⅰ级涡轮盘前端齿	圆弧端齿	20	177	0.3	74	64	
4	Ⅱ级涡轮盘前端齿	圆弧端齿	20	168	0.3	74	64	
5	后轴颈前端齿	圆弧端齿	20	168	0.3	55	47	

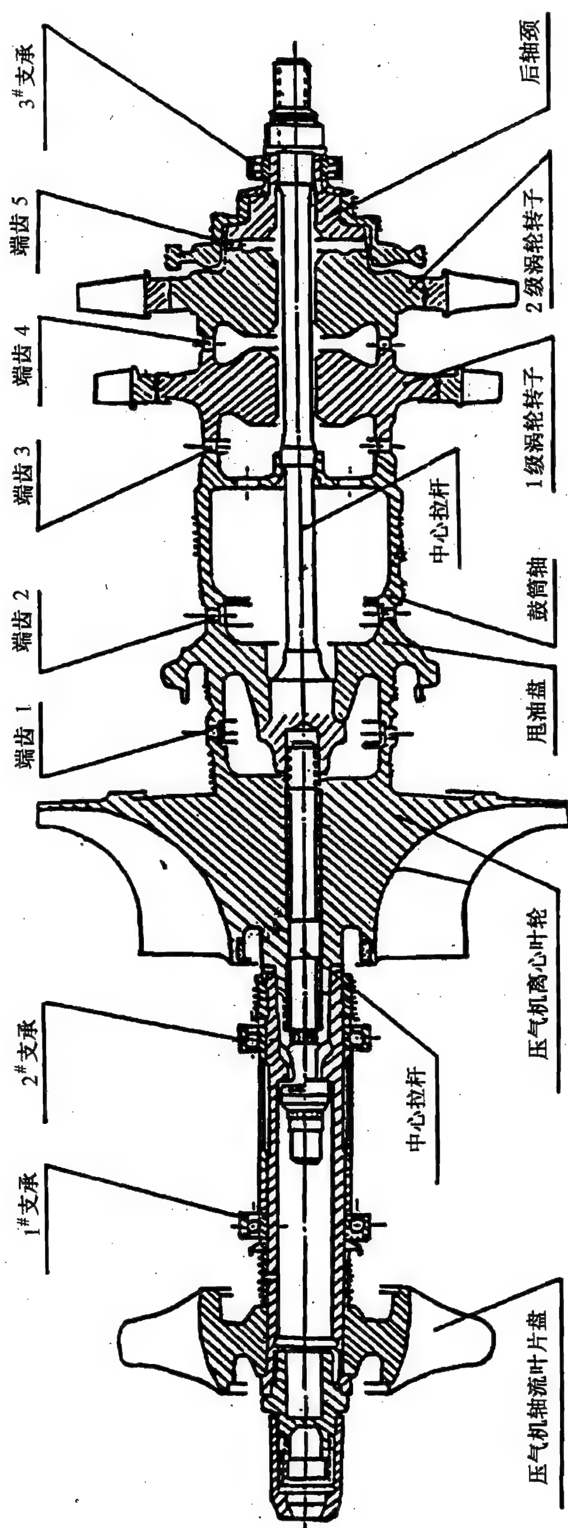


图2-46 某机燃气发生器转子结构示意图

(2) 有限元分析模型

如2.6.4所述,只需取一定长度的端齿轴段及相应整体轴段的四分之一(沿周向)作为有限元分析模型,即可按所述方法算出该端齿轴段的四个绝对值不同的非零刚度系数。

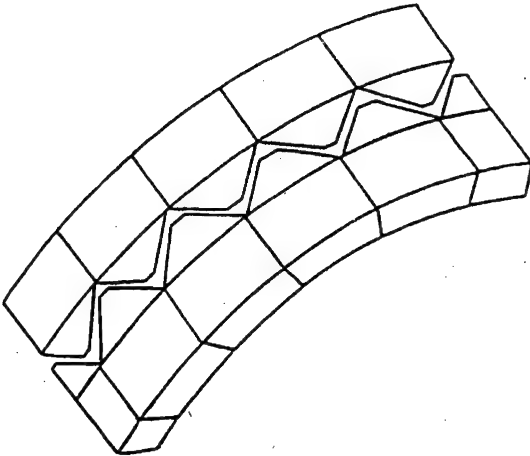


图2-47 端齿轴段有限元分析模型

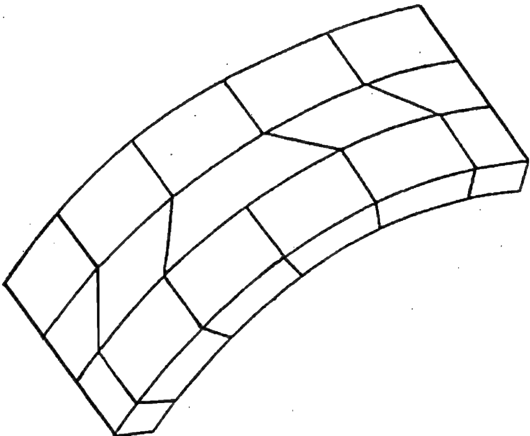


图2-48 整体轴段有限元分析模型

图2-47及图2-48中分别示出了某一端齿轴段及相应整体轴段有限元网格,其他端齿轴段及相应整体轴段的有限元分析模型与此类似。

模型中所用元素为20节点等参体元及相应疏密过渡元,此类元素有关问题详见《航空发动机设计手册》第18册"叶片轮盘主轴强度分析"中有关章节。

该转子有限元网格数据列于表2-12中。

表2-12 某机转子端齿轴段有限元网格数据

端齿编号	轴向长度(mm)	外径(mm)	内径(mm)	元素数	节点数	接触节点对数
1	10.5	74	64	22	280	20
2	10.5	74	64	22	280	20
3	10.5	74	64	22	280	20
4	10.5	74	64	22	280	20
5	10.5	55	47	22	280	20

(3) 有限元分析结果

采用上述分析模型,按2.6.4所述方法算出的四个绝对值不同的非零刚度系数列于表2-13中。表中不仅给出了端齿轴段的结果,还给出了相应整体轴段的结果及采用材料力学方法获得的整体轴段的解析解。

表 2-13　某机转子端齿轴段刚度矩阵分析结果

端齿号＼刚度	K_1 (N/mm)			K_2 (N·mm/rad)			K_3 (N·mm/rad)			K_4 (N·mm/mm)		
	端齿轴段	整体轴段	整体轴段解析解	端齿轴段	整体轴段	整体轴段解析解	端齿轴段	整体轴段	整体轴段解析解	端齿轴段	整体轴段	整体轴段解析解
1	0.716×10^{6}	0.316×10^{7}	0.274×10^{7}	0.274×10^{10}	0.751×10^{10}	0.874×10^{10}	-0.428×10^{10}	-0.10×10^{11}	-0.858×10^{10}	0.883×10^{7}	0.153×10^{8}	0.144×10^{8}
2	0.141×10^{7}	0.387×10^{7}	0.355×10^{7}	0.526×10^{10}	0.978×10^{10}	0.115×10^{11}	-0.622×10^{10}	-0.13×10^{11}	-0.113×10^{11}	0.163×10^{7}	0.212×10^{8}	0.186×10^{8}
3	0.136×10^{7}	0.375×10^{7}	0.342×10^{7}	0.473×10^{10}	0.963×10^{10}	0.109×10^{11}	-0.619×10^{10}	-0.116×10^{11}	-0.108×10^{11}	0.152×10^{8}	0.204×10^{8}	0.180×10^{8}
4	0.117×10^{7}	0.352×10^{7}	0.330×10^{7}	0.408×10^{10}	0.995×10^{10}	0.104×10^{11}	-0.609×10^{10}	-0.109×10^{11}	-0.102×10^{11}	0.142×10^{8}	0.183×10^{8}	0.173×10^{8}
5	0.650×10^{6}	0.210×10^{7}	0.195×10^{7}	0.203×10^{10}	0.339×10^{10}	0.338×10^{10}	-0.205×10^{10}	-0.388×10^{10}	-0.328×10^{10}	0.404×10^{7}	0.134×10^{8}	0.103×10^{8}

(4) 端齿轴段梁元刚度矩阵

利用表2-13列出的结果，按2.6.4介绍的单系数法或双系数法可以得出端齿梁元的四个绝对值不相等的非零刚度系数，从而可建立梁元刚度矩阵。本例采用单系数法进行计算。

a. 求端齿刚度系数相对误差 Δ_i

由式(2-37)算出各个端齿对应的 Δ_i 并列于表2-14中。式中 K_{isa} 为整体轴段解析解，K_i 为整体轴段有限元解(见表2-13)。

表 2-14　各端齿对应的 Δ_i 值

端齿号＼Δ_i	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
1	0.153	0.140	0.165	0.0625*
2	0.090*	0.149	0.150	0.139
3	0.096	0.116	0.074*	0.133
4	0.066	0.0432*	0.0686	0.0578
5	0.0769	0.00029*	0.182	0.301

表中带 * 号者为各端齿 Δ_1 ~ Δ_4 中最小值，它表示该端齿四个 K_i 中精度最高者。

b. 求折减系数 ddk

由式(2-35)及(2-36)，折减系数 ddk 为

$$\mathrm{ddk}=\frac{K_{jcf}}{K_{jsf}}\quad 或\quad \frac{K_{jcf}}{K_{jsa}}$$

式中，K_{jcf} 为端齿轴段有限元解；K_{jsf} 为整体轴段有限元解，其数据见表2-13。

表2-13表明，每个端齿对应四个非零值的刚度系数 K_1、K_2、K_3、K_4。由表2-14可知，端齿1、端齿2、端齿3、端齿4、端齿5中端齿刚度计算精度最高的 K_i 分别为 K_4、K_1、K_3、K_2、K_2。因此端齿1 ~ 端齿5的折减系数分别由这些 K_i 值算出。其结果列于表2-15。

表 2-15　折减系数 ddk

端齿号	1	2	3	4	5
ddk	0.577	0.364	0.534	0.41	0.601

c. 求端齿轴段梁元刚度矩阵

根据式(2-35)、(2-36)的定义,端齿梁元刚度矩阵可用整体轴段刚度的解析解(表2-13中相应值)与折减系数(表2-15对应值)相乘得出。其结果列于表2-16中。

表2-16 某机转子端齿轴段梁元刚度矩阵中 K_i

刚度 / 端齿编号	K_1 (N/mm)	K_2 (N·mm/rad)	K_3 (N·mm/rad)	K_4 (N·mm/mm)
1	0.156×10^{7}	0.498×10^{10}	-0.489×10^{10}	0.821×10^{7}
2	0.129×10^{7}	0.419×10^{10}	-0.411×10^{10}	0.677×10^{7}
3	0.182×10^{7}	0.582×10^{10}	-0.577×10^{10}	0.960×10^{7}
4	0.135×10^{7}	0.426×10^{10}	-0.418×10^{10}	0.710×10^{7}
5	0.117×10^{7}	0.200×10^{10}	-0.197×10^{10}	0.680×10^{7}

将表2-16中各端齿轴段的 $K_1 \sim K_4$ 数值写入式(2-38)相应位置中,可得该五对端齿梁元刚度矩阵。

2.10 国内外部分机种转子支承刚度统计

国内外部分机种转子支承刚度值列于表2-17,表中所列机种支承结构形式见图2-49～图2-53。

表2-17 国内外部分机种转子支承刚度一览表

序号	国名	发动机型号名	转子名	支点数	弹支位置	轴承及支承简图	转子系统特点	弹支类型及特点	支承刚度 (N/mm)	来源	备注
1	英国	SPEY	高压涡轮	2	后支点	见图2-49	前支点为刚支,后支点为弹支的双支点转子系统;轴较短粗,两级涡轮悬于弹支后	鼠笼式	24595	来自英文原文	原文[15]柔度为:0.00712 in/1000 lb
2	英国	SPEY	低压涡轮	2	后支点	见图2-33	前支点为刚支,后支点为弹支的双支点转子系统;轴较细长,两级涡轮悬于弹支后	拉杆式	4608	来自英文原文	原文[15]柔度为:0.038 in/1000 lb
3	英国	SPEY	高压压气机	2	后支点		前支点为刚支,后支点为弹支的双支点转子系统		175118	来自英文原文	原文[15]柔度为:0.001 in/1000 lb
4	英国	SPEY	低压压气机	2	前支点		前支点为弹支,后支点为刚支的双支点转子系统		87563	来自英文原文	原文[15]柔度为:0.002 in/1000 lb
5	美国	某机	核心机	2	前支点 后支点	前支点结构见图2-50 后支点结构见图2-51	前后支点均为弹支的双支点转子系统;前支点为双锥形,后支点为锥形	拉杆式	52540(前支点)		参考文献[3]

续表 2 - 17

序号	国名	发动机型号名	转子名	支点数	弹支位置	轴承及支承简图	转子系统特点	弹支类型及特点	支承刚度(N/mm)	来源	备注
6	美国	某机	联合转子	2	前支点	见图 2 - 52	跨梁式鼓轴，铝离心压气机轮靠近前支点	鼠笼式	13176		参考文献[5]
7	中国	某机	燃气发生器	2	前后支点		前后支点为弹支的双支点转子系统；前后弹支居两轴承中间位置	鼠笼式	18522(前) 28224(后)	实测 实测	参考文献[16]
8	中国	某机	压气机	2	前支点		前支点为弹支，后支点为刚支的双支点转子系统	鼠笼式	23430(水平) 21593(垂直)	实测 实测	参考文献[17]
9	中国	某机	尾传动轴系	7	5个弹支点	见图 2 - 53	尾轴后段支承在5个轴承上	5个轴承外环套有橡胶减振套	1954(1#) 1954(2#) 1888(3#) 1993(4#) 1863(5#)	实测	参考文献[18]
10	法国	某机	燃气发生器	3	后支点		前支点、中支点为刚支，后支点为弹支的三支点转子系统	鼠笼式	32340	计算	参考文献[19]

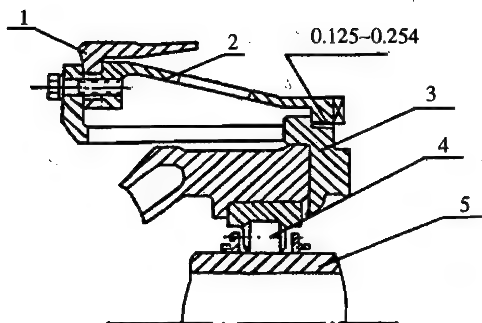


图 2 - 49　斯贝高压涡轮后支点弹性支承

1— 机匣；2— 限制器外环；3— 鼠笼；4— 轴承；5— 轴

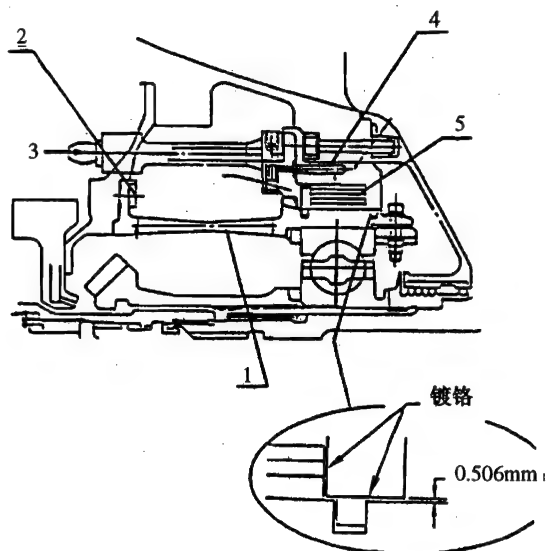


图 2 - 50　美国某公司核心机前支点弹性支承

1—34 根杆条；2—28 个螺钉；3— 滑油入口；4—6 个单向活门；5—5 层片

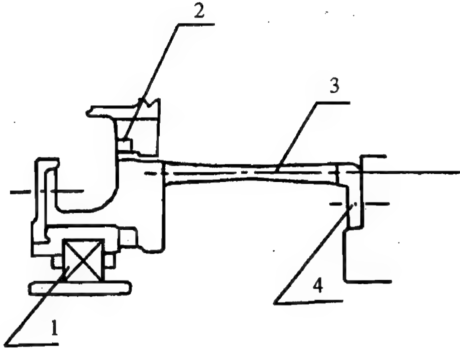


图 2－51 美国某公司核心机后支点弹性支承
1— 后滚棒轴承；2— 防转凸台；3—34 根杆条；
4—20 个螺钉

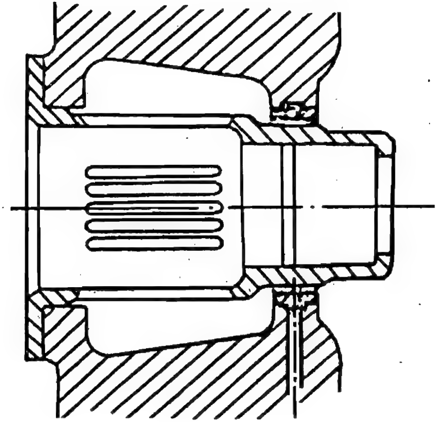


图 2－52 某发动机弹性支承

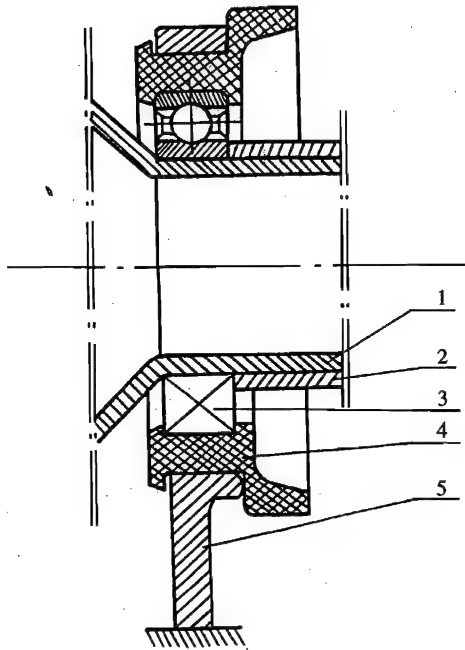


图 2－53 某机尾传动轴弹性支承
1— 轴；2— 轴套；3— 轴承；4— 橡胶减振套；5— 支承座

参 考 文 献

[1] 株洲航空动力机械研究所编著．转子动力学研究文集：航空发动机结构完整性研究“七五”课题汇编．中国航空工业总公司涡桨涡轴发动机结构完整性办公室，1994.

[2] 徐灏，施高义主编．机械设计手册第 4 卷．北京：机械工业出版社，1991.

[3] 朱梓根主编．航空涡喷涡扇发动机结构设计准则研究报告第六册．中国航空工业总公司发动机系统工程局，1995．
[4] [苏] 克勒宗 AC，茹拉夫列夫 H，杨瓦列夫 H B．转动机械的计算和设计．张文杰，陶昌等译．沈阳航空发动机研究所，1982．
[5] 晏砺堂著．航空燃气轮机振动和减振．北京：国防工业出版社，1991．
[6] 陈光主编．航空燃气涡轮发动机结构设计．北京：北京航空航天大学出版社，1994．
[7] 株洲航空动力机械研究所编著．航空发动机减速器强度分析方法及其应用．中国航空工业总公司涡桨涡轴发动机结构完整性办公室，1994．
[8] 欧园霞．某发动机高低压转子系统的动力特性分析．株洲航空动力机械研究所，1985．
[9] 欧园霞．某机水平尾轴临界转速计算报告．株洲航空动力机械研究所，1986．
[10] 欧园霞．某机传动系统尾传动轴系动力特性计算分析．株洲航空动力机械研究所，1992．
[11] Marmol R A, Smalley A J and Tecza J A. Spline coupling induced nonsynchronous Rotor vibrations. Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME. Vol.102, January 1980.
[12] 尹泽勇．转子离心力对于轴向力的影响．株洲航空动力机械研究所，1991．
[13] 邓克颖．某光身发动机．株洲航空动力机械研究所，1988．
[14] 刘长泓，何君毅等编．APOLANS 用户手册．航空航天部情报研究所计算室，1991．
[15] SPEY MK. 202 Complete Engine Vibration AERO STRESS REPORT 3150, 1964.
[16] 李希凡．某机燃气发生器转子动力学设计与实验．株洲航空动力机械研究所，1993．
[17] 张良竹．某发动机鼠笼式轴承座组合刚度试验报告．株洲航空动力机械研究所，1982．
[18] 陈运西．某机传动系统尾传动轴系振动试验．株洲航空动力机械研究所，1992．
[19] 张乃光．某发动机燃气发生器转子支承所受最大径向载荷的计算报告．株洲航空动力机械研究所，1983．

第3章 转子－支承系统临界转速和应变能分布计算方法

3.1 临界转速计算方法

临界转速的确定是转子动力学的一个基本研究课题。对于航空发动机来说，合理配置转子－支承系统的临界转速，是保证发动机安全可靠运行的一项重要前提。在发动机整体方案设计阶段，就必须进行临界转速的估算与分析，以便从动力学的角度分析总体结构方案的合理性；在发动机工程设计阶段，还应对转子－支承系统进行仔细的临界转速计算，以便确定其临界转速的准确范围，并考虑是否采用弹性支承及作优化设计工作，保证临界转速远离发动机的工作转速范围。因此临界转速计算是涉及发动机总体结构方案的全局性的重要课题。

临界转速计算的准确可靠，取决于计算方法与模型。模型的建立与计算方法的选用又有一定的联系。

临界转速的计算方法主要有两大类：传递矩阵法与有限元素法。

传递矩阵法起源于20世纪40年代Prohl与Myklestad分别对梁与机翼作弯曲振动分析时提出的逐站推算法。而后经过许多学者的不断发展完善，使传递矩阵法及其各种改进方法能适合于计算单跨单转子、多跨单转子以及具有多个中介支承的多跨多转子－支承系统的临界转速、不平衡响应以及动力稳定性分析。古典的传递矩阵法是各种传递矩阵改进方法的基础，它是建立在铁木辛哥梁假设的基础上的。但古典传递矩阵法只适合于简单链式结构的转子系统，如果存在分支结构，或者某个站破坏了参数传递关系，则传递矩阵法就无法进行下去。此外，实际的转子－支承系统可能是大型的，要划分成为几十个段站，甚至更多。若段站过多，各段传递数值运算误差的积累，可能导致相当大的最后误差，甚至导致矩阵病态与奇异，使数值失稳。Riccati传递矩阵法针对这一问题做了改进，它将截面上全部状态参数的逐段传递改为同一截面上的内力参数与变形参数的相互传递，保证同一截面上各种状态参数之间的协调性；然后再作相邻截面的状态参数传递，在很大程度上改善了传递矩阵法的计算精度，避免了数值失稳。然而，Riccati法却使计算过程中出现反共振点，给计算机运行中判断临界转速增加了麻烦，并容易造成漏根。

上述两种方法都不能直接用于具有多个中介支承、多跨多转子的航空发动机转子－支承系统，因此，各种改进的传递矩阵法：子结构传递矩阵法、传递矩阵－阻抗耦合法、传递矩阵－直接积分法、传递矩阵－模态综合法等相继发展，并得到了广泛应用。

有限元素法是根据变分原理求解数学物理问题的一种数值方法，60年代开始用于工程分析，应用到转子动力学分析则稍后一些。该方法从所考察的物理模型出发，对转子－支承系统离散成为不同类型的有限个元素，假设单元内的变形规律，即对不同类型的元素构造不同的形函数坐标，建立整个系统的运动方程。随着有限元技术的成熟和计算机技术的高速发展，对不同类型的元素所构造的形函数坐标和对复杂结构的模拟愈来愈接近真实，计算精度不断提高。

模态综合法可以对大型复杂结构进行凝聚降阶，计算效率更高，更适合于航空发动机转子－支承系统的动力学分析。

影响临界转速计算结果的主要因素，与其说是计算方法，不如说是模型的正确性。目前各种计算方法对同一模型的计算结果相差不会超过5%，而模型选取不同，计算结果可能相差10%以上，甚至成倍相差。模型建立中主要是两个问题：一是合理的简化；二是可靠的经验数据。模型合理简化主要涉及航空发动机转子采用的异型结构：如悬臂式与挑担式，采用以往的当量质量、当量转动惯量处理已经无法满足现代异型结构转子的需要，而必须作为分支子系统处理。弹性支承、滚动轴承、柔性机匣系统、转子连接刚度等的准确处理，在很大程度上影响着临界转速的计算精度。对同一个模型，由于某些边界条件数值不同，可能使临界转速相差百分之几十，甚至成倍。所以，这些经验数据必须正确给定。这就有赖于建立有关的数据库以供使用参考。

3.1.1　传递矩阵法

传递矩阵法是应用最普遍的计算临界转速的一种方法。它的基本原理是依次建立转轴各截面上状态参数之间的传递矩阵关系，并使之满足各相应的边界条件，从而确定临界转速及相应的振型。

3.1.1.1　模型的建立

(1) 模型的简化

首先将实际的转子－支承系统处理成为便于分析计算的简化模型。如图3－1所示的转子－支承系统，包含有较细的轴、鼓筒状轴、叶轮、球头联轴节、滚动轴承与弹性支承等，可以将它们简化成为相应的无质量弹性轴段、均质弹性轴段、集中质量站、旋转轮盘站、质量弹簧站、活动球铰、刚性铰支等理想模型。无质量弹性轴段是没有质量的、只有弯曲刚度(EI)和剪切效应(G)的均匀轴段，如图3－1中的0～1、2～3、3～4、4～5与5～6等段；均质轴段除具有弹性外，还具有均匀分布质量，如图3－1中的1～2段；旋转轮盘站具有质量 m 和转动惯量 J，如图中的2、6站；弹性支承一般具有集中质量 m 与弹簧刚度 k，如图中3、5两站。

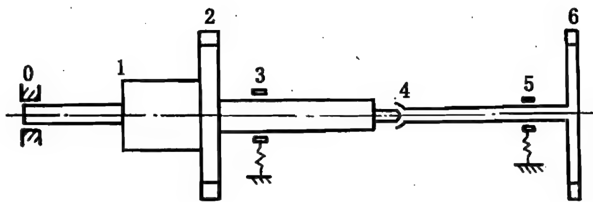


图3－1　转子－支承系统的简化模型

(2)分段原则

正确的模型与合理的分段是保证计算结果与实际相一致的前提。分段太粗，计算结果与实际相差太大；分段过细，不仅增加计算工作量，而且有时由于积累误差增加，反而使计算结果不准确。一般划分轴段、设站按如下原则：

a. 转子中具有较大集中质量处，如轮盘等，应设站；

b. 联轴器具有一定质量，而且不同的联轴器具有不同的抗弯特性，应设站；

c. 支承，无论是刚性铰支还是弹性支承，对转子均提供一定的约束，改变横截面内的状态参数，应设站；

d. 转轴横截面具有较大变化处，不能再保持均质轴段或无质量弹性轴段的特性参数不

变,应断开,分段设站;

e. 比较细长的等截面轴段,为保证模型的正确性,应适当分段,各分段间设集中质量站。

3.1.1.2 轴段的传递矩阵

(1) 坐标系

图 3-2 为轴段分析用的坐标系及参数定义。OZ 轴为转轴静止状态的轴线,由左向右为正;OX 轴为转轴弯曲振动的横向位移,向上为正。i 轴段由 Z_{i-1} 到 Z_i,记为 $i-1$ 与 i 截面,截面上的状态参数有位移 X_{i-1}、X_i,转角 θ_{i-1}、θ_i(反时针方向为正),弯矩 M_{i-1}、M_i(使转轴发生正弯曲为正)与切力 Q_{i-1}、Q_i(使轴段产生恢复力矩为正)。在 YOZ 平面进行分析时,所规定的符号完全类似,只将相应的 X 向改为 Y 向。

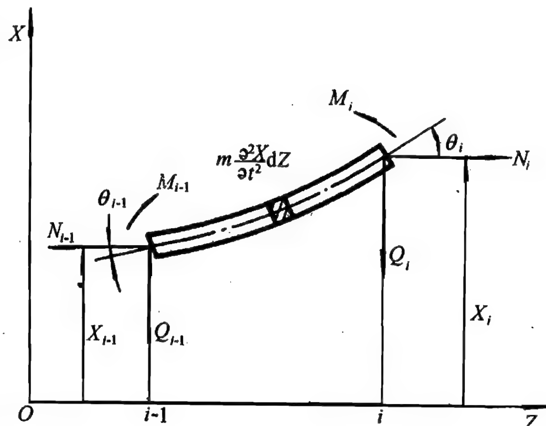


图 3-2 坐标系及参数符号

(2) 均质轴段的传递矩阵(参考文献[4])

取微元体并写出两侧截面上的内力、力矩、位移与转角如图 3-3 所示,导出 OX 方向的力平衡方程及 XOZ 平面内的力矩平衡方程如下:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial Z}\mathrm{d}Z - Q\mathrm{d}Z - N\theta\mathrm{d}Z - J\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\mathrm{d}Z = 0\\ -\dfrac{\partial Q}{\partial Z}\mathrm{d}Z - m\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\mathrm{d}Z = 0\end{cases}$$

式中,m 和 J 分别为单位长度的质量和转动惯量。

略去高阶微量,由前两式消去 Q,引入材料力学的关系

$$\theta = \frac{\partial x}{\partial Z} \qquad M = EI\frac{\partial^2 x}{\partial Z^2}$$

可得

$$\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\left(EI\frac{\partial^2 x}{\partial Z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial Z}\left(J\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + N\frac{\partial x}{\partial Z}\right) + m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \tag{3-1}$$

上式为直轴自由弯曲振动的普遍方程。当轴段为等截面均质,略去轴向力 N 和分布质量的转动惯量 J,认为系统作简谐振动,式(3-1)简化为

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 X}{\mathrm{d}Z^4} - m\Omega^2 X = 0 \tag{3-2}$$

引入相对坐标 $\xi = Z/l$,上式也可改写成为

$$\frac{\mathrm{d}^4 X}{\mathrm{d}\xi^4} - k^4 X = 0 \tag{3-3}$$

式中:

$$k^4 = \frac{l^4 m\Omega^2}{EI} \tag{3-4}$$

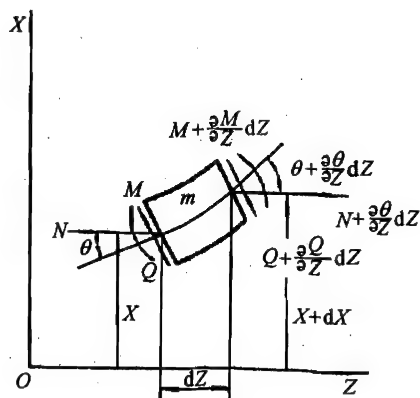


图 3-3 均质轴段微元的状态参数

解式(3－3)可得4个特殊解，表示为以下函数的组合：

$$\sin k\xi,\cos k\xi,\mathrm{sh}\,k\xi,\mathrm{ch}\,k\xi$$

引用克雷洛夫(КРЫЛОВ)函数

$$\begin{cases} S(k\xi)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\,k\xi+\cos k\xi) \\ T(k\xi)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{sh}\,k\xi+\sin k\xi) \\ U(k\xi)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\,k\xi-\cos k\xi) \\ V(k\xi)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{sh}\,k\xi-\sin k\xi) \end{cases} \tag{3-5}$$

则式(3－2)的解可写成

$$X(k\xi)=C_1S(k\xi)+C_2T(k\xi)+C_3U(k\xi)+C_4V(k\xi)$$

由材料力学可知

$$\begin{cases} \theta(k\xi)=\dfrac{k}{l}X'(k\xi) \\ M(k\xi)=EI\dfrac{k^2}{l^2}X''(k\xi) \\ Q(k\xi)=EI\dfrac{k^3}{l^3}X'''(k\xi) \end{cases}$$

若轴段起始端 $\xi=0$ 截面的状态参数为 $X(0)$、$\theta(0)$、$M(0)$与 $Q(0)$，则得

$$C_1=X(0)\qquad C_2=\frac{1}{k}\theta(0)\qquad C_3=\frac{l^2}{EIk^2}M(0)\qquad C_4=\frac{l^3}{EIk^3}Q(0)$$

代入上式得

$$\begin{cases} X(k\xi)=X(0)S(k\xi)+\theta(0)\dfrac{1}{\alpha}T(k\xi)+M(0)\dfrac{1}{\alpha^2EI}U(k\xi)+Q(0)\dfrac{1}{\alpha^3EI}V(k\xi) \\ \theta(k\xi)=X(0)\alpha V(k\xi)+\theta(0)S(k\xi)+M(0)\dfrac{1}{\alpha EI}T(k\xi)+Q(0)\dfrac{1}{\alpha^2EI}U(k\xi) \\ M(k\xi)=X(0)\alpha^2EIU(k\xi)+\theta(0)\alpha EIV(k\xi)+M(0)S(k\xi)+Q(0)\dfrac{1}{\alpha}T(k\xi) \\ Q(k\xi)=X(0)\alpha^3EIT(k\xi)+\theta(0)\alpha^2EIU(k\xi)+M(0)\alpha V(k\xi)+Q(0)S(k\xi) \end{cases} \tag{3-6}$$

式中，$\alpha=k/l$。

式(3－6)表示了均质轴段任意截面上的状态参数与初始截面上的状态参数之间的关系在轴段的终止端 $\xi=1$，可以写出两端状态参数关系的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1=\begin{bmatrix} S(k) & \dfrac{1}{\alpha}T(k) & \dfrac{1}{\alpha^2EI}U(k) & \dfrac{1}{\alpha^3EI}V(k) \\ \alpha V(k) & S(k) & \dfrac{1}{\alpha EI}T(k) & \dfrac{1}{\alpha^2EI}U(k) \\ \alpha^2EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) & \dfrac{1}{\alpha}T(k) \\ \alpha^3EIT(k) & \alpha^2EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_0 \tag{3-7}$$

式(3－7)建立了均质轴段在不计轴向力、不计转动惯量时两端截面上状态参数之间的关系，其中的方阵称为均质轴段的传递矩阵，记为

$$
T_{sh} = \begin{bmatrix} S(k) & \frac{1}{\alpha}T(k) & \frac{1}{\alpha^2 EI}U(k) & \frac{1}{\alpha^3 EI}V(k) \\ \alpha V(k) & S(k) & \frac{1}{\alpha EI}T(k) & \frac{1}{\alpha^2 EI}U(k) \\ \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) & \frac{1}{\alpha}T(k) \\ \alpha^3 EIT(k) & \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) \end{bmatrix} \tag{3-8}
$$

(3) 无质量轴段的传递矩阵

若轴段的横截面尺寸相对较小,质量也比较小,可以将质量折合到两端质量站,轴段本身成为无质量的弹性轴段,沿用图3-2所示的坐标系及符号,但 $m\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\mathrm{d}Z=0$,若不计轴向力 N 的影响,可写出如下力的平衡与位移协调关系

$$
\begin{cases} X_i = X_{i-1} + l\theta_{i-1} + \alpha_{12}M_i - \alpha_{11}Q_i \\ \theta_i = \theta_{i-1} + \alpha_{22}M_i - \alpha_{21}Q_i \\ M_i = M_{i-1} + l\,Q_{i-1} \\ Q_i = Q_{i-1} \end{cases} \tag{3-9}
$$

式中,α_{11}、α_{12}、α_{21}与 α_{22}为轴段的影响系数,由材料力学已知为

$$
\begin{cases} \alpha_{11} = \dfrac{l^3}{3EI} + \dfrac{\beta l}{GA} \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = \dfrac{l^2}{2EI} \\ \alpha_{22} = \dfrac{l}{EI} \end{cases} \tag{3-10}
$$

式中,β 为截面形状系数,对于圆形实心轴段取 $\beta=10/9$,空心薄壁轴段取 $\beta=1.5$;当不计剪切效应时,取 $\beta=0$。

将式(3-10)代入式(3-9),可得

$$
\begin{cases} X_i = X_{i-1} + l\theta_{i-1} + \dfrac{l^2}{2EI}M_{i-1} + \dfrac{l^3}{6EI}(1-\nu)Q_{i-1} \\ \theta_i = \theta_{i-1} + \dfrac{1}{EI}M_{i-1} + \dfrac{l^2}{2EI}Q_{i-1} \\ M_i = M_{i-1} + lQ_{i-1} \\ Q_i = Q_{i-1} \end{cases} \tag{3-11}
$$

式中,$\nu=6EI\beta/GAl^2$,为剪切效应系数,若不计剪切效应,$\beta=0$,$\nu=0$。式(3-11)可写成矩阵形式如下:

$$
\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI}(1-\nu) \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i-1} \tag{3-12}
$$

上式中的方阵为无质量弹性轴段在无轴向力情况下的传递矩阵,记为

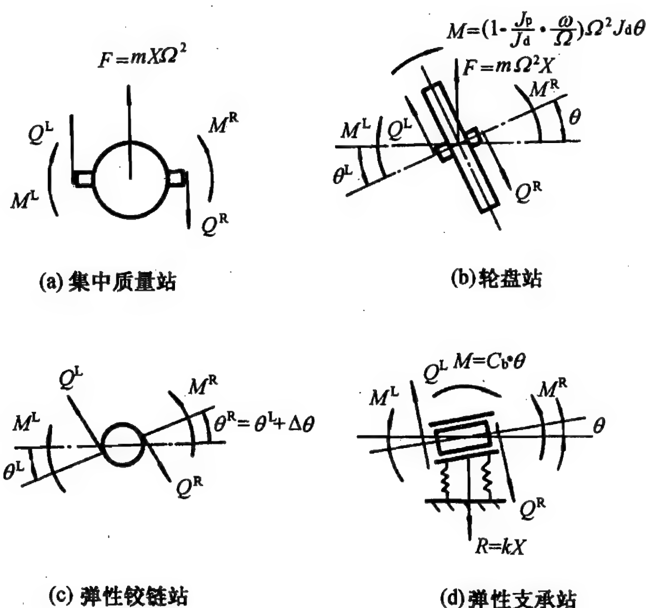
$$
T_{sh}=\begin{bmatrix}1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3}{6EI}(1-\nu)\\ 0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI}\\ 0 & 0 & 1 & l\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3-13}
$$

若轴段受到沿 OZ 轴的力 N 的作用,可导得

$$
T_{sh}=\begin{bmatrix}1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3}{6EI}(1-\nu)\\ 0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI}\\ 0 & Nl & 1+\dfrac{l^2}{2EI}N & l+\dfrac{l^3N}{6EI}(1-\nu)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3-14}
$$

3.1.1.3　轴段间的传递矩阵

从前一轴段的终止端,通过站,到后一轴段的起始端,状态参数的传递矩阵取决于该站的性质。图 3-4 表示常见的 4 种站:集中质量站、轮盘站、弹性铰链站与弹性支承站。



(a) 集中质量站　　(b)轮盘站

(c) 弹性铰链站　　(d)弹性支承站

图 3-4　几种典型的站的状态参数关系

(1) 集中质量站的传递矩阵

如图 3-4(a)所示,通过质量为 m 的集中质量站时,站的左右两侧截面上的状态参数的关系为

$$X^R = X^L$$

$$\theta^R = \theta^L$$

$$M^R = M^L$$

$$Q^{R}=Q^{L}+m\Omega^{2}X^{L}$$

式中，L、R分别代表站的左、右侧截面。

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}^{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\Omega^{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}^{L} \tag{3-15}$$

式中方阵为集中质量站的传递矩阵：

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{m}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\Omega^{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-16}$$

(2) 轮盘站的传递矩阵

如图3-4(b)所示，由于轮盘不仅具有质量 m，而且具有转动惯量 J_{p}、J_{d}，转动时产生了相应的陀螺力矩，其两侧截面上的状态参数之间的关系可表示为

$$\begin{cases} X^{R}=X^{L} \\ \theta^{R}=\theta^{L} \\ M^{R}=M^{L}+\left(1-\dfrac{\omega}{\Omega}\dfrac{J_{\mathrm{p}}}{J_{\mathrm{d}}}\right)J_{\mathrm{d}}\Omega^{2}\theta^{L} \\ Q^{R}=Q^{L}+m\Omega^{2}X^{L} \end{cases} \tag{3-17}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}^{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\dfrac{\omega}{\Omega}\dfrac{J_{\mathrm{p}}}{J_{\mathrm{d}}}\right)J_{\mathrm{d}}\Omega^{2} & 1 & 0 \\ m\Omega^{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}^{L} \tag{3-18}$$

为计算简便，引用当量转动惯量，$J=\left(1-\dfrac{\omega}{\Omega}\dfrac{J_{\mathrm{p}}}{J_{\mathrm{d}}}\right)J_{\mathrm{d}}$，上式中方阵即传递矩阵可表示为

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & J\Omega^{2} & 1 & 0 \\ m\Omega^{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-19}$$

(3) 弹性铰链站的传递矩阵

如图3-4(c)所示，无质量弹性铰链站具有一定的抗弯刚度，通过弹性铰链站时，只能传递弯矩，$M=C_{\mathrm{h}}\cdot\Delta\theta$，其中 C_{h} 为弹性铰链站的抗弯刚度系数。由于弯矩的作用，通过弹性铰链站后，截面转角发生突变，增量为 $\Delta\theta$。于是可导出如下状态参数关系：

$$
\begin{cases}
X^{R}=X^{L}\\
\theta^{R}=\theta^{L}+\dfrac{1}{C_{h}}M^{L}\\
M^{R}=M^{L}\\
Q^{R}=Q^{L}
\end{cases}
\tag{3-20}
$$

写成矩阵形式为

$$
\begin{bmatrix} X\\ \theta\\ M\\ Q \end{bmatrix}^{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/C_{h} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X\\ \theta\\ M\\ Q \end{bmatrix}^{L}
\tag{3-21}
$$

式中方阵为弹性铰链的传递矩阵：

$$
\boldsymbol{T}_{h}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/C_{h} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\tag{3-22}
$$

若弹性铰链的抗弯刚度很大，$C_{h}\to\infty$，则 $1/C_{h}\to 0$，铰链两侧的轴段可近似当作一体，如同不存在弹性铰链。若弹性铰链的抗弯刚度很小，$C_{h}\to 0$，则 $1/C_{h}\to\infty$，传递矩阵变为奇异，弹性铰链变成活动球铰。实际上，当 C_{h} 比较小时，$1/C_{h}$ 已相当大，可能引起传递矩阵运算时出现数值失稳。在这种情况下，参数传递中断，应作为边界条件处理，引入约束条件及新的状态参数。

(4) 弹性支承站的传递矩阵

如图 3-4(d)所示为具有横向刚度 k 与角向刚度 C_{b} 的弹性的支承。通过这种弹性支承时，支承将产生相应的支反力 $R=kX$ 与支反力矩 $M_{b}=C_{b}\theta$。可以写出弹性支承站两侧状态参数之间的关系为

$$
\begin{cases}
X^{R}=X^{L}\\
\theta^{R}=\theta^{L}\\
M^{R}=C_{b}\theta+M^{L}\\
Q^{R}=-kX^{L}+Q^{L}
\end{cases}
\tag{3-23}
$$

写成相应的矩阵形式为

$$
\begin{bmatrix} X\\ \theta\\ M\\ Q \end{bmatrix}^{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & C_{b} & 1 & 0\\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X\\ \theta\\ M\\ Q \end{bmatrix}^{L}
\tag{3-24}
$$

式中方阵为具有横向与角向弹性支承站的传递矩阵：

$$
\boldsymbol{T}_{s}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & C_{b} & 1 & 0\\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\tag{3-25}
$$

若弹性支承仅具有横向刚度，无角向刚度，则 $C_{b}=0$。若弹性支承的横向刚度或角向刚度

太大，$C_b \to \infty$或$k \to \infty$，传递矩阵奇异。实际上，只要C_b或k的数值超过某个范围，就可能使传递矩阵计算中出现数值失稳。在这种情况下，参数传递只能到此站为止，并引入约束条件与新的状态参数，重新开始参数传递。

(5) 广义站的通用传递矩阵

综合图3-4的(a)~(d)四种情况，可组成一广义站。这种广义站既包含质量、转动惯量，又存在弹性铰链及弹性支承，于是可以写出通用的传递矩阵$\boldsymbol{T}_{st}$：

$$\boldsymbol{T}_{st}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/C_h & 0\\ 0 & C_b+J\Omega^2 & 1 & 0\\ m\Omega^2-k & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3-26}$$

3.1.1.4　综合轴段的传递矩阵

在实际使用中，将一个广义站和一个无质量轴段组合成一个综合轴段，形成综合轴段的传递矩阵使用起来更为方便，它表示为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_{sh}\cdot\boldsymbol{T}_{st}=\begin{bmatrix}1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3}{6EI}(1-\nu)\\ 0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI}\\ 0 & Nl & 1+\dfrac{l^2}{2EI}N & l+\dfrac{l^3N}{6EI}(1-\nu)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/C_h & 0\\ 0 & C_b+J\Omega^2 & 1 & 0\\ m\Omega^2-k & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+\dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI}(m\Omega^2-k) & l\left[1+\dfrac{l}{2EI}(C_b+J\Omega^2)\right] & \dfrac{l^2}{2EI}+\dfrac{l}{C_h} & \dfrac{l^3}{6EI}(1-\nu)\\ \dfrac{l^2}{2EI}(m\Omega^2-k) & 1+\dfrac{l}{EI}(C_b+J\Omega^2) & \dfrac{l}{EI}+\dfrac{l}{C_h} & \dfrac{l^2}{2EI}\\ \left[l+\dfrac{l^3(1-\nu)N}{6EI}\right](m\Omega^2-k) & Nl+\left(1+\dfrac{l^2N}{2EI}\right)(C_b+J\Omega^2) & \dfrac{Nl}{C_h}+1+\dfrac{l^2N}{2EI} & l+\dfrac{l^3(1-\nu)N}{6EI}\\ m\Omega^2-k & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3-27}$$

3.1.1.5　临界转速计算

(1) 边界条件

作为转子-支承系统分析模型的边界条件，是指起始端(左端)与终止端(右端)的截面状态参数，它们取决于该站的约束条件。一般有自由端、刚性铰支端、刚性固持端、弹性支承端与外伸盘端。表3-1列出此5种边界情况对应的状态参数及必须满足的条件。

表3-1　各种边界情况的条件

边界情况	必须满足的条件	状态参数
自由端	$M=0, Q=0$	$[X\ \ \theta\ \ 0\ \ 0]^T$
刚性铰支	$X=0, M=0$	$[0\ \ \theta\ \ 0\ \ Q]^T$
刚性固持	$X=0, \theta=0$	$[0\ \ 0\ \ M\ \ Q]^T$
弹性支承	$M=0, Q=-kX$	$[X\ \ \theta\ \ 0\ \ -kX]^T$
外伸盘	$M=J\Omega^2\theta, Q=m\Omega^2X$	$[X\ \ \theta\ \ J\Omega^2\theta\ \ m\Omega^2X]^T$

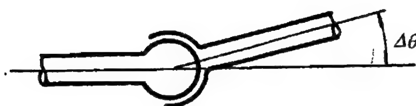
实际上,绝对的刚性铰支和刚性固持边界是不存在的。轴承具有一定的弹性,机匣系统也具有一定的柔性。由于各种不同的边界情况应满足的条件是不同的,为了使计算机程序简单化,可以一律采用自由端,必须满足的边界条件恒为 $M=0, Q=0$。当实际系统边界不是自由端时,可以人为加上虚拟的一无质量轴段,使起始端与终止端恒为自由端。

(2) 转子-支承系统中间球铰与刚性铰支的处理

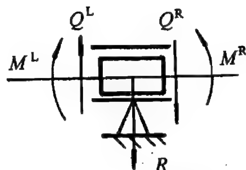
在转子-支承系统中间存在球铰($C_h=0$)或刚性铰支($k\to\infty$)时,状态参数的直接传递中断。这里将引入一个新的状态参数,与此同时,也提供了一约束条件,可以建立一个补充方程。

球铰如图3-5(a)所示,其两侧截面上的状态参数关系为

$$\begin{cases} X^R = X^L \\ \theta^R = \theta^L + \Delta\theta \\ M^R = M^L = 0 \\ Q^R = Q^L \end{cases} \tag{3-28}$$



(a) 球铰



(b) 刚性铰支座

图3-5 轴系中间的球铰与刚性铰支

也就是说,球铰只传递横向位移与切力,不传递弯矩,不保证转角的连续性。因此,$\Delta\theta$ 是个未知量,θ^R 是一个新的未知状态参数,它不是单纯由前面的状态参数所能确定的。同时,不能传递弯矩提供了一个约束条件,$M^R=M^L=0$。增加了一个未知状态参数,提供了一个补充方程,系统仍然是静定的。

中间刚性铰支如图3-5(b)所示。转轴在此站仍然是一个连续的整体,支承的左右两侧保持转角相等、弯矩相等,横向位移不仅保持相等而且必须为零,这是一个约束条件。与此同时,为了使横向位移为零而引入的相应的支反力 R,则是一个新的未知参数。刚性铰支两侧状态参数关系可表示为

$$\begin{cases} X^R = X^L = X = 0 \\ \theta^R = \theta^L \\ M^R = M^L \\ Q^R = Q^L - R \end{cases} \tag{3-29}$$

同样的,增加了一个未知参数 R,由约束条件提供了一个补充方程 $X=0$,系统仍然是静定的。

(3) 频率方程

转子-支承系统右端(终止端)的状态参数可以用传递矩阵表示成为其左端(起始端)的状态参数的函数,即

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix} = T_n \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{n-1} = T_n \cdot T_{n-1} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{n-2} = \cdots\cdots = \prod_{i=1}^{n} T_i \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_0 = T \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_0 \tag{3-30}$$

总传递矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为各综合轴段传递矩阵 $\boldsymbol{T}_i$ 依次的乘积，仍然是 4×4 方阵：

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \tag{3-31}$$

已经规定左右两端均为自由端，即

$$M_n = 0, Q_n = 0; M_0 = 0, Q_0 = 0$$

于是，由式(3-30)可写出如下两个方程式：

$$\begin{cases} M_n = T_{31}X_0 + T_{32}\theta_0 = 0 \\ Q_n = T_{41}X_0 + T_{42}\theta_0 = 0 \end{cases} \tag{3-32}$$

当转子-支承系统振动时，X_0 与 θ_0 不能同时皆为零，因此，满足方程(3-32)的非平凡解为其系数行列式为零，即：

$$\begin{vmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} = 0 \tag{3-33}$$

这便是无中间球铰、无中间刚性铰支的转子-支承系统求解临界转速的频率方程。

元素 T_{ij}包含了各综合轴段有关的几何、物理参数及运动参数，其中仅固有频率 Ω 为未知参数。因此，解频率方程可求得系统的各阶临界转速。

(4) 频率方程的解法

频率方程(3-33)是频率 Ω 的 $2n$ 阶方程式，一般是不可能直接求解的，通常采用试算法，或采用频率扫描法。

假定一个频率值 Ω_1，可算出一个行列式余值 Δ_1，再假定另一个频率值 Ω_2，可算得另一个行列式余值 Δ_2，依此类推。当行列式余值为零即 $\Delta=0$ 时，则所对应之频率 Ω_c 便是系统的固有频率。为此可在规定的频率范围内，由下限频率开始，按一定的频率步长，计算行列式的余值，直到上限频率为止。行列式余值随频率的变化如图 3-6 所示，是一条光滑的正负交替的曲线。在行列式余值由正变负或由负变正的频率间隔中，必然存在一个频率，正好使行列式余值为零，即固有频率。在行列式余值变符号的频率间隔中，可采用弦割法或等分法逐次求解。采用弦割法一般只需迭代几次便迅速收敛到精确解。

(5) 振型的确定

在求得固有频率 Ω_c 后，将 Ω_c 代回振动方程(3-32)，可求得 X_0 与 θ_0 的比值。假定 $X_0=1$，于是 $\theta_0 = -\dfrac{T_{31}}{T_{32}}X_0 = -\dfrac{T_{31}}{T_{32}}$。根据各综合轴段的传递矩阵，可依次求得各站的截面上的状态参数：

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1 = T_1 \begin{bmatrix} X_0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

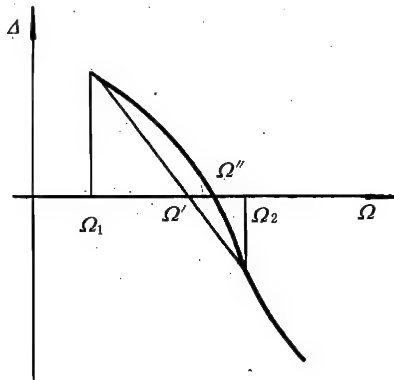


图3－6　解频率方程求固有频率示意图

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_2 = \boldsymbol{T}_2 \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1 = \boldsymbol{T}_2 \cdot \boldsymbol{T}_1 \begin{bmatrix} X_0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_n = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} X_0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

为了便于比较，可令 $X_{max}=1$，得到归一化的振型。计算所得到的各截面上的状态参数可再与边界条件相比，以检查计算结果的准确性。

(6) 存在附加约束情况的频率方程

当转子－支承系统中存在中间球铰或刚性铰支时，状态参数的直接传递中断，这种系统称为多跨转子。状态参数从起始端开始传递，到中间约束点中断，完成一跨的状态参数传递。根据中间约束点的性质写出相应的约束方程，以该约束点作为新的起始端。该起始端截面上的状态参数除表示为原来起始端的状态参数的函数外，还引入一个新的状态参数。继续传递到出现新的约束点为止，仍然用上述方法处理后，重新开始传递，直到最后终止端，可写出以初始端未知状态参数及各中间约束点新引入的未知参数表示的终止端边界条件建立的两个方程式。联立两个方程及各中间约束点的补充方程，组成包含 $N+2$ 个未知状态参数的 $N+2$ 个方程组，其相应的系数行列式为零的方程，便是该多跨转子系统的频率方程，其中 N 为中间约束点总数。方程的解法与单跨转子类同。

3.1.1.6　传递矩阵法的优缺点

传递矩阵法对于单跨、多跨的单转子－支承系统的临界转速计算是十分简便有效的，计算机程序编制容易，计算结果准确，不会漏掉模态，在个人计算机上就可以进行计算。因此，得到普遍的采用。

由于传递矩阵法是逐段逐站依次传递，特别适宜于链式结构；但当存在分支结构时，常规的传递矩阵法就难以处理，必须采取特殊的处理方法。由于状态参数与传递矩阵逐段逐站运

算，若轴系段站太多，数值计算的积累误差大大增加，甚至可能导致数值失稳。此外，在模型处理上，如果个别环节的参数与其他参数的数值太不谐调，如弹性支承刚度过大、弹性铰链过于柔软，直接传递计算时也会导致数值失稳而无法求得正确结果。数值失稳与行列式余值正常变号有本质区别，可由图 3 - 7看出。正常行列式余值随频率的变化曲线是连续光滑的；而数值失稳时，行列式余值的变化是突跃式的、无规律的，也没有一一对应的关系。而且，数值失稳时，即使是行列式余值为零的频率下，也得不到合理的振型，边界条件也不可能完全满足。

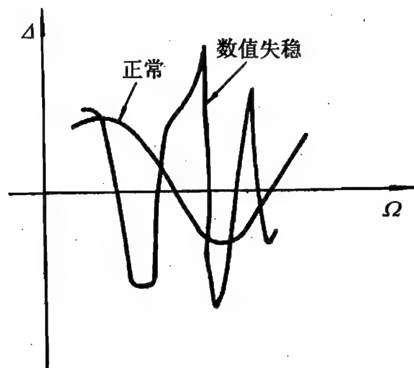


图 3 - 7　行列式正常余值与数值失稳

3.1.1.7　算例

图 3 - 8(a)为一发动机转子示意图，它由离心式压气机的导风轮、叶轮、鼓筒轴、轴流式的双级涡轮转子与前后轴颈组成，转子的前支承安放在一鼠笼式弹性支承中，后支承为一滚棒轴承，安放在一柔性的特殊机匣框架之中。计算此转子 - 支承系统的临界转速。

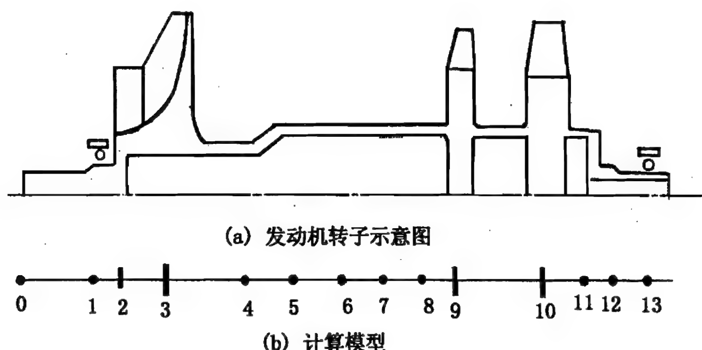


图 3 - 8　转子 - 支承系统简图及计算模型

(1) 系统的模型

根据这一转子 - 支承系统的结构特点，将离心压气机叶轮、双级涡轮转子均作为轮盘站处理，离心压气机导风轮仅以集中质量站处理。由于鼓筒轴具有一定长度，为考虑其质量的影响，分为两段，分开点上以集中质量站代表。前后两个支承均以集中质量的弹性支承代表，即质量弹簧站。所有轴段均以无质量弹性轴段模型代表，轴段的质量平均分配到两侧的站上。计算模型如图 3 - 8(b)所示。为了计算程序的简便统一，在模型两端均加一虚拟轴段，使起始端与终止端均为自由端。

(2) 原始数据

在建立模型的基础上，根据实际转子的几何尺寸、材料性质，准备好下列原始数据：

各轴段的材料弹性模量 E、截面惯性矩 I、轴段长度 l、轴段材料密度 ρ。如要考虑剪切效应，则应具有剪切模量 G、截面系数 β、横截面积 A，以便计算剪切效应系数。在本算例中不考虑剪切效应。

根据轮盘材料与几何尺寸，计算轮盘站的集中质量 m、极转动惯量 J_p、赤道转动惯量 J_d。

如轮盘的厚度直径比值较小(如 $H/D \leqslant 1/4$)时,可按薄盘假设,取 $J_p/J_d = 2$。按计算临界转速的要求,$\omega = \Omega$,即同步正进动,计算当量转动惯量 J。

根据轴承、弹性支承的具体结构及特性,计算其集中质量 m 与弹簧系数 k。

于是可列出计算用的原始数据如表3-2所示。

(3) 程序框图

用传递矩阵法计算转子-支承系统临界转速的程序是比较简单的,其基本框图如图 3-9 所示。

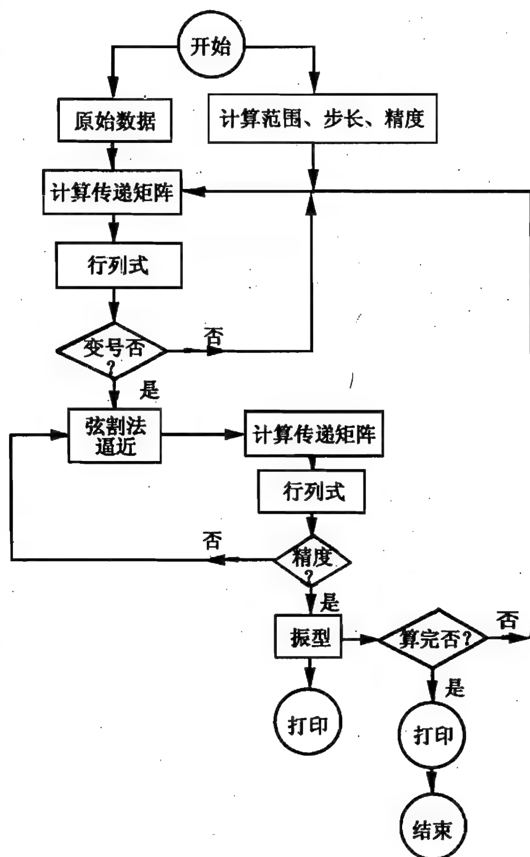


图 3-9　计算程序框图

计算频率域、步长及精度要求:频率域由起始频率与终止频率确定。一般可取零为起始频率,以免遗漏最低阶临界转速;终止频率可取转子-支承系统最大工作转速的两倍左右,若在此范围内无临界转速,则可扩延到计算出一阶临界转速为止。频率步长不宜过大,以免成对漏掉模态;但也不必太小,以免过分增加计算时间。一般频率步长可取 10~100 rad/s。精度要求对于工程需求而言,1 rad/s 的精度已足够;然而这对于振型的准确性影响较大。一般可取精度要求为 0.1~0.01 rad/s,在计算机中通过迭代收敛,是很容易达到的。

表 3-2　算例的原始数据

E(N/m²)	I(m⁴)	l(m)	m(kg)	J_p(kg·m²)
2.1E11	4.9078E-8	0.034	0	0
2.1E11	1.637E-6	0.047	2.51	0.00228
2.1E11	5.34E-7	0.052	2.96	0.013496
1.992E11	9.486E-7	0.039	1.92	0
1.992E11	9.486E-7	0.024	0.1401	0
1.992E11	9.486E-7	0.024	0.1401	0
1.992E11	1.596E-6	0.042	0.1401	0
1.992E11	1.596E-6	0.032	0.992	0
1.992E11	1.596E-6	0.065	5.5	0.038
1.992E11	1.596E-6	0.034	6.25	0.07938
2.1E11	1.476E-6	0.024	0.8315	0
2.1E11	5.007E-8	0.027	0.134	0

临界转速的迭代逼近：当行列式余值出现变号时，判断在此频率间隔中存在一个临界转速，程序进入迭代逼近的子程序。采用弦割法确定下一个迭代的计算频率，始终在最相近的两个行列式余值变号的频率之间进行逼近，直到满足规定的计算精度为止。

(4) 计算结果

经计算得此发动机转子-支承系统前两阶临界转速分别为 $n_{c1}=9840$ r/min，$n_{c2}=19500$ r/min。一阶临界转速为接近刚体平动振型，二阶临界转速为接近刚体俯仰摆动振型，如图3-10所示。一阶临界转速仅在发动机起动过程中瞬时通过，二阶临界转速介于地面慢车与空中慢车转速之间，也是在加速过程中通过。由于采取了相应的阻尼措施，可以保证运行安全。该转子-支承系统的三阶临界转速虽是轴线弯曲振型，但已远远高于发动机的最大工作转速，已不构成对发动机转子-支承系统平稳运行的任何影响。

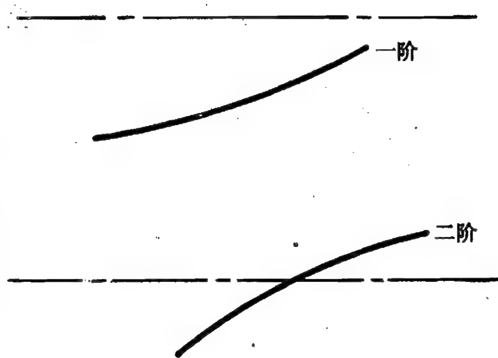


图3-10　振型图

3.1.2　Riccati 传递矩阵法

Riccati 传递矩阵法保持了3.1.1所述传递矩阵法的简洁、准确、易于编程以及对计算机容量要求低等优点，针对传递矩阵法在段数过多时误差积累造成计算精度下降，以及由于个别段站参数数值不协调造成矩阵病态或奇异导致数值失稳的缺陷，在传递矩阵法的基础上作了改进。

3.1.2.1　Riccati 传递矩阵及其递推公式

(1) Riccati 传递矩阵

Riccati 传递矩阵法所采用的计算模型、坐标系及有关状态参数的基本符号规定与3.1.2有关规定完全一样，各综合轴段的传递矩阵的建立也完全相同。但在 Riccati 传递矩阵法中，将同一截面内的状态参数列阵划分为两个分块，即变形参数块与内力参数块，表示为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ \cdots \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \cdots \\ f \end{bmatrix} \tag{3-34}$$

于是，传递矩阵法所表示的相邻两截面上的状态参数之间的关系式

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i+1} = \boldsymbol{T}_i \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i$$

可改写成为

$$\begin{bmatrix} e \\ \cdots \\ f \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{11} & \vdots & \boldsymbol{T}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{T}_{21} & \vdots & \boldsymbol{T}_{22} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} e \\ \cdots \\ f \end{bmatrix}_i \tag{3-35}$$

注意,式(3-35)中的 $\boldsymbol{T}_{11}$、$\boldsymbol{T}_{12}$、$\boldsymbol{T}_{21}$、$\boldsymbol{T}_{22}$是 2×2 子矩阵,不是一个元素。

将式(3-35)展开得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{i+1} = [\boldsymbol{T}_{11}]_i \boldsymbol{e}_i + [\boldsymbol{T}_{12}]_i \boldsymbol{f}_i \\ \boldsymbol{f}_{i+1} = [\boldsymbol{T}_{21}]_i \boldsymbol{e}_i + [\boldsymbol{T}_{22}]_i \boldsymbol{f}_i \end{cases} \qquad (3-36$$

建立同一截面上变形参数 $\boldsymbol{e}$ 与内力参数 $\boldsymbol{f}$ 之间的关系,即 Riccati 变换

$$\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{S}_i \boldsymbol{e}_i \qquad (3-37$$

式中,方阵 $\boldsymbol{S}_i$称为第 i 截面上的 Riccati 传递矩阵,它建立了同一截面上状态参数之间的关系而与计算模型划分成多少个综合轴段没有直接的关系。

(2) 递推公式

将式(3-37)代入式(3-36)的第一式可得

$$\boldsymbol{e}_i = [\boldsymbol{T}_{11} + \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{S}]_i^{-1} \boldsymbol{e}_{i+1} \qquad (3-38$$

再将式(3-37)代入式(3-36)的第二式,并引入式(3-38)的关系,可得

$$\boldsymbol{f}_{i+1} = [\boldsymbol{T}_{21} + \boldsymbol{T}_{22}\boldsymbol{S}]_i [\boldsymbol{T}_{11} + \boldsymbol{T}_{12} \cdot \boldsymbol{S}]_i^{-1} \boldsymbol{e}_{i+1} \qquad (3-39$$

对比式(3-37)与式(3-39),可见式(3-39)构成了第 $i+1$ 截面上的内力参数列与变形参数列之间的 Riccati 变换,于是可以写出

$$\boldsymbol{S}_{i+1} = [\boldsymbol{T}_{21} + \boldsymbol{T}_{22}\boldsymbol{S}]_i [\boldsymbol{T}_{11} + \boldsymbol{T}_{12} \cdot \boldsymbol{S}]_i^{-1} \qquad (3-40$$

式(3-40)便是第 $i+1$ 截面上的 Riccati 传递矩阵,也就是说,式(3-40)是 Riccati 传递矩阵的递推公式。将式(3-27)所代表的综合轴段传递矩阵代入式(3-40),可写出

$$\boldsymbol{S}_{i+1} = \left\{ \begin{bmatrix} (l + \dfrac{Nl^3(1-\nu)}{6EI})(m\Omega^2 - k) & Nl + (1 + \dfrac{Nl^2}{2EI})(C_b + J\Omega^2) \\ m\Omega^2 - k & 0 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \dfrac{Nl}{C_h} + 1 + \dfrac{Nl^2}{2EI} & l + \dfrac{Nl^3(1-\nu)}{6EI} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i \cdot \boldsymbol{S}_i \right\} \cdot$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI}(m\Omega^2 - k) & l(1 + \dfrac{l}{2EI})(C_b + J\Omega^2) \\ \dfrac{l^2}{2EI}(m\Omega^2 - k) & 1 + \dfrac{l}{EI}(C_b + J\Omega^2) \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \dfrac{l^2}{2EI} + \dfrac{l}{C_h} & \dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI} \\ \dfrac{l}{EI} + \dfrac{l}{C_h} & \dfrac{l^2}{2EI} \end{bmatrix}_i \cdot \boldsymbol{S}_i \right\}^{-1}$$

(3-41

3.1.2.2 用 Riccati 传递矩阵法计算临界转速的基本原理与步骤

用 Riccati 传递矩阵法计算转子-支承系统的临界转速的基本原理是基于按综合轴段的传递矩阵与同一截面上的内力与变形参数之间的 Riccati 传递矩阵进行的,轴系各站的内力与变形参数必须满足已知的边界条件,从而确定轴系的临界转速及相应的振型。

计算的基本步骤如图 3-11 所示框图。

(1) 系统计算模型的建立

与常规的传递矩阵法一样,将转子-支承系统离散成为若干轴段与站。模型的简化与分段原则与 3.1.1.1 完全相同,并建立相应的综合轴段,准备各综合轴段有关的原始数据:几何参数如 l、I,物理参数如 E、ν、C_h、C_b、k、m、J_p 与 J_d,运动参数 Ω 与外力条件 N 等。

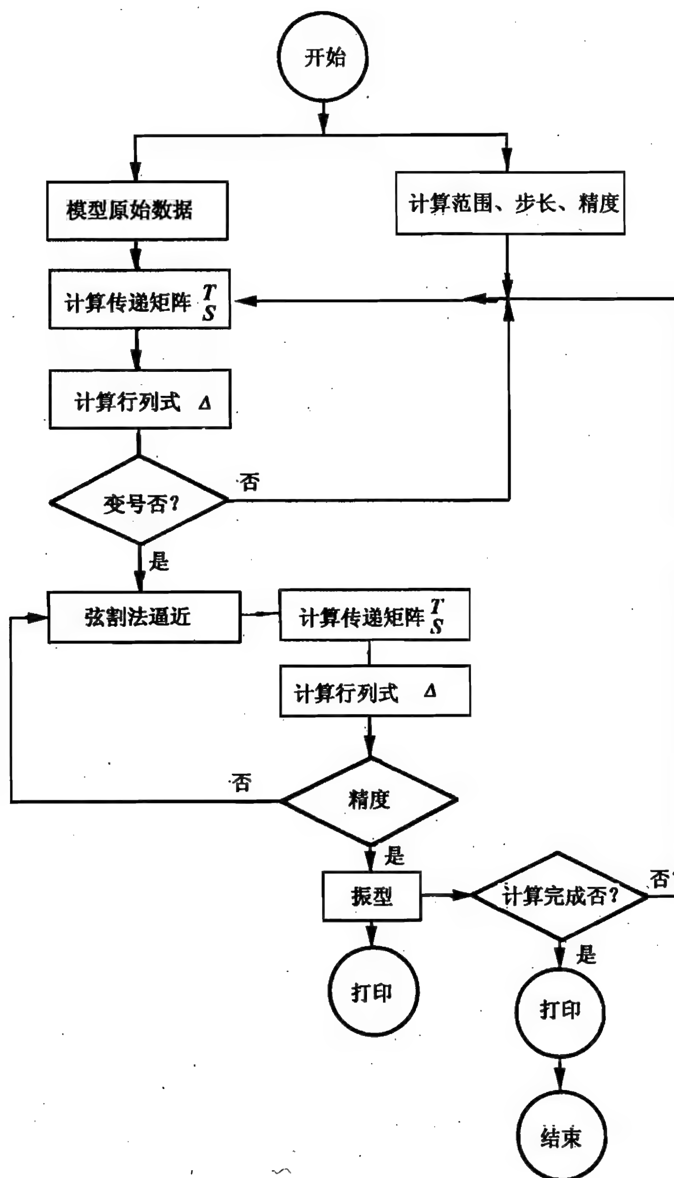


图 3－11　Riccati 传递矩阵法计算程序框图

(2) 边界条件

实际的边界条件可能是多种多样的：自由端、刚性支承、弹性支承、悬臂盘、刚性固持等。为了计算程序的简化与分析方便，一律假定为自由端，于是起始端的边界条件为

$$f_1=0, e_1\neq 0$$

终止端的边界条件为

$$f_n=0, e_n\neq 0$$

对于实际上为非自由端边界的，可以虚拟加一自由轴段，使其变为自由端边界。

根据起始端的边界条件，利用(3－37)式，可得到起始端截面上的 Riccati 传递矩阵为

$$S_1 = 0$$

(3) 传递矩阵计算

给定一频率值，按照式(3-27)计算第1综合轴段的传递矩阵，并按式(3-40)计算截面上的Riccati传递矩阵 S_2。继而计算第2综合轴段的传递矩阵 T_2，并根据 T_2 与 S_2，按式(3-40)确定第3截面上的Riccati传递矩阵 S_3。依次按式(3-27)及式(3-40)求得各轴段的传递矩阵及各截面上的Riccati传递矩阵，直到终止端的 T_n、S_n。

(4) 频率方程

在求得右自由端(终止端)截面上的Riccati传递矩阵 S_n 后，根据边界条件建立频率方程。右端截面应满足如下条件：

$$f_n = S_n e_n = 0 \tag{3-42}$$

根据右端的边界条件，式(3-42)中的方阵 S_n 必须满足

$$\Delta = \det S_n = \begin{vmatrix} S_{n11} & S_{n12} \\ S_{n21} & S_{n22} \end{vmatrix} = 0 \tag{3-43}$$

由于所给定的频率一般不会正好是轴系的固有频率，无法满足频率方程(3-43)，实际上存在行列式余值，$\Delta \neq 0$。于是，重复假设频率值 Ω，重新计算各综合轴段的传递矩阵 T_i 和各截面上的Riccati传递矩阵 S_i，然后按式(3-43)计算行列式余值，直到找到使 $\Delta = 0$ 的频率 Ω_c 为止。这一寻找固有频率的过程，仍然可采用扫频法。即从初始频率开始，按适当的频率步长依次进行计算，直到频率方程的行列式余值变号，可判断在此频率间隔中应存在一个固有频率。于是，采用弦割法或其他有效的迭代逼近方法，求得满足精度要求的临界转速。图3-12为频率方程(3-43)的行列式余值 Δ 随频率 Ω 的变化曲线。由图可见，当行列式余值的绝对值由大逐渐变小，直到通过零点改变符号，此零点对应的频率便是轴系的固有频率。然而，同时由图可见，在 Δ—Ω 关系中还存在另一种变号情况，即行列式余值的绝对值无限增大，突然变号，再由无穷大迅速减小。这一变号点不是系统的固有频率，而是相当于系统的反共振频率，在程序中必须加以识别并予以排除。

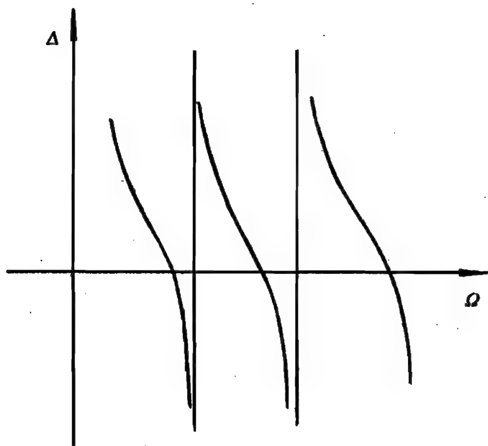


图3-12 Riccati传递矩阵法的 Δ—Ω 关系

(5) 确定振型

在求得转子-支承系统的一个临界转速 Ω_c 之后，确定其相应的振型及各截面内力参数既是分析转子-支承系统的振动特性的需要，也可以从这些参数分析判断计算结果的合理性。由式(3-42)展开得

$$\begin{cases} S_{n11} X_n + S_{n12} \theta_n = 0 \\ S_{n21} X_n + S_{n22} \theta_n = 0 \end{cases}$$

解此方程可得右自由端的变形参数 X_n 与 θ_n 之间的关系：

$$\theta_n = -\frac{S_{n11}}{S_{n12}} X_n = -\frac{S_{n21}}{S_{n22}} X_n = \alpha X_n \tag{3-44}$$

或可写为

$$e_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} X_n \tag{3-45}$$

式中,X_n 可取为任意数,为方便可先取为1。

根据右自由端的这一变形参数条件,利用已求得的各截面的 Riccati 传递矩阵 $\boldsymbol{S}_i$ 及各综合轴段的传递矩阵 $\boldsymbol{T}_i$,由式(3-37)、(3-38),自右至左依次求得 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{f}_i$:

$$\boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{S}_n \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{S}_n \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} X_n$$

$$\boldsymbol{e}_{n-1} = [\boldsymbol{T}_{11} + \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{S}]_{n-1}^{-1} \boldsymbol{e}_n = [\boldsymbol{T}_{11} + \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{S}]_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} X_n$$

$$\boldsymbol{f}_{n-1} = \boldsymbol{S}_{n-1} \boldsymbol{e}_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{e}_i = [\boldsymbol{T}_{11} + \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{S}]_i^{-1} \boldsymbol{e}_{i+1}$$

$$\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{S}_i \boldsymbol{e}_i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{e}_1 = [\boldsymbol{T}_{11}]_1^{-1} \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{e}_1$$

计算结果,$\boldsymbol{f}_1$ 一般不会等于零,即不完全满足左自由端的边界条件,但它必须是一个微小值,或者说,与其他截面上的内力参数相比,至少应小几个数量级,这才说明计算结果准确。

在求得各截面的变形参数 $\boldsymbol{e}_i$ 之后,为了便于振型分析与比较,可采取归一化处理,令最大位移 $X_{\max}=1$,求得归一化振型。在求得一个临界转速及相应振型之后,重新进入扫频过程,寻求下一个临界转速,直到频率上限为止。频率上限一般高于转子-支承系统最高运行转速的一倍,或至少应求出转子-支承系统的一个最低阶临界转速(当在一般频率上限范围内无临界转速时)。

3.1.2.3 Riccati 传递矩阵法的特点

(1) Riccati 传递矩阵法的优点

与常规传递矩阵法相比,Riccati 传递矩阵法的递推过程是利用了 Riccati 传递矩阵建立同一截面上的变形参数与内力参数的关系,并利用 Riccati 传递矩阵及综合轴段的传递矩阵建立相邻截面的变形参数之间的关系。此两关系式轮流依次递推,一直到最后的频率方程(3-43)也仅包含最后一个截面上的 Riccati 传递矩阵的元素。它只与最后一个综合轴段的传递矩阵及前一截面上的 Riccati 传递矩阵有直接关系,不像常规传递矩阵法的频率方程(3-33)是全部综合轴段传递矩阵的乘积所形成的元素。故不存在大量连乘过程中误差的积累与扩大,所以计算结果精度较高;而且也由于没有多段传递矩阵相乘,不存在个别轴段传递矩阵与其他传递矩阵数值不协调引起的矩阵病态或奇异,防止了运算的数值失稳。

(2) Riccati 传递矩阵法的缺点

由图3-12可以看到,频率方程(3-43)的行列式余值随频率的变化关系是不连续的,存在一系列奇点。由行列式余值变号确定了一个固有频率,随后而来的是行列式余值绝对值趋于无穷大而跳跃改变符号,相当于系统的一个反共振点。也就是行列式余值的改变符号依次是一个通过零点(固有频率)、一个通过无穷大(反共振频率)。因此,为了计算转子-支承系统的临界转

速，在程序中需要增加一个判别子程序，用来排除无穷大点。与此同时，由于通过零点与通过
穷大点的频率间隔相对较小，在计算中，频率步长不能取得太大，否则很可能漏掉模态。

此外，对于中间球铰、中间刚性铰支这类存在附加约束与引入未知参数的站，同样是不
直接传递与递推，需要采取改进的方法，或者以相应的弹性铰链及弹性支承代替，取较小的
链刚度与较高的支承刚度。但若球铰的刚度过小或支承刚度过大，仍可能使 Riccati 传递矩
计算中出现病态或奇异，导致式(3－41)计算中的矩阵求逆无法进行。

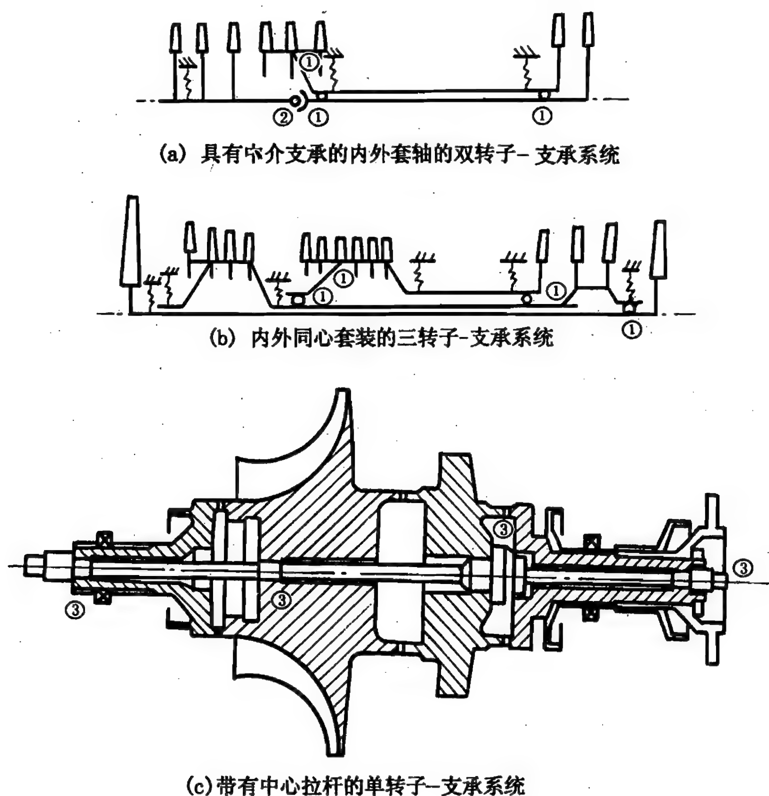
3.1.3 子结构传递矩阵法

航空发动机一般都具有复杂的转子－支承系统，它可能由两个或三个转速不同的内外
心套装的转子相互耦合组成，其中每个转子本身还可能包含球铰或刚性支承之类的结构，如
3－13 所示。对于这类复杂的转子－支承系统的临界转速，常规的传递矩阵法与 Riccati 传
矩阵法都无法进行计算，而必须采取某些改进措施，子结构传递矩阵法便是其中的一种方法。

3.1.3.1 复杂转子－支承系统的计算模型

(1) 常见的几种复杂转子－支承系统

图 3－13 所示是几种常见的航空发动机的复杂转子－支承系统。(a)为具有中介支承
内外套轴的双转子－支承系统，这是最常见的；(b)为内外同心套装的三转子－支承系统，这
类型虽不多见，但如果把双转子－支承系统的柔性机匣看成为不旋转的外套转子，则就成为



(a) 具有中介支承的内外套轴的双转子－支承系统

(b) 内外同心套装的三转子－支承系统

(c) 带有中心拉杆的单转子－支承系统

图 3－13 常见的复杂转子－支承系统

转子 - 支承系统;(c)为带有中心拉杆的单转子 - 支承系统,拉杆与主转子形成同转速的同心套装双转子结构。

(2) 划分子结构的原则

子结构传递矩阵法需将复杂的转子 - 支承系统划分为几个简单的转子 - 支承子系统(子结构),在分割面上分别在被分割开的两个链式转子上加上大小相等方向相反的待求载荷——横向力,有时还有弯矩。下列情况应分割成为单独的子结构。

a. 两个独立的转子之间的相互耦合点,如中介支承、异形结构转子的分支处,如图 3 - 13 的①处;

b. 在链式转子中具有刚性支承或活动球铰处,如图中的②处;

c. 在具有相同转速的套轴转子中,中心拉杆往往具有若干个凸台与外轴相配合,形成相互耦合,这些配合处应作为分割点,如图中的③处。

总之,将一个复杂转子 - 支承系统分割成尽可能少的若干个子结构,而每一个子结构可以用常规的传递矩阵法或 Riccati 传递矩阵法进行计算。

3.1.3.2　子结构传递矩阵法基本原理

对于每一个分割开的简单链式转子 - 支承系统子结构,按照 3.1.2 所述的建立模型的原则与方法,划分轴段与质量站,相应地建立各综合轴段的传递矩阵。于是任意一站(第 i 站)截面上的状态参数与该子结构中的起始截面(第 k 站)的状态参数之间的关系可表示为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i = \boldsymbol{T}_{i-1} \cdot \boldsymbol{T}_{i-2} \cdots \boldsymbol{T}_{k+1} \cdot \boldsymbol{T}_k \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_k = \prod_{j=k}^{i-1} \boldsymbol{T}_j \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_k \tag{3-46}$$

为了分析方便,引入单位状态列阵的概念。令起始截面 k 上的状态参数依次使其中一个参数为 1,其余为 0,称为 k 截面上状态参数为 1 的该单位状态参数列阵。在该单位参数列阵作用下引起的 i 截面上的状态参数列阵表示为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^{X_k=1} &= \prod_{j=k}^{i-1} \boldsymbol{T}_j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_k \\ \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^{\theta_k=1} &= \prod_{j=k}^{i-1} \boldsymbol{T}_j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_k \\ \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^{M_k=1} &= \prod_{j=k}^{i-1} \boldsymbol{T}_j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_k \\ \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^{Q_k=1} &= \prod_{j=k}^{i-1} \boldsymbol{T}_j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_k \end{aligned} \tag{3-47}$$

简写为

$$q_i^{rk} = \prod_{j=k}^{i-1} T_j q_k^{rk} \qquad (3-48)$$

式中，上角标 rk 代表第 k 站截面上的任一状态参数 r(即等于 1 的 X_k、θ_k、M_k 或 Q_k)；q_k^{rk}为第站截面上的某一状态参数 $rk=1$ 而其余状态参数均为 0 时的状态参数列阵，称为单位状态参数列阵；q_i^{rk}为在起始截面上单位状态列阵 q_k^{rk}作用下引起的第 i 站截面上的诸状态参数列阵。

利用整个复杂转子－支承系统的各个自由边界条件和各个分割面上的连接条件，可以出相应的方程式。

3.1.3.3　计算临界转速的基本方程

以图 3－13(a)所示轴对称双转子－支承系统为例，其子结构的划分及各转子－支承系子结构的轴段划分如图 3－14 所示。于是形成了 3 个链式转子－支承系统子结构：低压转(内转子)－支承系统子结构Ⅰ、高压转子(外转子)－支承系统子结构Ⅱ与高压压气机异型子子结构Ⅲ。其中子结构Ⅰ还包括了一个球铰、两个中介支承，他们将子结构Ⅰ分成为 4 跨各个分割点引入附加状态参数及相应的连接条件如下：

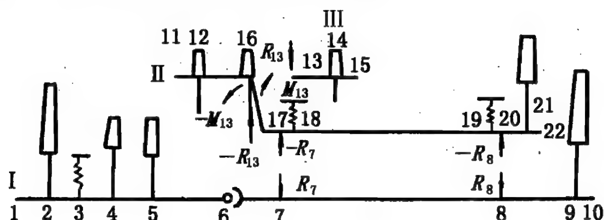


图 3－14　典型双转子的子结构模型

(1) 球铰引入的附加状态参数为附加转角 $\Delta\theta$；相应的连接条件为球铰不传递弯矩，即

$$M_6 = 0 \qquad (3-49)$$

(2) 中介支承 7 与 8 引入的附加状态参数为通过中介支承传递的横向力 R_7、R_8；相应的接条件为子结构Ⅰ与子结构Ⅱ在中介支承连接点上的位移协调关系，即

$$(X_7 - X_{17}) + R_7/k_7 = 0 \qquad (3-50)$$

$$(X_8 - X_{20}) + R_8/k_8 = 0 \qquad (3-51)$$

式中：X_7、X_8——分别为子结构Ⅰ上第 7、8 两截面的位移；

X_{17}、X_{20}——分别为子结构Ⅱ上第 17、20 两截面的位移；

k_7、k_8——分别为两个中介支承的刚度。

当支承刚度无穷大，即刚性支承时，式(3－50)、(3－51)分别可改写为

$$(X_7 - X_{17}) = 0 \qquad (3-50$$

$$(X_8 - X_{20}) = 0 \qquad (3-51$$

(3) 高压压气机异型转子子结构Ⅲ的起始端引入的状态参数：位移、转角、弯矩与切力：X_{13}、θ_{13}、M_{13}与 R_{13}。

子结构Ⅱ与子结构Ⅲ在分割面上具有一致的位移与转角，即

$$X_{13} = X_{16} \qquad (3-5$$

$$\theta_{13} = \theta_{16} \qquad (3-5$$

作为终止端可提供的边界条件有：

(1) 子结构Ⅰ右自由端截面上的弯矩与切力均应分别为零,即

$$M_{10}=0 \tag{3-54}$$

$$Q_{10}=0 \tag{3-55}$$

(2) 子结构Ⅱ右自由端截面上的弯矩与切力均应分别为零,即

$$M_{22}=0 \tag{3-56}$$

$$Q_{22}=0 \tag{3-57}$$

(3) 子结构Ⅲ右端截面上的弯矩与切力均应分别为零,即

$$M_{15}=0 \tag{3-58}$$

$$Q_{15}=0 \tag{3-59}$$

用来表示任意截面状态参数的起始端截面上的未知状态参数有:

子结构Ⅰ左自由端截面的位移 X_1 与转角 θ_1;

子结构Ⅱ左自由端截面的位移 X_{11}与转角 θ_{11}。

汇总所有的未知状态参数:X_1、θ_1、$\Delta\theta$、R_7、R_8、X_{11}、θ_{11}、X_{13}、θ_{13}、M_{13}、R_{13},共11个。汇总各分割点连接条件及各子结构右自由端的边界条件式(3-49)~(3-59),共11个方程。将这11个方程中的诸状态参数用对应子结构中相应的起始截面参数表示,并应用式(3-48)关于单位状态参数列阵的概念,可以整理出如下11个式子组成的方程组:

$$\left\{\begin{aligned}
&M_6=M_6^{X_1}X_1+M_6^{\theta_1}\theta_1+0+0+0+0+0+0+0+0+0=0\\
&X_7-X_{17}=X_7^{X_1}X_1+X_7^{\theta_1}\theta_1+X_7^{\Delta\theta}\Delta\theta-X_{17}^{X_{11}}X_{11}-X_{17}^{\theta_{11}}\theta_{11}+X_{17}^{M_{13}}M_{13}\\
&\qquad+X_{17}^{-R_{13}}R_{13}+0+0+0+0=0\\
&X_8-X_{20}=X_8^{X_1}X_1+X_8^{\theta_1}\theta_1+X_8^{\Delta\theta}\Delta\theta-X_{20}^{X_{11}}X_{11}-X_{20}^{\theta_{11}}\theta_{11}+X_{20}^{M_{13}}M_{13}\\
&\qquad+X_{20}^{-R_{13}}R_{13}+(X_8^{R_7}+X_{20}^{-R_7})R_7+0+0+0=0\\
&M_{10}=M_{10}^{X_1}X_1+M_{10}^{\theta_1}\theta_1+M_{10}^{\Delta\theta}\Delta\theta+0+0+0+0+M_{10}^{R_7}R_7+M_{10}^{R_8}R_8\\
&\qquad+0+0=0\\
&Q_{10}=Q_{10}^{X_1}X_1+Q_{10}^{\theta_1}\theta_1+Q_{10}^{\Delta\theta}\Delta\theta+0+0+0+0+Q_{10}^{R_7}R_7+Q_{10}^{R_8}R_8\\
&\qquad+0+0=0\\
&M_{22}=0+0+0+M_{22}^{X_{11}}X_{11}+M_{22}^{\theta_{11}}\theta_{11}-M_{22}^{M_{13}}M_{13}-M_{22}^{-R_{13}}R_{13}-M_{22}^{-R_7}R_7\\
&\qquad-M_{22}^{-R_8}R_8+0+0=0\\
&Q_{22}=0+0+0+Q_{22}^{X_{11}}X_{11}+Q_{22}^{\theta_{11}}\theta_{11}-Q_{22}^{M_{13}}M_{13}-Q_{22}^{-R_{13}}R_{13}-Q_{22}^{-R_7}R_7\\
&\qquad-Q_{22}^{-R_8}R_8+0+0=0\\
&M_{15}=0+0+0+0+0+M_{15}^{M_{13}}M_{13}+M_{15}^{R_{13}}R_{13}+0+0+M_{15}^{X_{13}}X_{13}+M_{15}^{\theta_{13}}\theta_{13}\\
&\qquad=0\\
&Q_{15}=0+0+0+0+0+Q_{15}^{M_{13}}M_{13}+Q_{15}^{R_{13}}R_{13}+0+0+Q_{15}^{X_{13}}X_{13}+Q_{15}^{\theta_{13}}\theta_{13}\\
&\qquad=0\\
&X_{16}-X_{13}=0+0+0+X_{16}^{X_{11}}X_{11}+X_{16}^{\theta_{11}}\theta_{11}+0+0+0+0-X_{13}+0=0\\
&\theta_{16}-\theta_{13}=0+0+0+\theta_{16}^{X_{11}}X_{11}+\theta_{16}^{\theta_{11}}\theta_{11}+0+0+0+0+0-\theta_{13}=0
\end{aligned}\right. \tag{3-60}$$

式(3-60)为图3-14所示复杂转子-支承系统的运动方程。

式中：$M_6^{X_1} = \prod_{j=1}^{5} \boldsymbol{T}_j [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$;

$M_6^{\theta_1} = \prod_{j=1}^{5} \boldsymbol{T}_j [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$;

$Q_{22}^{X_{11}} = \prod_{j=11}^{21} \boldsymbol{T}_j [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$。

余类推。

3.1.3.4 临界转速及振型的确定

(1) 频率方程

方程(3-60)中的11个未知状态参数不同时为零的条件是其系数行列式等于零，即

$$\Delta = \begin{vmatrix}
M_6^{X_1} & M_6^{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_7^{X_1} & X_7^{\theta_1} & X_7^{\Delta\theta} & -X_7^{X_{11}} & X_7^{\theta_{11}} & X_7^{-M_{13}} & X_7^{-R_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_8^{X_1} & X_8^{\theta_1} & X_8^{\Delta\theta} & -X_{20}^{X_{11}} & X_{20}^{\theta_{11}} & X_{20}^{-M_{13}} & X_{20}^{-R_{13}} & X_8^{R_7}+X_{20}^{R_7} & 0 & 0 & 0 \\
M_{10}^{X_1} & M_{10}^{\theta_1} & M_{10}^{\Delta\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{10}^{R_7} & M_{10}^{R_8} & 0 & 0 \\
Q_{10}^{X_1} & Q_{10}^{\theta_1} & Q_{10}^{\Delta\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{10}^{R_7} & Q_{10}^{R_8} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & M_{22}^{X_{11}} & -M_{22}^{\theta_{11}} & -M_{22}^{-M_{13}} & M_{22}^{-R_{13}} & -M_{22}^{R_7} & -M_{22}^{R_8} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & Q_{22}^{X_{11}} & -Q_{22}^{\theta_{11}} & -Q_{22}^{-M_{13}} & Q_{22}^{-R_{13}} & -Q_{22}^{R_7} & -Q_{22}^{R_8} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{15}^{M_{13}} & M_{15}^{R_{13}} & 0 & 0 & M_{15}^{X_{13}} & M_{15}^{\theta_{13}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{15}^{M_{13}} & Q_{15}^{R_{13}} & 0 & 0 & Q_{15}^{X_{13}} & Q_{15}^{\theta_{13}} \\
0 & 0 & 0 & X_{16}^{X_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \theta_{16}^{X_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{vmatrix} = 0 \tag{3-61}$$

式(3-61)便是图3-14所示复杂转子-支承系统的频率方程。方程中各元素系各有关综合轴段的总传递矩阵的对应项，它们包括了相关综合轴段的几何、物理参数以及运动参数即自转频率与振动频率。除振动频率为待求参数外，其余均为已知参数。

(2) 临界转速的确定

由频率方程(3-61)可知，只有某些特殊频率值能使方程式成立，它们便是系统的固有频率。一般仍采用扫频法来迭代求出系统的固有频率 Ω_c。式(3-61)的行列式余值 Δ 随频率 Ω 的变化关系如图3-15所示。采用弦割法或其他有效方法，可迅速在行列式余值变符号的频率间隔中确定临界转速值。

对于单转子-支承系统或只具有一个共同转速的双转子-支承系统，整个系统存在惟一的一组临界转速。对于具有不同自转转速的双转子-支承系统以及三转子-支承系统，临界

转速的确定要复杂得多。

在综合轴段的传递矩阵中,第 2 列的第 1、2、3 三个元素中含有当量转动惯量 J,它由轮盘的极转动惯量 J_p、赤道转动惯量 J_d 与轮盘自转角频率 ω 及公转角频率(即振动角频率)Ω 构成:$J=(1-\frac{\omega}{\Omega}\frac{J_p}{J_d})J_d$。对于具有不同转速的双转子 - 支承系统,便存在公转角频率 Ω 与哪一个转子的自转角频率同步的问题,也就是存在两种情况:$\Omega=\omega_1$ 或 $\Omega=\omega_2$,即双转子 - 支承系统既有由第 1 个转子激发的临界转速,又有由第 2 个转子激发的临界转速。相应地,双转子 - 支承系统存在两种振动模态:一种对应于与第 1 个转子同步的临界转速,另一种对应于与第 2 个转子同步的临界转速。在单转子 - 支承系统中,$\omega=\Omega$,只存在一个当量转动惯量。对于双转子 - 支承系统,当量转动惯量 J 因 ω/Ω 的变化而变化,因而也就改变了整个系统的临界转速。

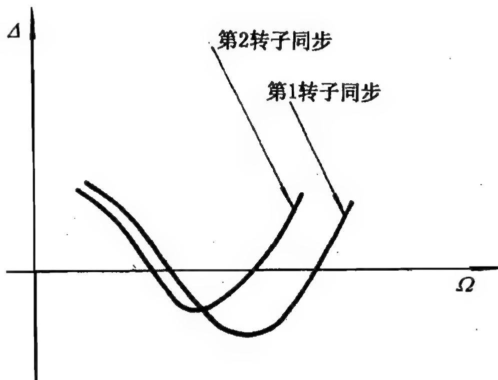


图 3 - 15　行列式余值 Δ 与频率 Ω 的关系

假若双转子 - 支承系统中的两个转子自转角频率关系已知,并可以用比较简单的关系式表示,即当已知 $\omega_1=f(\omega_2)$ 时,则只需要分别以与两个转子同步的条件,对频率方程进行扫频求解,即可分别求出两种同步情况下的各阶临界转速。如图 3 - 15 所示的与转子 1 同步及与转子 2 同步的两个行列式余值曲线和横坐标轴的交点,即相应的同步临界转速。当两个转子的自转转速关系未确定或关系复杂时,当量转动惯量 J 中的自转角频率 ω 与公转角频率 Ω 的比值难以给定。在这种情况下,对于非同步的转子子结构,以若干个给定的自转角频率值代入,计算出在该转子子结构的自转角频率 ω 一定时的系统与另一个转子同步的临界转速。分别将不同自转角频率值下的同阶临界转速点连成曲线,得到与第 1 个转子同步的各阶临界转速随第 2 个转子自转角频率 ω_2 的变化曲线。同样,可得到与第 2 个转子同步的各阶临界转速随第 1 个转子自转角频率 ω_1 的变化曲线,如图 3 - 16 所示的 $\Omega_c^{(1)}$ 与 $\Omega_c^{(2)}$。这个曲线图称为双转子系统的临界转速特性图谱。由这个临界转速的特性图谱,可以按不同的自转角频率比变化曲线,确定相应的与第 1 个转子同步的各阶临界转速及与第 2 个转子同步的各阶临界转速。如图中曲线 a—b 代表两个转子自转角频率的对应变化规律,a—b 曲线与临界转速特性图谱各曲线的交点,即为各阶临界转速。如图所示,1 为与第 1 个转子同步的一阶临界转速,2 为与第 2 个转子同步的一阶临界转速,3 为与第 1 个转子同步的二阶临界转速,4 为与第 2 个转子同步的二阶临界转速。如果两个转子自转转速比的关系改变,则由图可以迅速确定改变后的各阶临界转速值。

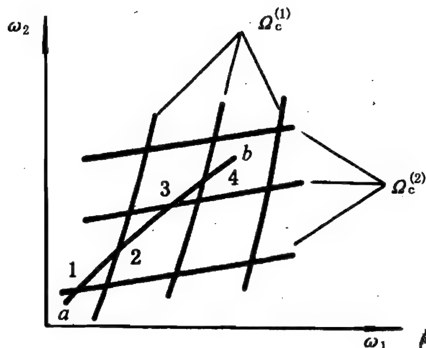


图 3 - 16　双转子临界转速特性图谱

理论上讲,对于三转子 - 支承系统也可以根据各转子的自转角频率分别计算各相应的同步临界转速,从而得到三维的临界转速特性图谱,它不再是两组曲线,而是三组曲面。实际的

三个转子的自转角频率关系是一条空间曲线，该曲线穿过各个空间曲面，这些交点所对应的就是各相应的临界转速。显然，计算一个三维的临界转速特性图谱的工作量是相当大的，构成三组空间曲面也是相当复杂的。因此，对于转子数多于2的情况，应尽量采用已知的自转转速关系代入计算，以便直接得到各阶临界转速值。

(3) 振型的确定

在求得临界转速值之后，可利用运动方程(3－60)求得各未知状态参数值。然后，根据这些状态参数，由各相应的综合轴段的传递矩阵，可求得各站的状态参数，便可确定对应于该临界转速的振型。

具体做法是令式(3－60)中任一状态参数为1，同时放弃方程组中的任意一个方程，可得到一个包含10个未知状态参数、10个方程式的非齐次方程组。解此联立方程组，可惟一地确定10个未知状态参数，他们是以原先取定的一个状态参数等于1为前提的。因此，这只是11个状态参数的相对值。根据已求得的这些状态参数值：X_1、θ_1、$\Delta\theta$、R_7、R_8、X_{11}、θ_{13}、X_{13}、θ_{13}、M_{13}、R_{13}，由下式计算各站的状态参数：

$$q_i = \sum_{k=1}^{m}(r_k \cdot q_i^{rk}) \tag{3-62}$$

式中：m——第 i 站前所有已经求得的起始状态参数的总数目；

r_k——该子结构上第 i 站之前的第 k 个已求得的起始状态参数；

q_i^{rk}——由式(3－48)所确定的单位状态参数列阵 q_k^{rk} 引起的第 i 截面上的诸状态参数列阵，参见式(3－48)。

在求得所有站上的全部状态参数之后，为了对比方便，可采用归一化方法，令所有站中最大位移量为1个单位，得到归一化振型。

3.1.4　传递矩阵－阻抗耦合法

3.1.4.1　机械阻抗的耦合与系统的分割

(1) 机械阻抗的耦合(参考文献[9])

机械阻抗是机械系统的固有特性，系统的机械阻抗可由组成系统的各机械元件的机械阻抗组合而成。机械阻抗的组合包括并联与串联两种。

机械阻抗的并联。组合系统的机械阻抗等于各并联元件机械阻抗之和，表示为

$$Z_p(\Omega) = \sum_i Z_i(\Omega) \tag{3-63}$$

机械阻抗的串联。组合系统的机械导纳等于各串联元件机械导纳之和，表示为

$$Y_s(\Omega) = \sum_i Y_i(\Omega) \tag{3-64}$$

于是，组合系统的机械阻抗为

$$Z_s(\Omega) = Y_s(\Omega)^{-1}$$

或

$$Z_s(\Omega) = \left[\sum_i \frac{1}{Z_i(\Omega)}\right]^{-1} \tag{3-65}$$

(2) 系统的分割

对于复杂的振动系统，如复杂的转子－支承系统，为了通过机械阻抗的关系分析整个系统的动力特性，需要将复杂系统分割成为较简单的若干个子系统，然后通过机械阻抗的耦合关系

求得整个系统的特性。对于复杂的转子 - 支承系统，下列各种点应考虑为分割点：

多转子系统中的中介支承将不同转子耦合在一起，故中介支承处应作为分割点，将相耦合的两个转子变成两个转子子系统，中介支承本身以机械阻抗代表其特性；

转子与静子之间的弹性阻尼支承，当此弹性阻尼支承特性比较复杂时，应在此处分割，成为一个独立的子系统，该支承子系统的机械阻抗可以通过实测或其他方法确定；

在具有非线性特性的部分，应考虑分割开来另行处理，例如挤压油膜阻尼器等宜作为单独的子系统；

在需要进行参数调整的部分，如要作优化设计的弹性支承等，宜分割开来作为独立的子系统，以便改变参数进行分析计算。

在所有的分割点上，应满足其相连接的两个子系统在系统该分割点上的阻抗之和为零的条件，即

$$\sum Z = 0 \tag{3-66}$$

3.1.4.2　简单转子 - 支承系统的传递矩阵 - 阻抗耦合法

当转子 - 支承系统只需用一个分割点把整个系统分割成为两个子系统，并可以用传递矩阵法进行分析时，便采用这种方法。分别计算两个子系统的机械阻抗，满足式(3 - 66)关系的对应频率，便是整个系统的固有频率，如图 3 - 17 所示。图中横坐标为机械阻抗 Z，纵坐标为振动频率 Ω，曲线 $a—\bar{a}$ 为子系统 Ⅰ(例如弹性支承)在分割点处的机械阻抗随振动频率的变化关系；曲线 R 代表子系统 Ⅱ(例如转子子系统)在分割点处的机械阻抗随振动频率的变化关系(此处按反符号绘制)。两组曲线的交点 1、2 两处，满足机械阻抗总和为零的条件式(3 - 66)，故所对应的频率便是整个转子 - 支承系统的固有频率：一阶临界转速 Ω_{c1}，二阶临界转速 Ω_{c2}。

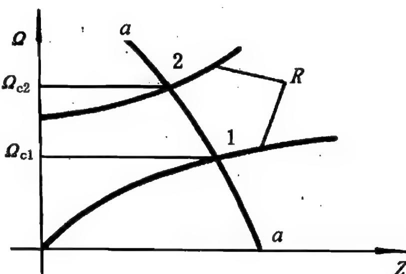


图 3 - 17　简单转子 - 支承系统的阻抗耦合

弹性支承子系统的机械阻抗可以采用实测方法，也可以用单自由度系统模型计算。当参振质量 m，弹簧系数为 k 时，其动刚度为

$$Z(\Omega) = k - m\Omega^2 \tag{3-67}$$

如果存在阻尼，则为

$$Z(\Omega) = k - m\Omega^2 + \mathrm{i}c\Omega \tag{3-68}$$

但在阻抗耦合中，一般只取其实部。

转子子系统在分割点处的机械阻抗可采用传递矩阵法求出。

(1) 分割点在转子子系统一端的情况

当分割点在一端(如右端)时，整个转子子系统可由常规的传递矩阵法写出如下两端截面上状态参数的关系：

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_n = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} X_0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} \tag{3-69}$$

右端边界条件为

$$M_n = 0, Q_n = -Z_n \cdot X_n \tag{3-70}$$

由 $M_n=0$ 代入式(3－69)可得

$$T_{31}X_0 + T_{32}\theta_0 = 0$$

于是可得

$$\theta_0/X_0 = -T_{31}/T_{32} \tag{3-71}$$

将式(3－70)的第二式代入式(3－69)得

$$Z_n = \frac{-Q_n}{X_n} = -\frac{T_{41}X_0 + T_{42}\theta_0}{T_{11}X_0 + T_{12}\theta_0}$$

利用式(3－71)关系式，可得

$$Z_n = -\frac{T_{41} - T_{42} \cdot T_{31}/T_{32}}{T_{11} - T_{12} \cdot T_{31}/T_{32}} \tag{3-72}$$

式(3－72)便是右端截面上的机械阻抗随转子－支承系统振动频率的变化关系。式中各传递矩阵元素中包括了转子轴段的几何、物理参数及振动频率。几何物理参数已知，给定频率便可计算得到阻抗值，反符号绘制如图 3－17 所示之曲线 R。

(2) 分割点在转子子系统中部的情况

当分割点在转子子系统的中部时，如图 3－18 所示，为了求得分割点处的机械阻抗随转子振动频率的变化关系，可将转子子系统在与弹性支承的分割点 B 处分开成为两个轴段，于是形成两个分割点在一端的转子子系统 AB 与 CB。可以写出分割点截面上的状态参数与起始截面上的状态参数的关系式：

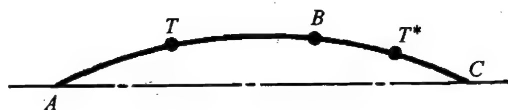


图 3－18 分割点在转子中部时的处理

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{AB}^{B} = \boldsymbol{T}\begin{bmatrix} X_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} \tag{3-73}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{CB}^{B} = \boldsymbol{T}^*\begin{bmatrix} X_0^* \\ \theta_0^* \end{bmatrix} \tag{3-74}$$

在分割点处，各状态参数必须满足如下关系：

$$\begin{cases} X_{AB}^{B} = X_{CB}^{B} \\ \theta_{AB}^{B} = -\theta_{CB}^{B} \\ M_{AB}^{B} = M_{CB}^{B} \\ Q_{AB}^{B} = Q_{CB}^{B} - Z_B X^B \end{cases} \tag{3-75}$$

式中：

$$
\begin{aligned}
X_{AB}^{B} &= T_{11}X_0 + T_{12}\theta_0 \\
\theta_{AB}^{B} &= T_{21}X_0 + T_{22}\theta_0 \\
M_{AB}^{B} &= T_{31}X_0 + T_{32}\theta_0 \\
Q_{AB}^{B} &= T_{41}X_0 + T_{42}\theta_0 \\
X_{CB}^{B} &= T_{11}^{*}X_0^{*} + T_{12}^{*}\theta_0^{*} \\
\theta_{CB}^{B} &= T_{21}^{*}X_0^{*} + T_{22}^{*}\theta_0^{*} \\
M_{CB}^{B} &= T_{31}^{*}X_0^{*} + T_{32}^{*}\theta_0^{*} \\
Q_{CB}^{B} &= T_{41}^{*}X_0^{*} + T_{42}^{*}\theta_0^{*}
\end{aligned}
\tag{3-76}
$$

式中，“ * ”号者为右边转子子系统，按习惯将它调转 180°，使分割点在右端。

由式(3－75)的最后一式得

$$
Z_B = -\frac{Q_{AB}^{B} - Q_{CB}^{B}}{X^{B}} = -\frac{T_{41}X_0 + T_{42}\theta_0 - T_{41}^{*}X_0^{*} - T_{42}^{*}\theta_0^{*}}{T_{11}X_0 + T_{12}\theta_0}
$$

$$
= -\frac{T_{41} + T_{42}\dfrac{\theta_0}{X_0} - T_{41}^{*}\dfrac{X_0^{*}}{X_0} - T_{42}^{*}\dfrac{\theta_0^{*}}{X_0}}{T_{11} + T_{12}\dfrac{\theta_0}{X_0}} \tag{3-77}
$$

由式(3－75)的前三式，代入各自表达式，经过整理，可求得 θ_0/X_0、X_0^{*}/X_0 与 θ_0^{*}/X_0，它们分别为两个轴段有关传递矩阵元素的函数。因此，式(3－77)所代表的分割点阻抗 Z_B 也是两轴段各有关传递矩阵元素的函数。各 T_{ij} 与 T_{ij}^{*} 中除包含已知的几何、物理参数外，含有振动频率 Ω，于是对应每一个频率求得对应的 Z_B 值，其变化关系（反符号绘制）也如图 3－17 中的 R 所示。

(3) 算例

图 3－19 所示为某发动机转子－支承系统，其计算模型如图中(b)所示。其原始数据列于表 3－3 中。4 个支承的刚度特性分别为

$$
\begin{aligned}
k(2) &= 264515\Omega^{0.667} \\
k(6) &= 45800000\Omega^{0.2} \\
k(10) &= 8700000 - 0.547\Omega^{2};
\end{aligned}
$$

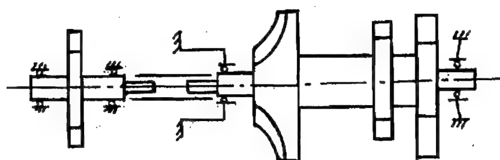
$k(21)$为后支承机匣的动刚度，由实测而得，如图 3－20 中曲线 a—a 所示。

表 3－3　图 3－19 模型的原始数据

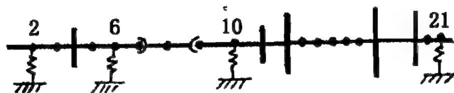
E(N/m²)	I(m⁴)	l(m)	m(kg)	J_p(kg·m²)
2.1E11	2.0436E－8	0	0	0
2.1E11	2.0436E－8	0.025	0.554	0
2.1E11	2.0436E－8	0.025	0.074	0
2.1E11	2.0436E－8	0.035	3.40247	9.7156E－6

续表 3-3

$E(N/m^2)$	$I(m^4)$	$l(m)$	$m(kg)$	$J_p(kg \cdot m^2)$
2.1E11	2.0436E-8	0.03	0.0888	0
2.1E11	1.7289E-8	0.03	0.297	0
2.1E11	4.7565E-8	0.035	0.2863	0
2.1E11	4.7565E-8	0.035	0.1349	0
2.1E11	2.1942E-8	0.05	0.1605	0
2.1E11	4.9078E-8	0.034	0	0
2.1E11	1.637E-8	0.047	1.95375	2.1246E-3
2.1E11	5.34E-7	0.052	6.5745	0.03002756
1.992E11	9.486E-7	0.039	1.92	0
1.992E11	9.486E-7	0.024	0.1401	0
1.992E11	9.486E-7	0.024	0.1401	0
1.992E11	1.596E-6	0.042	0.1401	0
1.992E11	1.596E-6	0.032	0.992	0
1.992E11	1.596E-6	0.065	5.1562	0.0218
1.992E11	1.596E-6	0.034	6.7649	0.0278
2.1E11	1.476E-6	0.024	0.8315	0
2.1E11	5.067E-8	0.027	0.134	0



(a) 燃气发生器转子-支承系统



(b) 计算模型

图 3-19　某型发动机转子-支承系统

由式(3-72)计算得到转子子系统振动频率与分割点机械阻抗的关系，如图 3-20 所示

(按反符号绘制)。这些曲线与图中后支承机匣系统实测机械阻抗曲线 $a—a$ 的交点 1、2、3 等,分别代表了该转子 - 支承系统的一、二及三阶临界转速,分别为 $n_{c1}=11100$ r/min, $n_{c2}=20430$ r/min 与 $n_{c3}=48900$ r/min。他们分别处于过渡工作状态及高于最大工作转速的安全范围。

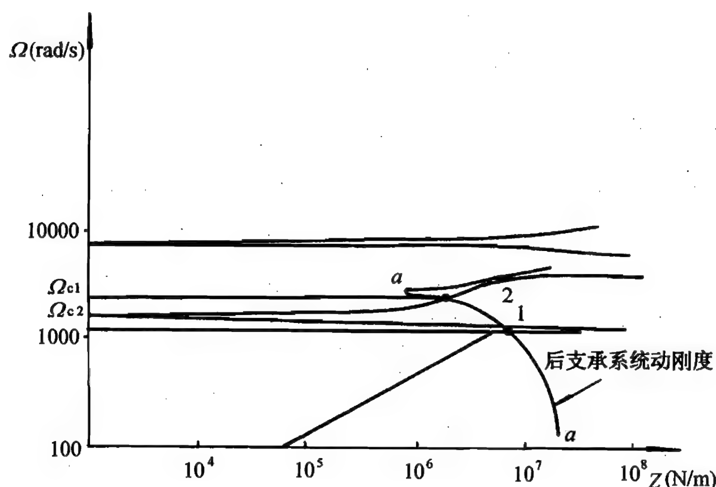


图 3 - 20　发动机转子 - 支承系统的临界转速

3.1.4.3　复杂转子 - 支承系统的传递矩阵 - 阻抗耦合法

(1) 分析模型

复杂转子 - 支承系统的一般简化模型如图 3 - 21 所示,它由 N 个相对独立的转子及 M 个将各转子相互连接的中介支承或支承组成。在所有 M 个中介支承或支承处,将复杂转子 - 支承系统分割成为 N 个转子子系统与 M 个支承子系统。支承子系统以动刚度 k 代表,相应作用于相关的转子子系统上的外力为 R,如图 3 - 21 的右半边所示。

(2) 转子子系统的运动方程

不失一般性,取图 3 - 21 中的第 i 个转子子系统,建立其运动方程。为了简洁,略去代表子系统的标注 i。该转子子系统两端的边界条件分别为

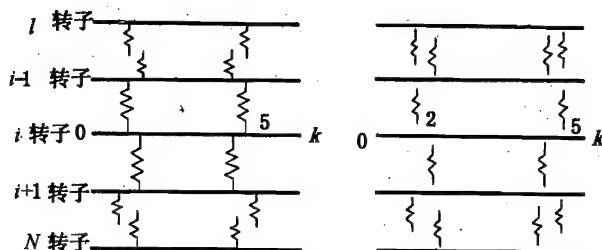


图 3 - 21　复杂转子 - 支承系统模型

$$\begin{cases} M_0 = 0, Q_0 = 0 \\ M_k = 0, Q_k = 0 \end{cases} \tag{3-78}$$

在第1个分割点处,截面上的状态参数可表示为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1^{\mathrm{L}} = \boldsymbol{T}_1 \begin{bmatrix} X_0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-79}$$

该分割点右侧截面上的状态参数与左侧截面上的状态参数的关系为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1^{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q+R \end{bmatrix}_1^{\mathrm{L}} \tag{3-80}$$

第2个分割点截面上的状态参数为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_2^{\mathrm{L}} = \boldsymbol{T}_2 \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1^{\mathrm{R}} \tag{3-81}$$

同样的,右侧截面上的状态参数为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_2^{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q+R \end{bmatrix}_2^{\mathrm{L}} \tag{3-82}$$

类推到最后一段,可写出:

$$\begin{cases} M_k = \sum_{j=1}^{4} T_k(3,j) q_{k-1}(j) = 0 \\ Q_k = \sum_{j=1}^{4} T_k(4,j) q_{k-1}(j) = 0 \end{cases} \tag{3-83}$$

式中,$q_{k-1}(j)$代表第 $k-1$ 截面上的第 j 个状态参数。

显然,在式(3-83)中,依次将关系式(3-82)、(3-81)、(3-80)与(3-79)等代入,可以得到包含 X_0、θ_0、R_1、……R_{k-1}等状态参数及各轴段有关传递矩阵的方程式。对于 N 个转子子系统,共可写出 $2N$ 个方程式,包含 $2N+M$ 个未知状态参数,即各转子子系统左端状态参数 X_0、θ_0、……共 $2N$ 个,分割点的阻抗作用力 R_1,……R_M 共 M 个,这些方程式可写成为

$$\begin{cases} A(2i-1,2i-1)X_0^{(i)} + A(2i-1,2i)\theta_0^{(i)} + \cdots\cdots + \\ \qquad A(2i-1,2N+1)R_1 + \cdots\cdots + A(2i-1,2N+M)R_M = 0 \\ A(2i,2i-1)X_0^{(i)} + A(2i,2i)\theta_0^{(i)} + \cdots\cdots + \\ \qquad A(2i,2N+1)R_1 + \cdots\cdots + A(2i,2N+M)R_M = 0 \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots\cdots N) \tag{3-84}$$

式(3-84)便是 N 个转子子系统的 $2N$ 个运动方程。

(3) 阻抗耦合补充方程

为建立补充方程,分析任意一个分割点的机械阻抗耦合情况,如图3-22所示,第 j 个中

介支承连接了相邻两个转子子系统，在一个转子子系统的分割点处，其机械阻抗为 $Z_j = R_j/X_j$，与之相对应的另一个转子子系统上分割点处的机械阻抗为 $Z_j^* = -R_j/X_j^*$，中介支承的机械阻抗为 k_j。根据式(3－66)，分割点上总阻抗为零的条件，任一个转子子系统在该分割点的机械阻抗与中介支承机械阻抗之耦合，与另一个转子子系统在相应点上的机械阻抗之和应等于零。两个机械阻抗的串联耦合已知为

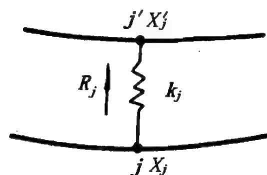


图 3－22 中介支承连接处的阻抗耦合

$$Z'_j = \frac{1}{\frac{1}{k_j} + \frac{1}{Z_j}} = \frac{1}{\frac{1}{k_j} + \frac{X_j}{R_j}}$$

于是得

$$Z_j^* + Z'_j = \frac{1}{\frac{1}{k_j} + \frac{X_j}{R_j}} - \frac{R_j}{X_j^*} = 0$$

移项整理得

$$R_j = k_j(X_j - X_j^*) \tag{3-85}$$

而 X_j、X_j^* 分别为两个转子子系统在该分割点处的位移参数，它们可表示为各自的转子子系统的起始状态参数 X_0、θ_0、X_0^*、θ_0^* 及相关轴段传递矩阵元素的函数。也就是说，对于一个分割点，可以写出一个方程式，包含相关两个转子子系统的起始状态参数 X_0、θ_0、X_0^*、θ_0^* 以及涉及的分割点附加力 R_j。因此，M 个中介支承或弹性支承可写出相应的 M 个与式(3－85)类似的补充方程式，即：

$$\begin{aligned}&A(2N+j,2i-1)X_0^{(i)} + A(2N+j,2i)\theta_0^{(i)} + A(2N+j,2i+1)X_0^{(i+1)}\\&+ A(2N+j,2i+2)\theta_0^{(i+1)} + A(2N+j,2N+1)R_1 + \cdots\\&+ A(2N+j,2N+j)R_j = 0\\&(i=1,2,\cdots N-1, j=1,2,\cdots,M)\end{aligned} \tag{3-86}$$

联合式(3－84)的 $2N$ 个方程式及式(3－86)的 M 个方程式，一共 $2N+M$ 个方程式，包含的未知状态参数仍然是转子子系统的 $2N$ 个起始端截面状态参数及 M 个中介支承或弹性支承等分割点的未知附加力。$2N+M$ 个方程式包含 $2N+M$ 个未知状态参数，可以求解。此方程组可写成如下矩阵方程的形式：

$$\begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \cdots & A(1,2N+M) \\ A(2,1) & A(2,2) & \cdots & A(2,2N+M) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A(2N+M,1) & A(2N+M,2) & \cdots & A(2N+M,2N+M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0^{(1)} \\ \theta_0^{(1)} \\ \vdots \\ R_M \end{bmatrix} = 0 \tag{3-87}$$

式(3－87)便是传递矩阵－阻抗耦合法的基本方程，其系数行列式余值为零所对应的频率便是整个复杂转子－支承系统的固有频率，故下式称为复杂转子－支承系统的频率方程：

$$\begin{vmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \cdots & A(1,2N+M) \\ A(2,1) & A(2,2) & \cdots & A(2,2N+M) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A(2N+M,1) & A(2N+M,2) & \cdots & A(2N+M,2N+M) \end{vmatrix} = 0 \tag{3-88}$$

(4) 非轴对称的复杂轴系

当轴系为非轴对称时，在 XOZ、YOZ 两个平面内，系统的特性参数不相同，表征系统特性的传递矩阵维数扩充一倍，成为 8×8 阶矩阵；表征中介支承特性的阻抗也以 2×2 阶矩阵形式表示

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \tag{3-89}$$

代表系统运动特征的状态参数也扩充一倍，即：$[X\ \theta\ M_x\ Q_x\ Y\ \alpha\ M_y\ Q_y]^{\mathrm{T}}$；分割点上引入的附加力也增加为 R_x、R_y。于是，未知状态参数总数增加到 $4N+2M$ 个，相应的方程数也增加一倍，为 $4N+2M$ 个，可写为

$$\begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \cdots & A(1,4N+2M) \\ A(2,1) & A(2,2) & \cdots & A(2,4N+2M) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A(4N+2M-1,1) & A(4N+2M-1,2) & \cdots & A(4N+2M-1,4N+2M) \\ A(4N+2M,1) & A(4N+2M,2) & \cdots & A(4N+2M,4N+2M) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ \theta_0 \\ Y_0 \\ \alpha_0 \\ R_{x1} \\ \vdots \\ R_{yM} \end{bmatrix}=0 \tag{3-90}$$

相应的频率方程为

$$\det|\boldsymbol{A}|=0 \tag{3-91}$$

行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中的各元素系各有关轴段的相应传递矩阵元素的组合，个别是分割点处弹性支承的刚度。它们都是已知的几何、物理参数以及有关运动参数的函数。在一定的自转转速下，行列式余值仅是振动频率的函数。于是，可采用扫频法寻找固有频率。在行列式余值改变符号的频率间隔中，用弦割法迭代逼近。

在求得固有频率之后，利用方程(3-90)，可求得所有未知状态参数的相对值。进一步由传递矩阵关系依次求得各截面之状态参数。采用归一化变换，求得相应的归一化振型。

(5) 传递矩阵-阻抗耦合法求解步骤示例

以图3-23所示具有两个中介支承的双转子系统为例，说明求解的基本步骤。

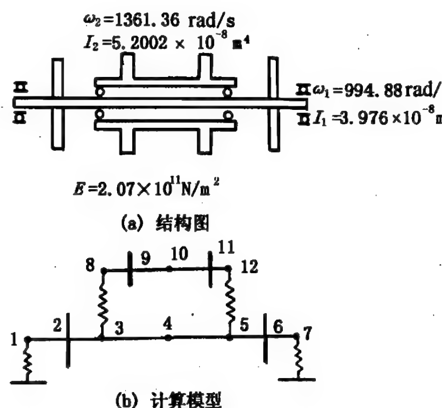


图3-23 具有两个中介支承的双转子系统

根据该双转子系统模型，简化为图中(b)所示的计算模型，其原始数据列于表3-4。在中介支承处，将系统分割成为两个转子子系统。两个转子分别在不同的转速下运转，计算其各阶正向涡动与反向涡动的固有频率。在计算正向涡动时，ω_1、ω_2 与进动频率 Ω 同向；而反向涡动时，则取 Ω 为反向(负号)。

在此算例中，共有两个转子子系统($N=2$)和两个中介支承($M=2$)耦合子系统，未知状态参数为 $X_0^{(1)}$、$\theta_0^{(1)}$、$X_0^{(2)}$、$\theta_0^{(2)}$、R_1 与 R_2 共6个；式(3-87)写成如下联立方程式，为书写简便，以 A_{ij} 代 $A(i,j)$。

表 3-4　算例的原始数据

No.	m(kg)	J_p(kg·m²)	k(N/m)	l(m)
1	0.325	0	2.5 E7	0.075
2	10.45	0.1125	-	0.075
3	0.935	0	-	0.225
4	1.3205	0	-	0.225
5	0.925	0	-	0.075
6	8.45	0.09	-	0.075
7	0.305	0	1.5 E7	
8	0.1932	0	1.2 E7(8-3)	0.075
9	7.7796	0.0735	-	0.15
10	0.3728	0	-	0.15
11	6.2796	0.0432	-	0.075
12	0.1732	0	1.0 E7 (12-5)	

$$\begin{cases} A_{11}X_0^{(1)} + A_{12}\theta_0^{(1)} + A_{13}X_0^{(2)} + A_{14}\theta_0^{(2)} + A_{15}R_1 + A_{16}R_2 = 0 \\ A_{21}X_0^{(1)} + A_{22}\theta_0^{(1)} + A_{23}X_0^{(2)} + A_{24}\theta_0^{(2)} + A_{25}R_1 + A_{26}R_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{61}X_0^{(1)} + A_{62}\theta_0^{(1)} + A_{63}X_0^{(2)} + A_{64}\theta_0^{(2)} + A_{65}R_1 + A_{66}R_2 = 0 \end{cases}$$

式中：$A_{11} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} T_3(3,i)T_2(i,j)T_1(j,1)$;

$A_{12} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} T_3(3,i)T_2(i,j)T_1(j,2)$;

$A_{13} = A_{14} = 0$;

$A_{15} = \sum_{i=1}^{4} T_3(3,i)T_2(i,4)$;

$A_{16} = T_3(3,4)$;

$A_{21} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} T_3(4,i)T_2(i,j)T_1(j,1)$;

$A_{22} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} T_3(4,i)T_2(i,j)T_1(j,2)$;

$A_{23} = A_{24} = 0$;

$A_{25} = \sum_{i=1}^{4} T_3(4,i)T_2(i,4)$;

$A_{26} = T_3(4,4)$;

$A_{31} = A_{32} = 0$;

$A_{33} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} T_3^*(3,i)T_2^*(i,j)T_1^*(j,1)$;

$A_{34} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} T_3^*(3,i)T_2^*(i,j)T_1^*(j,2)$;

$$A_{35} = -\sum_{i=1}^{4} T_3^*(3,i)T_2^*(i,4);$$

$$A_{36} = -T_3^*(3,4);$$

$$A_{41} = A_{42} = 0;$$

$$A_{43} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} T_3^*(4,i)T_2^*(i,j)T_1^*(j,1);$$

$$A_{44} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} T_3^*(4,i)T_2^*(i,j)T_1^*(j,2);$$

$$A_{45} = -\sum_{i=1}^{4} T_3^*(4,i)T_2^*(i,4);$$

$$A_{46} = -T_3^*(4,4);$$

$$A_{51} = T_1(1,1);$$

$$A_{52} = T_1(1,2);$$

$$A_{53} = -T_1^*(1,1);$$

$$A_{54} = -T_1^*(1,2);$$

$$A_{55} = 1/K_1;$$

$$A_{56} = 0;$$

$$A_{61} = \sum_{i=1}^{4} T_2(1,i)T_1(i,1);$$

$$A_{62} = \sum_{i=1}^{4} T_2(1,i)T_1(i,2);$$

$$A_{63} = -\sum_{i=1}^{4} T_2^*(1,i)T_1^*(i,1);$$

$$A_{64} = -\sum_{i=1}^{4} T_2^*(1,i)T_1^*(i,2);$$

$$A_{65} = T_2(1,4) + T_2^*(1,4);$$

$$A_{66} = 1/K_2。$$

式中，传递矩阵 $\boldsymbol{T}$ 属于第Ⅰ个转子子系统，$\boldsymbol{T}^*$ 属于第Ⅱ个转子子系统。注意，第Ⅱ个转子子系统的两个分割点正好在起始与终止站，为了程序简便，在起始站与终止站均分别增加一虚拟轴段，成为自由端。

按照表3－4的原始数据，可按图3－24所示计算程序框图顺序进行计算。计算分为两类四种情况：第一类计算固有频率，即两个转子子系统分别以各自的自转转速 ω_1、ω_2 旋转，计算正向涡动与反向涡动（Ω 与 ω_1、ω_2 同向或反向）两种情况；第二类计算临界转速，即固有频率与内外两个转子子系统分别同步的两种临界转速的情况。

表3－5列出正反涡动下固有频率的计算结果，表中还列出用拉格朗日运动方程求解得到的固有频率精确解。可以看出，对于这一算例，传递矩阵－阻抗耦合法只存在极小的数值计算误差。图3－25为相应的振型，为节省篇幅，只绘出了正反涡动的前6阶振型。

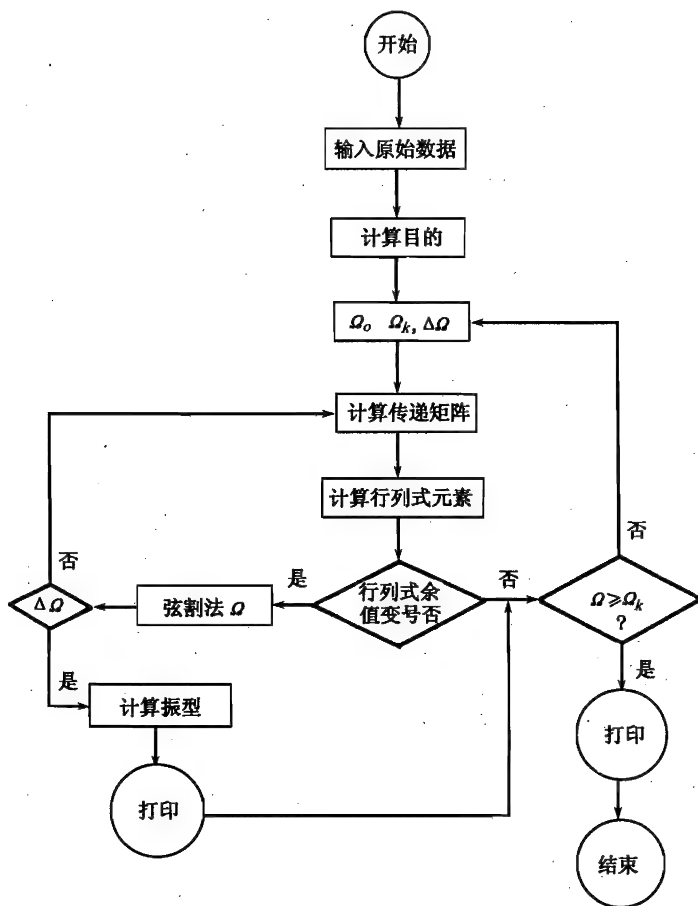


图 3－24　计算程序框图

表 3－5　固有频率计算结果

涡动模式①	本方程(rad/s)	拉格朗日方程的解(rad/s)	相对误差(%)
B	174.723	174.716	0.004
F	400.436	400.436	0.000
B	518.678	518.674	0.0008
B	632.982	632.988	0.0009
F	894.408	894.410	0.0002
B	1349.972	1349.958	0.001
B	1397.339	1397.403	0.0003
F	1432.091	1432.092	0.000
B	1805.755	1805.751	0.0002
F	1829.741	1829.741	0.000
B	1868.232	1868.237	0.0003

续表 3－5

涡动模式①	本方程(rad/s)	拉格朗日方程的解(rad/s)	相对误差(%)
F	2119.296	2119.298	0.0001
B	2292.202	2292.203	0.000
B	2637.405	2637.412	0.0001
F	3056.654	3056.654	0.000
F	3422.177	3422.186	0.0003
F	3721.942	3721.947	0.0001
F	4752.933	4752.938	0.0001
B	11955.200	11955.199	0.000
F	12033.929	12033.929	0.000
B	13339.114	13339.121	0.000
F	13398.812	13398.812	0.000
B	14750.733	14750.733	0.000
F	14852.603	14852.604	0.000
B	15873.990	15873.990	0.000
F	15920.123	15920.123	0.000
B	16270.586	16270.593	0.000
F	16301.906	16301.911	0.000
B	21870.034	21870.039	0.000
F	21929.366	21929.367	0.000
B	22980.383	22980.384	0.000
F	23075.839	23075.845	0.000

① B——反向涡动；F——正向涡动。

图 3－26 为该双转子系统的临界转速特性图谱，如给定内外转子子系统的转速比，即可确定相应的各阶临界转速。如内外转子子系统的转速比为常数 $\omega_2/\omega_1 = 1.37$，可确定分别与内外转子同步的 1、2、3 等各阶临界转速值。由于陀螺效应，与内外转子同步的 1、2 阶临界转速均低于相应的固定转速下的正向涡动的 1、2 阶固有频率，但高于相应的反向涡动固有频率。而 3 阶以上临界转速则高于相应的固定转速正向涡动固有频率。图 3－27 为相应的振型，可以看到，它们分别与正向涡动的 1、2、3 三阶固有振型相接近。

(6) 有阻尼的复杂转子－支承系统

在一般转子－支承系统中，当存在弹性阻尼支承时，则阻尼不可忽略，整个系统便成为阻尼系统。另外，弹性阻尼支承还常常呈现出非轴对称的特点。因此，除了应采用复杂轴系方程式(3－89)、(3－90)外，在式(3－89)中的 Z_{xx}、Z_{xy}、Z_{yx}与 Z_{yy}均包含动刚度和阻尼。于是，求解频率方程(3－91)也是求解复特征根的问题，即令行列式的实部与虚部均等于零，求得复特征根 $\lambda + \mathrm{i}\Omega$。其中 λ 为阻尼系数，Ω 为固有频率。一般来说，求有阻尼的复杂转子－支承系统的固有频率，宜采用分振型综合法(参考文献[10]、[11])，它可以大大节省计算机时。

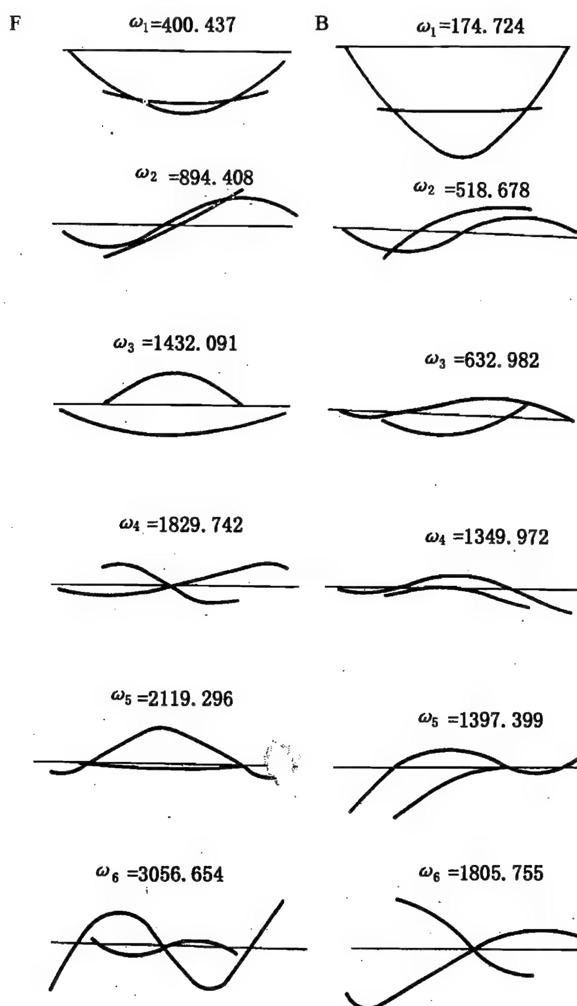


图 3－25　正反涡动前 6 阶固有振型

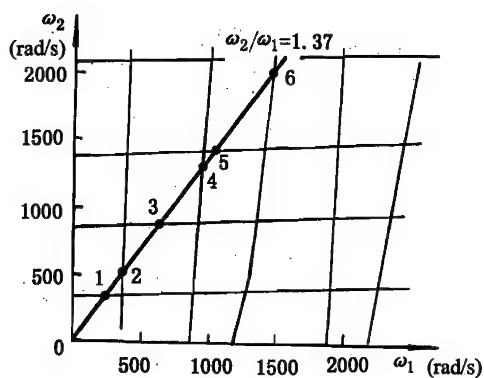


图 3－26　算例的临界转速特性图谱

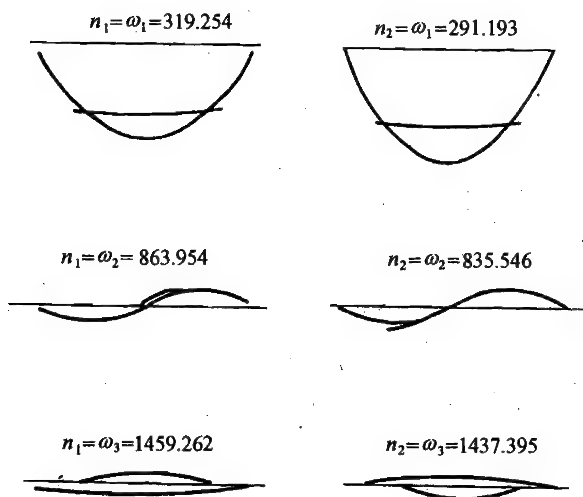


图 3－27 临界转速对应的振型图

3.1.5 传递矩阵－直接积分法

一种利用传递矩阵法建立"特征盘"的运动方程，然后用直接积分法解运动方程，求得临界转速、振型等的方法。

3.1.5.1 "特征盘"运动方程

(1) 单盘悬臂转子－支承系统

图 3－28 所示为单盘悬臂转子－支承系统的简图，转子的右端(截面 n)的边界条件为

$$M_{xn} = Q_{xn} = M_{yn} = Q_{yn} = 0 \tag{3-92}$$

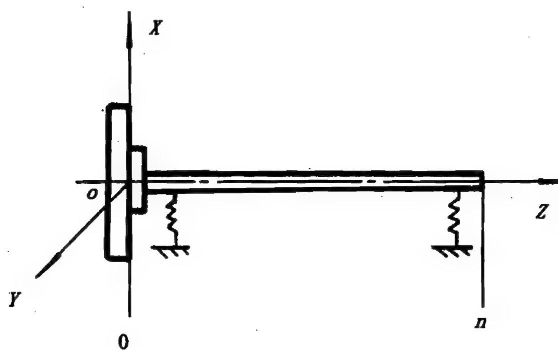


图 3－28 单盘悬臂转子－支承系统简图

对于转子的左端(起始截面 0)，把转盘作为外载荷，于是可写出其边界条件为

$$\begin{cases} M_{x0} = J\ddot{\theta}_0 + J_p\omega\dot{\alpha}_0 \\ Q_{x0} = -m\ddot{X}_0 - C_e\dot{X}_0 + me\Omega^2\cos\Omega t \\ M_{y0} = J_d\ddot{\alpha}_0 - J_p\omega\dot{\theta}_0 \\ Q_{y0} = -m\ddot{Y}_0 - C_e\dot{Y}_0 + me\Omega^2\sin\Omega t \end{cases} \tag{3-93}$$

式中：α、$\dot{\alpha}$、$\ddot{\alpha}$——YOZ 平面内的转角、角速度及角加速度；

θ、$\dot{\theta}$、$\ddot{\theta}$——XOZ 平面内的转角、角速度及角加速度；

e——盘的偏心距；

C_e——截面 0 处的等效阻尼系数。

下标 x，y 分别表示属于 XOZ 与 YOZ 平面。

终止端（截面 n）的状态参数与起始端（截面 0）的状态参数的关系表示为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \end{bmatrix}_n = \boldsymbol{T}_x \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \end{bmatrix}_0 \tag{3-94}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \end{bmatrix}_n = \boldsymbol{T}_y \begin{bmatrix} Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \end{bmatrix}_0 \tag{3-95}$$

式中，$\boldsymbol{T}_x$、$\boldsymbol{T}_y$ 为从截面 0 到截面 n 的整个轴段在 XOZ 与 YOZ 平面内的总传递矩阵。

利用边界条件式(3 – 92)，由式(3 – 94)与(3 – 95)，可得如下四个方程式：

$$\begin{cases} M_{xn} = T_x(3,1)X_0 + T_x(3,2)\theta_0 + T_x(3,3)M_{x0} + T_x(3,4)Q_{x0} = 0 \\ Q_{xn} = T_x(4,1)X_0 + T_x(4,2)\theta_0 + T_x(4,3)M_{x0} + T_x(4,4)Q_{x0} = 0 \\ M_{yn} = T_y(3,1)Y_0 + T_y(3,2)\alpha_0 + T_y(3,3)M_{y0} + T_y(3,4)Q_{y0} = 0 \\ Q_{yn} = T_y(4,1)Y_0 + T_y(4,2)\alpha_0 + T_y(4,3)M_{y0} + T_y(4,4)Q_{y0} = 0 \end{cases} \tag{3-96}$$

将式(3 – 93)代入式(3 – 96)得

$$\begin{cases} T_x(3,1)X_0 + T_x(3,2)\theta_0 + T_x(3,3)(J_d\ddot{\theta}_0 + J_p\omega\dot{\alpha}_0) \\ \qquad + T_x(3,4)(-m\ddot{X}_0 - C_e\dot{X}_0 + me\Omega^2\cos\Omega t) = 0 \\ T_x(4,1)X_0 + T_x(4,2)\theta_0 + T_x(4,3)(J_d\ddot{\theta}_0 + J_p\omega\dot{\alpha}_0) \\ \qquad + T_x(4,4)(-m\ddot{X}_0 - C_e\dot{X}_0 + me\Omega^2\cos\Omega t) = 0 \\ T_y(3,1)Y_0 + T_y(3,2)\alpha_0 + T_y(3,3)(J_d\ddot{\alpha}_0 - J_p\omega\dot{\theta}_0) \\ \qquad + T_y(3,4)(-m\ddot{Y}_0 - C_e\dot{Y}_0 + me\Omega^2\sin\Omega t) = 0 \\ T_y(4,1)Y_0 + T_y(4,2)\alpha_0 + T_y(4,3)(J_d\ddot{\alpha}_0 - J_p\omega\dot{\theta}_0) \\ \qquad + T_y(4,4)(-m\ddot{Y}_0 - C_e\dot{Y}_0 + me\Omega^2\sin\Omega t) = 0 \end{cases} \tag{3-97}$$

上式经整理化简，可写成为

$$\begin{cases}\ddot{\theta}_0=-\dfrac{J_p}{J_d}\omega\,\dot{\alpha}_0+\dfrac{1}{J_d}\dfrac{C_4}{C_3}X_0+\dfrac{1}{J_d}\dfrac{C_5}{C_3}\theta_0\\ \ddot{X}_0=\dfrac{1}{m}\dfrac{C_1}{C_3}X_0+\dfrac{1}{m}\dfrac{C_2}{C_3}\theta_0-\dfrac{C_e}{m}\dot{X}_0+e\Omega^2\cos\Omega t\\ \ddot{\alpha}_0=\dfrac{J_p}{J_d}\omega\,\dot{\theta}_0+\dfrac{1}{J_d}\dfrac{d_4}{d_3}Y_0+\dfrac{1}{J_d}\dfrac{d_5}{d_3}\alpha_0\\ \ddot{Y}_0=\dfrac{1}{m}\dfrac{d_1}{d_3}Y_0+\dfrac{1}{m}\dfrac{d_2}{d_3}\alpha_0-\dfrac{C_e}{m}\dot{Y}_0+e\Omega^2\sin\Omega t\end{cases}\tag{3-98}$$

式中：$C_1=T_x(3,1)T_x(4,3)-T_x(4,1)T_x(3,3)$；

$C_2=T_x(3,2)T_x(4,3)-T_x(4,2)T_x(3,3)$；

$C_3=T_x(3,4)T_x(4,3)-T_x(4,4)T_x(3,3)$；

$C_4=T_x(3,1)T_x(4,4)-T_x(4,1)T_x(3,4)$；

$C_5=T_x(3,2)T_x(4,4)-T_x(4,2)T_x(3,4)$；

$d_1=T_y(3,1)T_y(4,3)-T_y(4,1)T_y(3,3)$；

$d_2=T_y(3,2)T_y(4,3)-T_y(4,2)T_y(3,3)$；

$d_3=T_y(3,4)T_y(4,3)-T_y(4,4)T_y(3,3)$；

$d_4=T_y(3,1)T_y(4,4)-T_y(4,1)T_y(3,4)$；

$d_5=T_y(3,2)T_y(4,4)-T_y(4,2)T_y(3,4)$。

式(3－98)便是悬臂式单盘转子－支承系统的“特征盘”运动方程，它包含了4个未知状态参数 X_0、θ_0、Y_0、α_0，其余各系数均是转子－支承系统已知的几何、物理参数以及某些运动参数如自转角频率 ω 的函数。此外，在传递矩阵及不平衡项中包含了待求的固有频率 Ω。

当转子－支承系统是轴对称时，$C_i=d_i$，未知状态参数 $X_0=Y_0$，$\theta_0=\alpha_0$，于是，式(3－98)缩减为两个方程式：第1、2式或第3、4式。当不计转子的不平衡和阻尼时，式(3－98)中的第2、4式右边最后两项均略去。

(2) 双转子系统

图3－29所示为具有两个中介支承的双转子－支承系统简图，为区别起见，内转子的符号均加角注＊。内外转子各自由左端(截面0)经中介支承1和2，到右端(截面 n)。左端截面上的状态参数与中介支承1处左侧面的状态参数的关系表示为

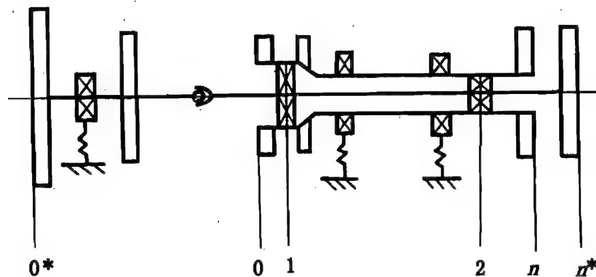


图3－29 双转子－支承系统简图

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1^L = \boldsymbol{T}_{0-1} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_0 \tag{3-99}$$

$$\begin{bmatrix} X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_1^L = \boldsymbol{T}_{0-1}^* \begin{bmatrix} X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_0 \tag{3-100}$$

中介支承右侧与左侧截面的连接条件为

$$\begin{cases} Q_1^R = Q_1^L - k_1(X_1 - X_1^*) \\ Q_1^{*R} = Q_1^{*L} + k_1(X_1 - X_1^*) \end{cases} \tag{3-101}$$

式中，k_1 为中介支承1的动刚度。

由此可见，中介支承将内外两个转子互相联系起来。因此，在下面的继续传递中，两个转子是相互耦合的。于是式(3－99)、(3－100)、(3－101)可以改写成为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{0-1} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \boldsymbol{T}_{0-1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_0 \tag{3-102}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_1^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -k_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_1^L \tag{3-103}$$

同样的，由中介支承1到第2个中介支承2处，也可以写出与式(3－102)、(3－103)相类似的两个矩阵方程式：

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_2^L = \begin{bmatrix} T_{1-2} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & T_{1-2}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_1^R \tag{3-104}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_2^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 1 & \vdots & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -k_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_2^L \tag{3-105}$$

最后，右端(截面 n)的状态参数可表示为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} T_{2-n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & T_{2-n}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ X^* \\ \theta^* \\ M^* \\ Q^* \end{bmatrix}_2^R \tag{3-106}$$

右端边界条件为

$$M_n = Q_n = M_n^* = Q_n^* = 0 \tag{3-107}$$

左端边界条件与式(3-93)类似，只不过要增加相应的内转子边界条件。

对于非轴对称无耦合双转子情况，可以导出如下8个方程式：

$$
\begin{cases}
\ddot{\theta}_0 = -\dfrac{J_p}{J_d}\omega\dot{\alpha}_0 + \dfrac{1}{J_d}\dfrac{C_4}{C_3}X_0 + \dfrac{1}{J_d}\dfrac{C_5}{C_3}\theta_0 \\
\ddot{X}_0 = \dfrac{1}{m}\dfrac{C_1}{C_3}X_0 + \dfrac{1}{m}\dfrac{C_2}{C_3}\theta_0 - \dfrac{C_e}{m}\dot{X}_0 + e\Omega^2\cos\Omega t \\
\ddot{\alpha}_0 = \dfrac{J_p}{J_d}\omega\dot{\theta}_0 + \dfrac{1}{J_d}\dfrac{d_4}{d_3}Y_0 + \dfrac{1}{J_d}\dfrac{d_5}{d_3}\alpha_0 \\
\ddot{Y}_0 = \dfrac{1}{m}\dfrac{d_1}{d_3}Y_0 + \dfrac{1}{m}\dfrac{d_2}{d_3}\alpha_0 - \dfrac{C_e}{m}\dot{Y}_0 + e\Omega^2\sin\Omega t
\end{cases}
\tag{3-108}
$$

$$
\begin{cases}
\ddot{\theta}_0^* = -\dfrac{J_p^*}{J_d^*}\omega^*\dot{\alpha}_0^* + \dfrac{1}{J_d^*}\dfrac{C_4^*}{C_3^*}X_0^* + \dfrac{1}{J_d^*}\dfrac{C_5^*}{C_3^*}\theta_0^* \\
\ddot{X}_0^* = \dfrac{1}{m^*}\dfrac{C_1^*}{C_3^*}X_0^* + \dfrac{1}{m^*}\dfrac{C_2^*}{C_3^*}\theta_0^* - \dfrac{C_e^*}{m^*}\dot{X}_0^* + e^*\Omega^2\cos\Omega t \\
\ddot{\alpha}_0^* = \dfrac{J_p^*}{J_d^*}\omega^*\dot{\theta}_0^* + \dfrac{1}{J_d^*}\dfrac{d_4^*}{d_3^*}Y_0^* + \dfrac{1}{J_d^*}\dfrac{d_5^*}{d_3^*}\alpha_0^* \\
\ddot{Y}_0^* = \dfrac{1}{m^*}\dfrac{d_1^*}{d_3^*}Y_0^* + \dfrac{1}{m^*}\dfrac{d_2^*}{d_3^*}\alpha_0^* - \dfrac{C_e^*}{m^*}\dot{Y}_0^* + e^*\Omega^2\sin\Omega t
\end{cases}
\tag{3-109}
$$

式中，C_1、C_2、⋯C_5、d_1、d_2、⋯d_5 与式(3 - 98)中的定义相同，而 C_1^*、C_2^*、⋯C_5^*、d_1^*、d_2^*、⋯d_5^* 为相应的内转子参数。

若是轴对称，则 $\theta_0=\alpha_0,\theta_0^*=\alpha_0^*,X_0=Y_0,X_0^*=Y_0^*$，式(3 - 108)与式(3 - 109)各缩减两个式子。

3.1.5.2 “特征盘”运动方程的解

(1) 直接求解临界转速

当系统是线性的，且不考虑阻尼时，$C_e=0$，$C_e^*=0$。为了求临界转速，方程(3 - 98)、(3 - 108)与(3 - 109)中的第 2、4 式最后一项有关偏心距可取为零。认为系统的固有振动为

$$
\begin{cases}
x_0 = X_0\cos\Omega t \\
\theta_0 = \theta_0\cos\Omega t \\
y_0 = Y_0\sin\Omega t \\
\alpha_0 = \alpha_0\sin\Omega t
\end{cases}
\tag{3-110}
$$

运动方程可简化为

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}=0 \tag{3-111}
$$

式中：$\boldsymbol{q}=[X_0\quad\theta_0\quad Y_0\quad\alpha_0\quad X_0^*\quad\theta_0^*\quad Y_0^*\quad\alpha_0^*]^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{A}$ 为相应的系数方阵。

式(3 - 111)的求解方法与前述各节一样。为求临界转速，系数行列式余值应为零，即

$$
|\boldsymbol{A}|=0 \tag{3-112}
$$

实际上，采用扫频法，在行列式余值改变符号的频率间隔中迭代逼近，可求得临界转速。然后，代入运动方程(3 - 111)，求状态参数 $\boldsymbol{q}$ 的相对值。最后，应用所求得的 $\boldsymbol{q}$ 值，由轴段传递矩阵逐站求得截面状态参数，再用归一化处理，得到转子 - 支承系统的归一化振型。

(2) 用求响应的方法确定临界转速

当转子 - 支承系统中的阻尼不可忽略时，方程式(3 - 98)、(3 - 108)与(3 - 109)各项均不能略去。如果系统是线性的，正同步进动情况，则可改写成为

$$Aq = U \tag{3-113}$$

式中 U 为转子 - 支承系统的不平衡力列阵。

此方程可以直接求解,得到该转子 - 支承系统的频响特性,由响应峰值确定临界转速。

(3) 数值积分法

在一般情况下,转子 - 支承系统是有阻尼的、具有不平衡偏心的,而且可能是非线性的在这种情况下,“特征盘”运动方程应进行降阶处理,然后用数值积分法求解。一般可采用龙格 - 库塔法或欧拉法等差分格式,初值可根据经验选定;也可将计算模型进一步简化后直接求解,作为非简化系统的初值。

数值积分后可得到在各个转速下“特征盘”处的不平衡响应、轴心运动轨迹,从而确定临界转速及不平衡响应,并且可以作稳定性分析。在确定临界转速后,由求得的状态参数值,用传递矩阵法求各截面状态参数,从而求得相应的振型。

3.1.6　有限元素法

3.1.6.1　转子有限元分析

转子由具有分布质量和弹性的轴、离散的刚性盘、离散的具有弹性和阻尼的轴承组成,其运动方程由这些元素的运动方程组合而成。

(1) 坐标系

为了建立元素和系统的运动方程,需建立如图 3 - 30 所示坐标系,其中 XYZ 为固定坐标系,xyz 为旋转坐标系。

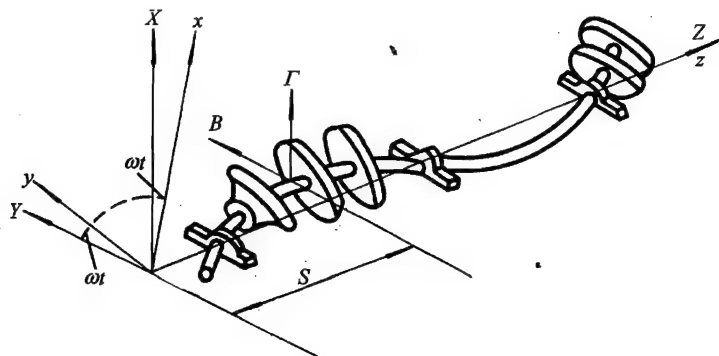


图 3 - 30　转子坐标系

变形状态下,任意横截面相对于固定坐标系的位置按以下方法确定:以 Y 向位移 $V(s,t)$ 及 X 向位移 $W(s,t)$ 确定弹性中心线位置,以绕 Y 轴的转角 $B(s,t)$ 和绕 X 轴的转角 $\Gamma(s,t)$ 确定横截面方位,横截面还绕其自身中心线旋转。

(2) 盘元素运动方程

刚性盘的动能 T^{d} 为

$$T^{d} = \frac{1}{2}m^{d}\dot{V}^{2} + \frac{1}{2}m^{d}\dot{W}^{2} + \frac{1}{2}J_{p}^{d}\dot{\varphi}^{2} + \frac{1}{2}J_{d}^{d}\dot{B}^{2} + \frac{1}{2}J_{d}^{d}\dot{\Gamma}^{2} + \frac{1}{2}J_{p}^{d}B^{2}\dot{\Gamma}^{2} - J_{p}^{d}B\dot{\varphi}\dot{\Gamma}$$

对于等速系统 $\dot{\varphi} = \omega$,则有

$$T^{d} = \frac{1}{2}m^{d}\dot{V}^{2} + \frac{1}{2}m^{d}\dot{W}^{2} + \frac{1}{2}J_{p}^{d}\omega^{2} + \frac{1}{2}J_{d}^{d}\dot{B}^{2} + \frac{1}{2}J_{d}^{d}\dot{\Gamma}^{2} + \frac{1}{2}J_{p}^{d}B^{2}\dot{\Gamma}^{2} - J_{p}^{d}B\omega\dot{\Gamma}$$

式中：m^{d}—— 盘的质量；

$J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}$、$J_{\mathrm{p}}^{\mathrm{d}}$—— 分别为盘的赤道转动惯量和极转动惯量；

ω—— 自转角速度。

利用拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T^{\mathrm{d}}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T^{\mathrm{d}}}{\partial q} = Q$$

可得刚性盘相对于固定坐标系的运动方程为

$$(\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{d}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}})\ddot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{d}} - \omega \boldsymbol{G}^{\mathrm{d}} \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{d}} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{d}} \tag{3-114}$$

式中：$\boldsymbol{Q}$—— 外力矢量；

$\boldsymbol{M}$—— 质量矩阵及质量惯性矩阵；

$\boldsymbol{G}$—— 陀螺矩阵；

$\boldsymbol{q}$—— 位移矢量，$\boldsymbol{q} = [V\ W\ B\ \Gamma]^{\mathrm{T}}$；

ω—— 转子自转角速度。

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} m^{\mathrm{d}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^{\mathrm{d}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{\mathrm{p}}^{\mathrm{d}} \\ 0 & 0 & J_{\mathrm{p}}^{\mathrm{d}} & 0 \end{bmatrix}$$

引入正交旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$：

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & -\sin\Omega t & 0 & 0 \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\Omega t & -\sin\Omega t \\ 0 & 0 & \sin\Omega t & \cos\Omega t \end{bmatrix}$$

用 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 左乘方程(3－114)两边，可得到盘元素相对于旋转坐标系的运动方程。$\boldsymbol{R}$ 中的 Ω 为转子进动角速度。

(3) 普通梁元素运动方程

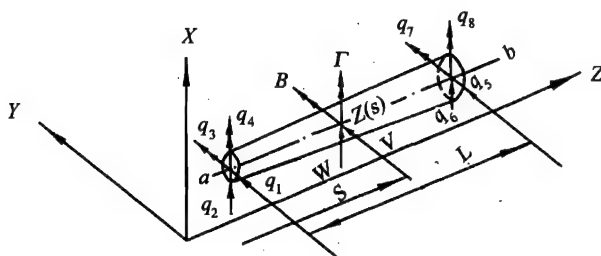


图 3－31　普通梁元素和坐标

转子中轴类元素系普通梁元素，每个元素具有两个节点，8个自由度。每个节点具有4个自由度，即 Y、X 方向的位移及绕它的转角。元素的随时间而变化的横截面位移（$V\ W\ B\ \Gamma$）同时也是沿元素轴线位置（S）的函数，元素端点随时间而变化的广义位移（位移和转角）为

$$\boldsymbol{q}^{e}(t) = [q_1^e \quad q_2^e \quad q_3^e \quad q_4^e \quad q_5^e \quad q_6^e \quad q_7^e \quad q_8^e]^{T} \qquad (3-115)$$

设元素内任意一点的 Y 向、X 向位移为 $V(s,t)$、$W(s,t)$，它们可以用端点位移表示为

$$\begin{cases} V(s,t) = \psi_1 q_1^e + \psi_2 q_4^e + \psi_3 q_5^e + \psi_4 q_8^e \\ W(s,t) = \psi_1 q_2^e - \psi_2 q_3^e + \psi_3 q_6^e - \psi_4 q_7^e \end{cases} \qquad (3-116)$$

位移（V, W）与转角（B, Γ）的关系可用如下方程式表示：

$$\begin{cases} B = -\dfrac{\partial W}{\partial S} \\ \Gamma = \dfrac{\partial V}{\partial S} \end{cases} \qquad (3-117)$$

由式（3－116）、（3－117）可得元素内任意一点 $z(s)$ 的转角 $B(s,t)$、$\Gamma(s,t)$ 与端点位移关系

$$\begin{cases} B(s,t) = -\varphi_1 q_2^e + \varphi_2 q_3^e - \varphi_3 q_6^e + \varphi_4 q_7^e \\ \Gamma(s,t) = \varphi_1 q_1^e + \varphi_2 q_4^e + \varphi_3 q_5^e + \varphi_4 q_8^e \end{cases} \qquad (3-118)$$

式中：ψ_1、ψ_2、ψ_3、ψ_4、φ_1、φ_2、φ_3、φ_4 分别为

$$\begin{cases} \psi_1 = \dfrac{1}{1+\varphi_s}[1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + (1-\xi)\varphi_s] \\ \psi_2 = \dfrac{1}{1+\varphi_s}[\xi - 2\xi^2 + \xi^3 + \dfrac{1}{2}(\xi - \xi^2)\varphi_s]L \\ \psi_3 = \dfrac{1}{1+\varphi_s}(3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi\varphi_s) \\ \psi_4 = \dfrac{1}{1+\varphi_s}[-\xi^2 + \xi^3 - \dfrac{1}{2}(\xi - \xi^2)\varphi_s]L \end{cases} \qquad (3-119)$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{1+\varphi_s}[(6\xi^2 - 6\xi)\dfrac{1}{L}] \\ \varphi_2 = \dfrac{1}{1+\varphi_s}[1 - 4\xi + 3\xi^2 + \varphi_s(1-\xi)] \\ \varphi_3 = \dfrac{1}{1+\varphi_s}[(6\xi - 6\xi^2)\dfrac{1}{L}] \\ \varphi_4 = \dfrac{1}{1+\varphi_s}(3\xi^2 - 2\xi + \varphi_s\xi) \end{cases} \qquad (3-120)$$

式中：$\xi = \dfrac{s}{L}$；

$\varphi_s = \dfrac{12EI^e}{GA_s L^2}$。

对于空心轴

$$A_s = \frac{A}{\dfrac{10}{9}\left(1 + \dfrac{1.6Dd}{D^2 + d^2}\right)}$$

或

$$A_s = \frac{A}{\frac{7+6\mu}{6(1+\mu)}\left[1+\frac{20+12\mu}{7+6\mu}\left(\frac{Dd}{D^2+d^2}\right)^2\right]}$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2-d^2) \qquad I = \frac{\pi}{64}(D^4-d^4)。$$

式中，φ_s 为剪切变形系数；A_s 为有效抗剪面积；A 为横截面面积；E 为弹性模量；I 为截面惯性矩；G 为剪切模量；D、d、L 分别为元素外径、内径、长度；μ 为泊松比。

构造平动形函数矩阵 $\overline{\boldsymbol{\Psi}}(s)$ 和转动形函数矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(s)$

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{\Psi}}(s) = \begin{bmatrix}\psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4\\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & -\psi_4 & 0\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{\Phi}(s) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_B\\ \boldsymbol{\Phi}_\Gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\varphi_1 & \varphi_2 & 0 & 0 & -\varphi_3 & \varphi_4 & 0\\ \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4\end{bmatrix}\end{cases} \tag{3-121}$$

式(3－116)、(3－118) 可写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix}V(s,t)\\ W(s,t)\end{Bmatrix} = \overline{\boldsymbol{\Psi}}(s)\boldsymbol{q}^e(t) \tag{3-122}$$

$$\begin{Bmatrix}B(s,t)\\ \Gamma(s,t)\end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{q}^e(t) \tag{3-123}$$

微元体的弹性弯曲变形能 $\mathrm{d}P_B^e$，轴向力位能 $\mathrm{d}P_A^e$，动能 $\mathrm{d}T^e$ 可写成

$$\begin{cases}\mathrm{d}P_B^e = \frac{1}{2}EI^e(V''^2_b + W''^2_b)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}GA_s(V'''^2_s + W'''^2_s)\mathrm{d}s\\ \mathrm{d}P_A^e = -\frac{1}{2}H(V'^2 + W'^2)\mathrm{d}s\\ \mathrm{d}T^e = \frac{1}{2}\rho(\dot{V}^2 + \dot{W}^2)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 J_p^e\mathrm{d}s + \frac{1}{2}J_d^e(\dot{B}^2 + \dot{\Gamma}^2)\mathrm{d}s - BJ_p^e\dot{\varphi}\dot{\Gamma}\mathrm{d}s\end{cases} \tag{3-124}$$

式中，ρ 为单位长度质量；J_d^e、J_p^e 这元素的赤道、极转动惯量；H 为轴向力；φ 为转角，对于等速系统 $\varphi = \omega t, \dot{\varphi} = \omega$，$\omega$ 为转子自转角速度；下标 b 表示弯曲变形，s 表示剪切变形。将式(3－122)、(3－123) 代入式(3－124)，并沿元素全长积分得元素能量 U^e

$$\begin{aligned}U^e &= P_B^e + P_A^e + T^e\\ &= \frac{1}{2}[\boldsymbol{q}^e]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_B^e - \boldsymbol{K}_A^e)\boldsymbol{q}^e + \frac{1}{2}J_p^e L\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}[\dot{\boldsymbol{q}}^e]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_T^e + \boldsymbol{M}_R^e)\dot{\boldsymbol{q}}^e - \dot{\varphi}[\dot{\boldsymbol{q}}^e]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^e\boldsymbol{q}^e\end{aligned} \tag{3-125}$$

式中：$\boldsymbol{K}_B^e$—— 元素的弯曲和剪切刚度矩阵；

$\boldsymbol{K}_A^e$—— 元素拉伸刚度矩阵；

$\boldsymbol{M}_T^e$、$\boldsymbol{M}_R^e$—— 元素质量矩阵；

$\boldsymbol{N}^e$—— 陀螺矩阵 $\boldsymbol{G}^e$ 的构成成分($\boldsymbol{G}^e = \boldsymbol{N}^e - [\boldsymbol{N}^e]^{\mathrm{T}}$)。

这些矩阵的表达式为

$$\begin{cases} K_B = \int_0^L EI^e[\overline{\Psi}''_b]^T\overline{\Psi}''_b ds + \int_0^L GA_s[\overline{\Psi}'''_s]^T\overline{\Psi}'''_s ds \\ K_A = \int_0^L H[\overline{\Psi}']^T\overline{\Psi}' ds \\ M_T^e = \int_0^L \rho[\overline{\Psi}]^T\overline{\Psi} ds \\ M_R^e = \int_0^L J_d^e[\boldsymbol{\Phi}]^T\boldsymbol{\Phi} ds \\ N^e = \int_0^L J_p^e[\boldsymbol{\Phi}_\Gamma]^T\boldsymbol{\Phi}_B ds \end{cases} \tag{3-126}$$

对同一元素，EI^e、H、ρ、J_d^e、J_p^e、GA_s等为常数，将式(3－126)中各矩阵展开相乘再积分可得显式形式为

$$K_B^e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} K_{B1} & & & & & & & \\ 0 & K_{B1} & & & \text{对} & & & \\ 0 & -K_{B4} & K_{B2} & & & & & \\ K_{B4} & 0 & 0 & K_{B2} & & & & \\ -K_{B1} & 0 & 0 & -K_{B4} & K_{B1} & & \text{称} & \\ 0 & -K_{B1} & K_{B4} & 0 & 0 & K_{B1} & & \\ 0 & -K_{B4} & K_{B3} & 0 & 0 & K_{B4} & K_{B2} & \\ K_{B4} & 0 & 0 & K_{B3} & -K_{B4} & 0 & 0 & K_{B2} \end{bmatrix} \tag{3-127}$$

式中：$K_{B1} = \dfrac{12}{1+\varphi_s}$;

$K_{B2} = \dfrac{4+\varphi_s}{1+\varphi_s}L^2$;

$K_{B3} = \dfrac{2-\varphi_s}{1+\varphi_s}L^2$;

$K_{B4} = \dfrac{6L}{1+\varphi_s}$。

$$K_A^e = \frac{H}{30L(1+\varphi_s)^2}\begin{bmatrix} K_{A1} & & & & & & & \\ 0 & K_{A1} & & & \text{对} & & & \\ 0 & -K_{A4} & K_{A2} & & & & & \\ K_{A4} & 0 & 0 & K_{A2} & & & \text{称} & \\ -K_{A1} & 0 & 0 & -K_{A4} & K_{A1} & & & \\ 0 & -K_{A1} & K_{A4} & 0 & 0 & K_{A1} & & \\ 0 & -K_{A4} & K_{A3} & 0 & 0 & K_{A4} & K_{A2} & \\ K_{A4} & 0 & 0 & K_{A3} & -K_{A4} & 0 & 0 & K_{A2} \end{bmatrix} \tag{3-128}$$

式中：$K_{A1} = 36 + 60\varphi_s + 30\varphi_s^2$;

$K_{A2} = 4L^2 + 5L^2\varphi_s + 2.5L^2\varphi_s$;

$K_{A3} = -(L^2 + 5L^2\varphi_s + 2.5L^2\varphi_s)$;

$K_{A4} = 3L$。

$$M_T^e = \frac{\rho L}{(1+\varphi_s)^2}\begin{bmatrix} M_{T1} & & & & & & & \\ 0 & M_{T1} & & & & & & \\ 0 & -M_{T4} & M_{T2} & & & \text{对} & & \\ M_{T4} & 0 & 0 & M_{T2} & & & & \\ M_{T3} & 0 & 0 & M_{T5} & M_{T1} & & \text{称} & \\ 0 & M_{T3} & -M_{T5} & 0 & 0 & M_{T1} & & \\ 0 & M_{T5} & M_{T6} & 0 & 0 & M_{T4} & M_{T2} & \\ -M_{T5} & 0 & 0 & M_{T6} & -M_{T4} & 0 & 0 & M_{T2} \end{bmatrix} \tag{3-129}$$

式中：$M_{T1} = \frac{13}{35} + \frac{7}{10}\varphi_s + \frac{1}{3}\varphi_s^2$；

$M_{T2} = \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60}\varphi_s + \frac{1}{120}\varphi_s^2\right)L^2$；

$M_{T3} = \frac{9}{70} + \frac{3}{10}\varphi_s + \frac{1}{6}\varphi_s^2$；

$M_{T4} = \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120}\varphi_s + \frac{1}{24}\varphi_s^2\right)L$；

$M_{T5} = \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40}\varphi_s + \frac{1}{24}\varphi_s^2\right)L$；

$M_{T6} = -\left(\frac{1}{140} + \frac{1}{60}\varphi_s + \frac{1}{120}\varphi_s^2\right)L^2$。

$$M_R^e = \frac{\rho L}{(1+\varphi_s)^2}\left(\frac{r_\rho}{L}\right)^2\begin{bmatrix} M_{R1} & & & & & & & \\ 0 & M_{R1} & & & & & & \\ 0 & -M_{R4} & M_{R2} & & & \text{对} & & \\ M_{R4} & 0 & 0 & M_{R2} & & & & \\ -M_{R1} & 0 & 0 & -M_{R4} & M_{R1} & & & \\ 0 & -M_{R1} & M_{R4} & 0 & 0 & M_{R1} & & \text{称} \\ 0 & -M_{R4} & M_{R3} & 0 & 0 & M_{R4} & M_{R2} & \\ M_{R4} & 0 & 0 & M_{R3} & -M_{R4} & 0 & 0 & M_{R2} \end{bmatrix} \tag{3-130}$$

式中：$M_{R1} = \frac{6}{5}$；

$M_{R2} = (\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\varphi_s + \frac{1}{3}\varphi_s^2)L^2$；

$M_{R3} = (-\frac{1}{30} - \frac{1}{6}\varphi_s + \frac{1}{6}\varphi_s^2)L^2$；

$M_{R4} = (\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\varphi_s)L$；

r_ρ——回转半径，$r_\rho = \sqrt{\frac{I^e}{A}}$。

$$
G^e = \frac{\rho r_\rho^2}{15L(1+\varphi_s)^2}\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ G_1 & 0 & & & \text{反} & & & \\ -G_2 & 0 & 0 & & & \text{对} & & \\ 0 & -G_2 & G_4 & 0 & & & & \text{称} \\ 0 & G_1 & -G_2 & 0 & 0 & & & \\ -G_1 & 0 & 0 & -G_2 & G_1 & 0 & & \\ -G_2 & 0 & 0 & G_3 & G_2 & 0 & 0 & \\ 0 & -G_2 & -G_3 & 0 & 0 & G_2 & G_4 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-131}
$$

式中：$G_1 = 36$；

$G_2 = 3L - 15L\varphi_s$；

$G_3 = L^2 + 5L^2\varphi_s - 5L^2\varphi_s^2$；

$G_4 = 4L^2 + 5L^2\varphi_s + 10L^2\varphi_s^2$。

将式(3－125)代入拉格朗日公式中并利用二次型微商公式，可得梁元素相对于固定坐标的运动方程：

$$
(\boldsymbol{M}_T^e + \boldsymbol{M}_R^e)\ddot{\boldsymbol{q}}^e - \omega \boldsymbol{G}^e \dot{\boldsymbol{q}}^e + (\boldsymbol{K}_B^e - \boldsymbol{K}_A^e)\boldsymbol{q}^e = \boldsymbol{Q}^e \tag{3-132}
$$

相对于旋转坐标系的运动方程只需用正交旋转矩阵的转置矩阵 $\boldsymbol{R}^T$ 左乘式(3－132)两边即可。

(4) 端齿梁元素运动方程

现代高速中小型发动机转子大多数采用施加轴向预紧力的端齿连接结构。由于各级盘间及盘与前后轴颈之间均采用端齿相连，因此需对转子施加适当的轴向预紧力才能保证其正常运转。由于这些端齿及轴向预紧力的存在将使转子系统刚度发生变化，因此含端齿的轴段不应再视其为普通整体式梁元素，应按照变轴力端齿梁元素来处理。

a. 坐标系与位移插值

变轴力端齿梁元素坐标系与普通梁元素坐标系完全一样，其力学模型及坐标系示于图3－32。

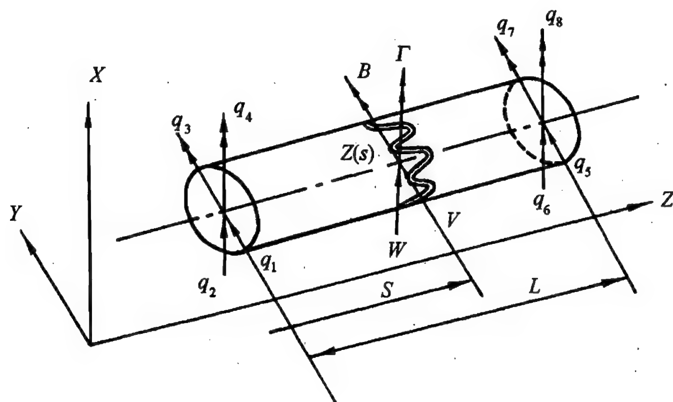


图3－32 变轴力端齿梁元素力学模型及坐标系

与普通梁元素一样，端点位移如式(3－115)所示，元素内任意一点 $z(s)$ 的位移 V、W、B、Γ，它们之间的关系式及它们与端点位移 $q^e(t)$ 的关系式仍与式(3－116)、(3－117)、(3－118)相同。除与弯曲变形能有关之处外，变轴力端齿梁元素的位移插值方式与普通梁元素完全一

样,仍采用式(3-121)的形函数形式及式(3-119)、(3-120)的 ψ_i、φ_i 表达式。

b. 端齿影响的基本考虑

同普通梁元素一样,对于变轴力端齿梁元素也可写出拉格朗日方程式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial(T - P_A - P_B)}{\partial q} = Q \tag{3-133}$$

式中: T—— 元素动能;

P_B—— 元素弹性弯曲变形能;

P_A—— 元素轴力位能;

Q—— 非保守广义力。

轴力位能 P_A 的大小可用变轴力在轴向位移上所作功的负值来表示。为简单起见,P_A 中位移仍采用式(3-122)和(3-119)规定的形式;动能项 T 中出现的位移表达式也仍采用式(3-122)、(3-123)、(3-119)、(3-120)规定的形式,不考虑端齿影响。

此处需考虑的只是端齿存在对于弹性弯曲变形能 P_B 的影响,仍通过某种反映其抗弯性的参数 J_{be} 及反映其抗剪性的参数 J_{sh} 与相应位移分量二阶及三阶导数平方和的乘积这种形式来表示端齿梁元素的 P_B 项,但由于端齿的存在,P_B 中出现的位移表达式不能再采用式(3-122)及式(3-119)形式。为此假设 P_B 中所用 V 及 W 为如下形式:

$$\begin{Bmatrix} V(s,t) \\ W(s,t) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{q}^{e}(t) \tag{3-134}$$

式中,$\boldsymbol{\Pi}$ 只是一种形式上的位移插值函数,由于端齿的存在无法写出其具体显式表达式。这样,可把变轴力端齿梁元素看成一承受变轴力的普通整体梁元素,只是其弹性弯曲变形能中出现的位移是采用式(3-134)的形式。

c. 变轴力端齿梁元素的特性矩阵

变轴力端齿梁元素微段的能量表达式如下:

$$\begin{cases} \mathrm{d}P_B^e = \dfrac{1}{2}J_{be}(V''^2_b + W''^2_b)\mathrm{d}s + \dfrac{1}{2}J_{sh}(V'''^2_s + W'''^2_s)\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}P_A^e = -\dfrac{1}{2}H(\omega)(V'^2 + W'^2)\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T^e = \dfrac{1}{2}\rho(\dot{V}^2 + \dot{W}^2)\mathrm{d}s + \dfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 J_p^e \mathrm{d}s + \dfrac{1}{2}J_d^e(\dot{B}^2 + \dot{\Gamma}^2)\mathrm{d}s - BJ_p^e\dot{\varphi}\dot{\Gamma}\mathrm{d}s \end{cases} \tag{3-135}$$

沿元素全长对式(3-135)积分,利用式(3-122)、(3-123)、(3-134)等并经整理,可得元素能量 U^e,其表达式与(3-125)式完全相同,但 $\boldsymbol{K}_B^e$、$\boldsymbol{K}_A^e$ 与普通梁元素不同,其表达式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_B^e = \displaystyle\int_0^L J_{be}[\boldsymbol{\Pi}''_b]^T\boldsymbol{\Pi}''_b\mathrm{d}s + \int_0^L J_{sh}[\boldsymbol{\Pi}'''_s]^T\boldsymbol{\Pi}'''_s\mathrm{d}s \\ \boldsymbol{K}_A^e = \displaystyle\int_0^L H(\omega)[\overline{\boldsymbol{\Psi}}']^T\overline{\boldsymbol{\Psi}}'\mathrm{d}s \\ \boldsymbol{M}_T^e = \displaystyle\int_0^L \rho[\overline{\boldsymbol{\Psi}}]^T\overline{\boldsymbol{\Psi}}\mathrm{d}s \\ \boldsymbol{M}_R^e = \displaystyle\int_0^L J_d^e[\boldsymbol{\Phi}]^T\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}s \\ \boldsymbol{N}^e = \displaystyle\int_0^L J_p^e[\boldsymbol{\Phi}_\Gamma]^T\boldsymbol{\Phi}_B\mathrm{d}s \end{cases} \tag{3-136}$$

式中,轴力 $H(\omega)$ 是随转速而变化的变轴力,以拉力为正,压力为负,其表达式为

$$H(\omega)=H_0+\frac{\overline{H}_{\bar{\omega}}}{\bar{\omega}^2}\omega^2=H_0+\alpha\omega^2 \tag{3-137}$$

式中：$H(\omega)$—— 任一转速下包含初始装配预紧力在内的转子拉杆或鼓筒中的轴向力；

H_0—— 转子装配时拉杆或鼓筒的初始轴向力；

ω—— 自转角速度；

$\overline{H}_{\bar{\omega}}$—— 在给定转速 $\bar{\omega}$ 下算出的无装配预紧力时拉杆或鼓筒中的轴向力；

α—— 影响系数,$\alpha=\overline{H}_{\bar{\omega}}/\bar{\omega}^2$。

$\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{e}}$ 的具体表达形式为

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{e}}=\frac{H_0+\alpha\omega^2}{30L(1+\varphi_{\mathrm{s}})^2}\begin{bmatrix} K_{A1} & & & & & & & \\ 0 & K_{A1} & & \text{对} & & & & \\ 0 & -K_{A4} & K_{A2} & & & & & \\ K_{A4} & 0 & 0 & K_{A2} & & & & \\ -K_{A1} & 0 & 0 & -K_{A4} & K_{A1} & & \text{称} & \\ 0 & -K_{A1} & K_{A4} & 0 & 0 & K_{A1} & & \\ 0 & -K_{A4} & K_{A3} & 0 & 0 & K_{A4} & K_{A2} & \\ K_{A4} & 0 & 0 & K_{A3} & -K_{A4} & 0 & 0 & K_{A2} \end{bmatrix} \tag{3-138}$$

式(3－138)中的 K_{A1}、K_{A2}、K_{A3}、K_{A4} 表达式与式(3－128)完全一样,但在式(3－138)中轴向力为$(H_0+\alpha\omega^2)$,它是转速的函数,不再像式(3－128)那样是一常数。式(3－137)及(3－138)对于普通整体式梁元素也同样适用。

由于端齿存在,式(3－136)的 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{e}}$ 中的 J_{be}、J_{sh}、$\boldsymbol{\Pi}''$、$\boldsymbol{K}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{e}}$ 等具体表达式无法直接写出,不能导出像普通梁元素式(3－127)那样的显式。有两种处理方法:一种是采用固体接触问题的三维有限元分析方法直接算出该端齿轴段的刚度矩阵,即端齿梁元素刚度矩阵;另一种方法是借用普通梁元素刚度矩阵计算的结果,通过小于1的折减系数对其进行修正而得到端齿梁元素刚度矩阵,详见参考文献[13]。

端齿梁元素运动方程与普通梁元素完全一样,见式(3－132)。

(5) 轴承控制方程

轴承控制方程为下式：

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{b}}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{q}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{b}} \tag{3-139}$$

式中：$\boldsymbol{C}^{\mathrm{b}}$—— 轴承阻尼矩阵；

$\boldsymbol{K}^{\mathrm{b}}$—— 轴承刚度矩阵；

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{b}}$—— 轴承外力矢量；

$\boldsymbol{q}^{\mathrm{b}}=[V\ W]^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{K}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix} K_{vv}^{\mathrm{b}} & K_{vw}^{\mathrm{b}} \\ K_{wv}^{\mathrm{b}} & K_{ww}^{\mathrm{b}} \end{bmatrix}$；

$\boldsymbol{C}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix} C_{vv}^{\mathrm{b}} & C_{vw}^{\mathrm{b}} \\ C_{wv}^{\mathrm{b}} & C_{ww}^{\mathrm{b}} \end{bmatrix}$。

(6) 转子系统运动方程

将元素的运动方程(3-114)、(3-132)、(3-139)进行组装,可得转子系统运动方程

$$\boldsymbol{M}^{s}\ddot{\boldsymbol{q}}^{s}-\omega\boldsymbol{G}^{s}\dot{\boldsymbol{q}}^{s}+\boldsymbol{K}^{s}\boldsymbol{q}^{s}=\boldsymbol{Q}^{s} \tag{3-140}$$

如果转子具有粘性阻尼,则在推出运动方程前先引入粘性阻尼系数 $\bar{E}$、$\bar{G}$ 及相应的应力应变关系式

$$\begin{cases}\sigma=\varepsilon E+\dot{\varepsilon}\bar{E}\\ \tau=rG+\dot{r}\bar{G}\end{cases} \tag{3-141}$$

利用式(3-141)和虚功原理重新推导方程(3-132),此时转子系统运动方程为

$$\boldsymbol{M}^{s}\ddot{\boldsymbol{q}}^{s}+(\boldsymbol{C}^{s}-\omega\boldsymbol{G}^{s})\dot{\boldsymbol{q}}^{s}+(\boldsymbol{K}^{s}+\omega\boldsymbol{H}^{s})\boldsymbol{q}^{s}=\boldsymbol{Q}^{s} \tag{3-142}$$

在式(3-140)及(3-142)中,$\boldsymbol{M}^{s}$、$\boldsymbol{K}^{s}$、$\boldsymbol{G}^{s}$、$\boldsymbol{C}^{s}$、$\boldsymbol{H}^{s}$ 分别为系统的质量矩阵、刚度矩阵、陀螺矩阵、阻尼矩阵和循环矩阵,它们由式(3-114)、(3-132)、(3-139)中的元素的相应矩阵组装而成。除 $\boldsymbol{G}^{s}$、$\boldsymbol{H}^{s}$ 是反对称的外,其余均为对称矩阵。

对于粘性阻尼转子元素,阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}^{e}$ 及循环矩阵 $\boldsymbol{H}^{e}$ 的矩阵形式如下:

$$\boldsymbol{C}^{e}=\frac{\bar{E}I}{(1+\varphi_{s})^{2}L^{3}}\begin{bmatrix} C_1 & & & & & & & \\ 0 & C_1 & & & \text{对} & & & \\ 0 & -C_4 & C_2 & & & & & \\ C_4 & 0 & 0 & C_2 & & & & \\ -C_1 & 0 & 0 & -C_4 & C_1 & & & \text{称} \\ 0 & -C_1 & C_4 & 0 & 0 & C_1 & & \\ 0 & -C_4 & C_3 & 0 & 0 & C_4 & C_2 & \\ C_4 & 0 & 0 & C_3 & -C_4 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \tag{3-143}$$

$$\boldsymbol{H}^{e}=\frac{\bar{E}I}{(1+\varphi_{s})^{2}L^{3}}\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ -C_1 & 0 & & & \text{反} & & & \\ C_4 & 0 & 0 & & & \text{对} & & \\ 0 & C_4 & -C_2 & 0 & & & \text{称} & \\ 0 & -C_1 & C_4 & 0 & 0 & & & \\ C_1 & 0 & 0 & C_4 & -C_1 & 0 & & \\ C_4 & 0 & 0 & -C_3 & -C_4 & 0 & 0 & \\ 0 & C_4 & -C_3 & 0 & 0 & C_4 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-144}$$

式(3-143)、(3-144)中,φ_{s} 仍为剪切变形系数,

$$C_1=12(1+r_s\varphi_s)\qquad C_2=L^2[(4+\varphi_s)(1+\varphi_s)+3\varphi_s(r_s-1)]$$

$$C_3=L^2[(2-\varphi_s)(1+\varphi_s)+3\varphi_s(r_s-1)]\qquad C_4=6L(1+r_s\varphi_s)$$

$$r_s=\frac{\bar{\varphi}_s}{\varphi_s}\qquad \bar{\varphi}_s=\frac{12\bar{E}I}{\bar{G}A_sL^2}$$

有关转子有限元理论分析详见参考文献[12]~[16]。对转子系统运动方程进行求解就能得到所需转子动力特性,求解方法将在本章下节模态综合法中一并提出。

3.1.6.2 机匣有限元分析

现代航空发动机主体机匣的特点之一是其结构形状大部分为回转壳,另一特点是机匣壁

较薄。对于此类结构，目前存在三种不同的处理方法：即分别采用曲面壳单元、锥壳单元、梁单元。研究表明：当采用曲面壳单元或截锥壳单元时都能获得较好的计算精度；采用梁单元分析时，误差较大；采用截锥壳元素比曲面壳单元自由度数少，工作量小，机时少。

鉴于航空发动机主体机匣特点，从精度、机时、内存和工作量等几方面综合考虑，采用截锥壳元素进行分析较合适。下面以截锥壳元素为例对机匣进行有限元分析。

截锥壳元素及其坐标示于图3－33。

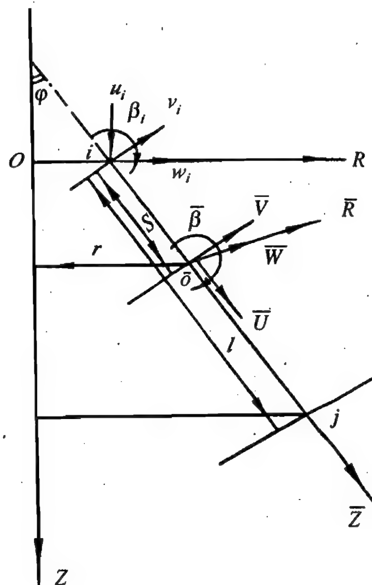


图3－33　截锥壳元素及坐标

图中：φ 为锥顶角的一半；$\bar{R}\ \bar{O}\ \bar{Z}$ 为局部坐标；ROZ 为总体坐标(以下各式中字母上带一杠者代表局部坐标)；u 为轴向位移；v 为切向位移；w 为径向位移；β 为转角。节点 i 的位移为

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}_i = [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{w}_i \quad \bar{\beta}_i]^{\mathrm{T}} \tag{3-145}$$

每个元素有两个节点，元素位移 $\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$ 为

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{w}_i \quad \bar{\beta}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{w}_j \quad \bar{\beta}_j]^{\mathrm{T}} \tag{3-146}$$

总体坐标位移与局部坐标位移之间的关系可用下式表示

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\delta}}_i \\ \bar{\boldsymbol{\delta}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_i \\ \boldsymbol{\delta}_j \end{bmatrix} \tag{3-147}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ 为坐标变换矩阵

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-148}$$

锥壳位移可表示为

$$\begin{cases} \bar{u}_i = \sum\limits_{n=0}^{m} \bar{u}_{in}(s)\cos n\theta \\ \bar{v}_i = \sum\limits_{n=0}^{m} \bar{v}_{in}(s)\sin n\theta \\ \bar{w}_i = \sum\limits_{n=0}^{m} \bar{w}_{in}(s)\cos n\theta \\ \bar{\beta}_i = \sum\limits_{n=0}^{m} \bar{\beta}_{in}(s)\cos n\theta \end{cases} \tag{3-149}$$

n 为周向波数。于是有

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}_i = \sum_{n=0}^{m} \boldsymbol{T}_n \begin{bmatrix} \bar{u}_{in} \\ \bar{v}_{in} \\ \bar{w}_{in} \\ \bar{\beta}_{in} \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{m} \boldsymbol{T}_n \bar{\boldsymbol{\delta}}_{in} \tag{3-150}$$

$$
\boldsymbol{T}_n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \tag{3-151}
$$

构造形函数矩阵 $\boldsymbol{N}_i$ 和 $\boldsymbol{N}_j$

$$
\boldsymbol{N}_i = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3) & L(\xi-2\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \tag{3-152}
$$

$$
\boldsymbol{N}_j = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3\xi^2-2\xi^3) & L(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix}
$$

式中：$\xi = s/L$，s 为节点坐标；L 为元素长度。

元素内任一点位移可用端点位移表示

$$
\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} = [\boldsymbol{N}_i \quad \boldsymbol{N}_j]\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\delta}}_i \\ \bar{\boldsymbol{\delta}}_j \end{bmatrix}^{\mathrm{e}} \tag{3-153}
$$

将式(3 - 150)代入上式可得

$$
\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} = \sum_{n=0}^{m}[\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{T}_n \quad \boldsymbol{N}_j\boldsymbol{T}_n]\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\delta}}_{in} \\ \bar{\boldsymbol{\delta}}_{jn} \end{bmatrix}^{\mathrm{e}} \tag{3-154}
$$

或

$$
\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} = \sum_{n=0}^{m}[\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{T}_n \quad \boldsymbol{N}_j\boldsymbol{T}_n]\bar{\boldsymbol{\lambda}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{in} \\ \boldsymbol{\delta}_{jn} \end{bmatrix}^{\mathrm{e}} \tag{3-155}
$$

$$
\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}
$$

由壳体理论，应变列阵 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 及应力应变关系可写成

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = s\bar{\boldsymbol{f}} \tag{3-156}
$$

$$
\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D\varepsilon} \tag{3-157}
$$

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_s \quad \varepsilon_\theta \quad r_{s\theta} \quad \partial e_s \quad \partial e_\theta \quad \partial e_{s\theta}]^{\mathrm{T}} \tag{3-158}
$$

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix}
\dfrac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 \\
\dfrac{\sin\varphi}{r} & \dfrac{\partial}{r\partial\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{r} \\
\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} & \left(\dfrac{\partial}{\partial s} - \dfrac{\sin\varphi}{r}\right) & 0 \\
0 & 0 & -\dfrac{\partial^2}{\partial s^2} \\
0 & \dfrac{\cos\varphi}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta} & \left(-\dfrac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} - \dfrac{\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial s}\right) \\
0 & \left(\dfrac{\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial s} - \dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\right) & \left(\dfrac{\sin\varphi}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\partial^2}{r\partial s\partial\theta}\right)
\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{f}}
$$

$$
D = \frac{Eh}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{12} & -\frac{\mu h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu h^2}{12} & -\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{12}h^2 \end{bmatrix} \tag{3-159}
$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵；μ 为泊松比；h 为壳体壁厚；r 为半径。

单元应变矩阵如下式

$$
\boldsymbol{\varepsilon}^{e} = \sum_{n=0}^{m}[\boldsymbol{B}_{in} \quad \boldsymbol{B}_{jn}]\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\delta}_{n}{}^{e} \tag{3-160}
$$

$$
\begin{cases} \boldsymbol{B}_{in} = s\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{T}_n \\ \boldsymbol{B}_{jn} = s\boldsymbol{N}_j\boldsymbol{T}_n \end{cases} \tag{3-161}
$$

单元刚度矩阵如下

$$
\begin{aligned} \boldsymbol{K}_n^{e} &= \int_0^1\int_0^{2\pi}[\overline{\boldsymbol{B}}_n]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\overline{\boldsymbol{B}}_n Lr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{B}}_{in}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\overline{\boldsymbol{B}}_{in} & \overline{\boldsymbol{B}}_{in}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\overline{\boldsymbol{B}}_{jn} \\ \overline{\boldsymbol{B}}_{jn}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\overline{\boldsymbol{B}}_{in} & \overline{\boldsymbol{B}}_{jn}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\overline{\boldsymbol{B}}_{jn} \end{bmatrix} Lr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{3-162}
$$

式中：$\overline{\boldsymbol{B}}_{in} = \boldsymbol{B}_{in}\boldsymbol{\lambda}$； $\overline{\boldsymbol{B}}_{jn} = \boldsymbol{B}_{jn}\boldsymbol{\lambda}$。

单元质量矩阵如下

$$
\boldsymbol{M}_n{}^{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{ii}^{(n)} & \boldsymbol{M}_{ij}^{(n)} \\ \boldsymbol{M}_{ji}^{(n)} & \boldsymbol{M}_{jj}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{3-163}
$$

$$
\begin{cases} \boldsymbol{M}_{ii}^{(n)} = \int_0^1\int_0^{2\pi}[\overline{\boldsymbol{N}}_i^n]^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{N}}_i^n\rho Lhr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi \\ \boldsymbol{M}_{ij}^{(n)} = \int_0^1\int_0^{2\pi}[\overline{\boldsymbol{N}}_i^n]^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{N}}_j^n\rho Lhr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi \\ \boldsymbol{M}_{ji}^{(n)} = \int_0^1\int_0^{2\pi}[\overline{\boldsymbol{N}}_j^n]^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{N}}_i^n\rho Lhr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi \\ \boldsymbol{M}_{jj}^{(n)} = \int_0^1\int_0^{2\pi}[\overline{\boldsymbol{N}}_j^n]^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{N}}_j^n\rho Lhr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi \end{cases} \tag{3-164}
$$

式中：$\overline{\boldsymbol{N}}_i^n = \boldsymbol{N}_i\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{\lambda}$；

$\overline{\boldsymbol{N}}_j^n = \boldsymbol{N}_j\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{\lambda}$。

将单元的刚度矩阵组装成锥壳的总刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^{s}$，将单元的质量矩阵组装成锥壳的总质量矩阵 $\boldsymbol{M}^{s}$，可得锥壳的方程

$$
\boldsymbol{M}^{s}\ddot{\boldsymbol{q}}^{s} + \boldsymbol{K}^{s}\boldsymbol{q}^{s} = \boldsymbol{Q}^{s} \tag{3-165}
$$

对该方程进行求解就能得到机匣动力特性，求解方法将在本章下节模态综合法中一并提出。有关公式推导见参考文献[17]、[18]。

$$\overline{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} Q^{(1)} \\ Q^{(2)} \\ \vdots \\ Q^{(N)} \end{bmatrix} \qquad \overline{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} Q^{\mathrm{b}}_{(1)} \\ Q^{\mathrm{b}}_{(2)} \\ \vdots \\ Q^{\mathrm{b}}_{(N)} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}^{(1)} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}^{(N)} \end{bmatrix} \qquad \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}^{(1)} & & & \\ & \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}^{(N)} \end{bmatrix}$$

将所有界面的坐标集成为 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{B}}$,引入系统的状态向量 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}$

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}} = \begin{bmatrix} q_{\mathrm{R}}^{(1)} \\ q_{\mathrm{R}}^{(2)} \\ \vdots \\ q_{\mathrm{R}}^{(N)} \\ y_{\mathrm{s}}^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \tag{3-183}$$

利用界面对接条件,引入系统变换矩阵 $\overline{\boldsymbol{S}}$(由子结构的 $\boldsymbol{S}$ 组合而成),则有

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{s}} = \overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}} \tag{3-184}$$

将式(3-184)代入式(3-182)得

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}\dot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}} + \overline{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{c}} \tag{3-185}$$

式中:$\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}} = \overline{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{m}}\overline{\boldsymbol{S}}$;

$\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}} = \overline{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{m}}\overline{\boldsymbol{S}}$;

$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}} = \overline{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{Q}}$;

$\overline{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{c}} = \overline{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{b}}$。

对于弹性耦合连接子结构,利用式(3-181),对系统引入关系式

$$\overline{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{c}} = \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}}\dot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}} - \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}} \tag{3-186}$$

将式(3-186)代入式(3-185),得到系统回到状态空间下的运动方程

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{s}}\dot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}} + \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}} \tag{3-187}$$

式中:$\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{s}} + \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}}$;

$\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{s}} + \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}$。

以上公式是对非轴对称系统而言。而对于轴对称系统,还可以利用对称性,方程(3-168)中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{f}$ 的阶数可以降低一半,可以在复状态空间下实施模态变换。引入复状态向量 $\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\dot{\boldsymbol{X}} \\ \boldsymbol{X} \end{bmatrix}$,此时子结构在状态空间下的运动方程(3-170)变为如下形式

$$\mathrm{i}\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F} \tag{3-188}$$

而自由振动微分方程(3-172)变成如下形式:

$$\mathrm{i}\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{I}} = 0 \tag{3-189}$$

式中:$\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}$、$\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}$ 均为实对称阵,它比式(3-172)在数学上求解较为简单,见参考文献[19]。

(6) 进动频率与临界转速的求解

在方程(3-187)中,令右端项 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}} = 0$,得到方程(3-187)的齐次形式

$$\bar{A}_s\dot{y}_s + \bar{B}_s y_s = 0 \tag{3-190}$$

令 $y_s = y_s^0 e^{\lambda t}$ 得

$$\lambda \bar{A}_s y_s^0 + \bar{B}_s y_s^0 = 0 \tag{3-191}$$

解方程(3-191)得复特征值 $\lambda_r = \alpha_r + i\Omega_r$ 及复特征向量 $y_s^{(r)}$，其中 Ω_r 为阻尼进动频率，α_r 为阻尼系数。

模态综合法的有关概念及详细公式可参见参考文献[19]～[23]。

3.1.8 采用有限元子结构模态综合法的工程算例分析

算例：某发动机整机模态及频率计算分析

(1) 结构及总体传力路线

该机由下列主要部件组成：附件传动系统(含油箱)、燃气发生器、自由涡轮、排气管、减速器、螺旋桨和各种机匣等。发动机有两个独立的涡轮，一个用于传动燃气发生器压气机，另一个用于传动螺桨减速器。采用单转子对置轴形式，自由涡轮后接同心式排气管，再接星型传动减速器。

压气机为单轴式组合压气机，由一级轴流和一级离心组成。燃气发生器转子由燃气发生器转子主体及拉紧螺杆(简称拉杆)两大部分组成，其中转子主体包括轴流压气机转子、离心压气机转子、涡轮转子。燃气发生器机匣包括压气机进气机匣、压气机机匣、中介机匣、离心叶轮罩、涡轮机匣、自由涡轮导向器及相应的支板、端盖等零部件。自由涡轮仅包括自由涡轮轴、盘、轴承座及轴承座支架。

整机结构示意图见图3-34，燃气发生器转子结构示意图见图3-35。

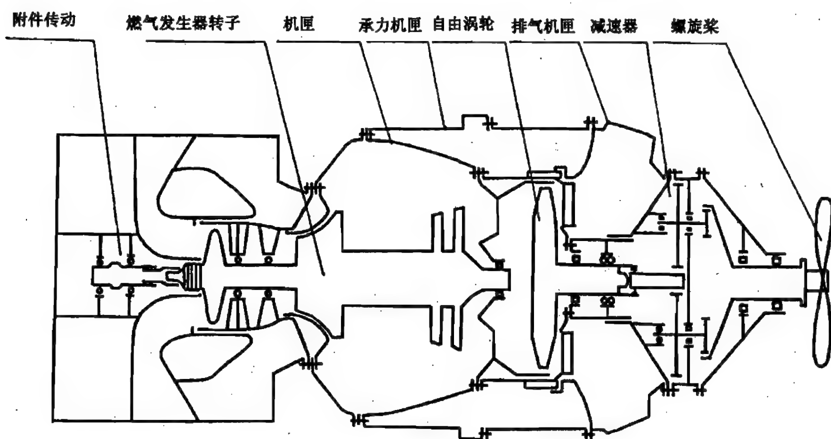


图3-34 某发动机结构示意图

(2) 整机计算模型的建立

a. 对安装座的处理

全台发动机载荷通过承力机匣的承力内、外环传到飞机上。因此，若视飞机或台架对发动机为完全约束时，承力机匣的内外环的有关节点位移为零。当视发动机为自由-自由梁时，这些节点的约束全部释放。

b. 对特殊部件的处理

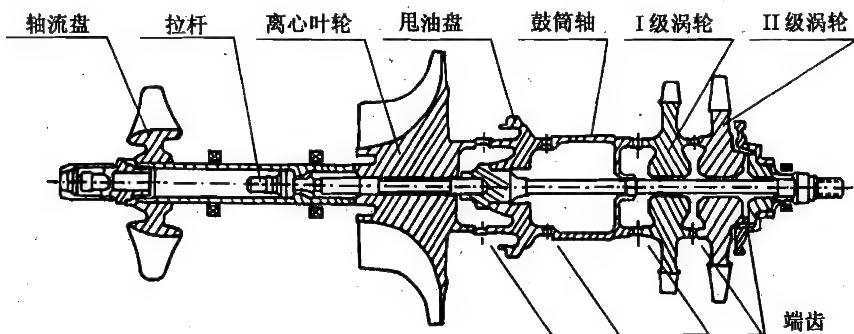


图 3－35　某发动机燃气发生器转子结构示意图

对减速器、螺旋桨、附件传动系统这三大特殊部件，只考虑其质量影响，不考虑刚度影响将减速器及螺旋桨质量加在减速器机匣与排气机匣的界面上，附件传动系统的质量加在附件传动机匣与压气机机匣的界面上。这样做的理由是因为这些部件机匣壁厚比核心机机匣壁厚大得多，例如减速器机匣壁厚比排气机匣壁厚大五倍，相对来说属于"刚硬型"，因此可视为刚体。

c. 子结构划分

在进行子结构划分时，根据结构特点及所用程序特点，主要考虑如下因素：

(a) 部件与部件之间的自然分界面设置为界面，例如轴承处、安装边等。

(b) 转子元素与壳元素不要划分在同一子结构中。

(c) 子结构划分的最佳方案是既保证足够的计算精度又能有效地降低机时，尽量用较少的子结构划分取得最大的模态综合效果。该机总节点数为 173，总单元数为 168，总自由度为 692，划分为 8 个子结构所用 CPU 时间是划分为 12 个子结构所用 CPU 时间的三倍。整机计算模型示于图 3－36。

d. 各子结构间耦合

参见图 3－36，各子结构之间耦合点为 A、B、C、D、E、F、G、J、K、L、M、P、Q、S。其中：

(a)B、D、F 为拉杆与转子主体之间耦合点，为刚性耦合，两子结构在 B、D、F 处位移及转角均相等。

(b)A、C、E 为转子与燃气发生器机匣之间耦合点，A、C 为刚性耦合，E 处轴承装有鼠笼式弹性支座，为弹性耦合。

(c)G 为自由涡轮与轴承座之间、支架与轴承座之间耦合点，为刚性耦合点。

(d)J、L、K 为机匣之间耦合点，通过安装边上一圈螺栓彼此相连，属于刚性耦合点。

(e)M、P、Q、S 为刚性耦合点，是为了减少 CPU 时间人为地将燃气发生器机匣肢解为五个子结构时的界面点。

e. 对叶片、盘的处理

为了保证转子主体轴的连续性，盘的一部分作为分布质量划分给轴，盘的其余部分及叶片按集中质量处理，位于其自身质心上。

f. 端齿及轴向预紧力的考虑

燃气发生器转子采用五对端齿相连。参见图 3－35，五对端齿均处理为端齿梁元，并按本章 3.1.6.1 的方法计算出它们的刚度影响系数，计算结果列于表 3－6。

预紧力以拉为正，压为负。拉杆受拉，转子主体受压。

表3－6　燃气发生器转子端齿刚度影响系数

端齿号	1	2	3	4	5
元素号	11	16	20	24	29
折减系数	0.577	0.364	0.534	0.410	0.601

g. 元素类型的选择

叶片盘为具有集中质量的刚体，燃气发生器转子主体、拉杆及自由涡轮转子等无端齿部位采用普通梁元素，有端齿部位采用变轴力端齿梁元素，自由涡轮轴承座支架及所有机匣均用截锥壳元素。

h. 其他

温度数据取自试车时壁温测试结果，温度影响在材料性能中加以考虑。

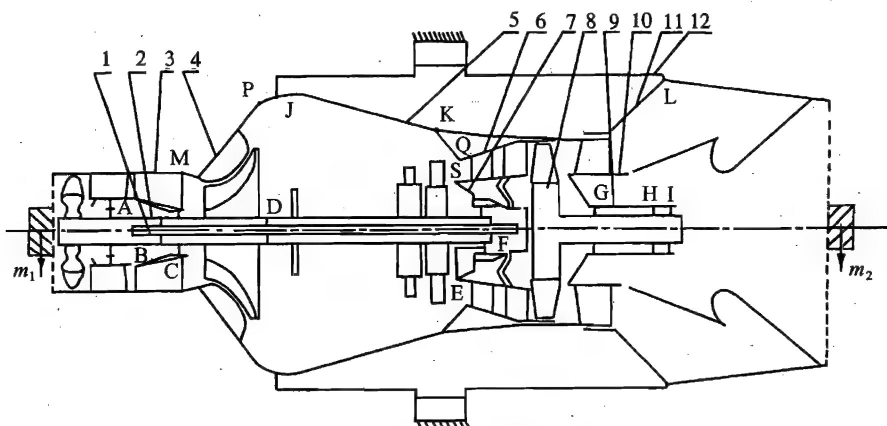


图3－36　某发动机整机动力特性计算模型(划分为12个子结构)

m_1—附件传动系统质量；m_2—减速器及螺旋桨质量；

1～12—子结构编号；1—拉杆；2—燃气发生器转子主体；3～7—燃气发生器机匣；8—自由涡轮；9—自由涡轮轴承座；10—轴承座支架；11—排气机匣；12—承力机匣；A～S—子结构之间耦合点

各子结构节点单元数据一览表列于表3－7。

表3－7　各子结构节点单元数据一览表

子结构编号	名　　称	节点数	单元数	自由度数	界面数
1	拉　　杆	16	15	64	3
2	燃气发生器转子主体	33	32	132	6
3	燃气发生器机匣	15	18	60	3
4	燃气发生器机匣	8	7	32	2
5	燃气发生器机匣	7	6	28	4
6	燃气发生器机匣	11	12	44	2
7	燃气发生器机匣	13	12	52	2
8	自由涡轮	10	9	40	1
9	自由涡轮轴承座	5	4	20	1
10	自由涡轮轴承座支架	13	12	52	2
11	排气机匣	20	19	80	1
12	承力机匣	22	22	88	2
	整　　机	173	168	692	19

(3) 有关原始参数

燃气发生器转子工作转速为每分钟 50000 多转，自由涡轮转子工作转速为每分钟 40000 多转，螺旋桨工作转速为每分钟 2000 多转，螺旋桨质量为 62.5 kg，减速器质量为 36.4 kg，附件传动系统质量为 31.8 kg。燃气发生器转子分界面采用五对圆弧端齿传扭定心，装配时初始预紧力右端（图 3－35、图 3－36）D 与 F 之间为 69580 N，左端 B 与 D 之间为 45080 N，几何尺寸参数等参见该机有关图纸。

（4）计算方法与计算软件简介

计算方法为有限元子结构模态综合法，计算软件采用分析转子－支承－机匣系统动力特性的通用程序 DARC 软件，该软件简介参见本手册第 4 章。

（5）计算结果

a. 部组件计算模态及频率

对燃气发生器转子等部件单独进行计算分析，其固有频率计算结果列于表 3－8。燃气发生器转子前三阶振型曲线示于图 3－37 ～ 图 3－39。表中 f 为频率，ω 为转速（下同）。

表 3－8　部组件固有频率计算结果　　($\omega = 0$)

部组件名称	计算结果		备注
	f(Hz)	f(rad/s)	
燃气发生器转子系统（含拉杆）	361.68	2272	划分为 2 个子结构
	977.10	6139	
	1258.33	7906	
	1381.08	8677	
自由涡轮－轴承座－支架系统	165.63	1040	划分为 3 个子结构
	467.20	2935	
	1768.75	11113	
	3530.80	22184	
机匣系统	493.01	3097	划分为 7 个子结构
	564.80	3548	
	650.65	4088	
	798.45	5016	
	930.57	5846	
	1254.20	7880	

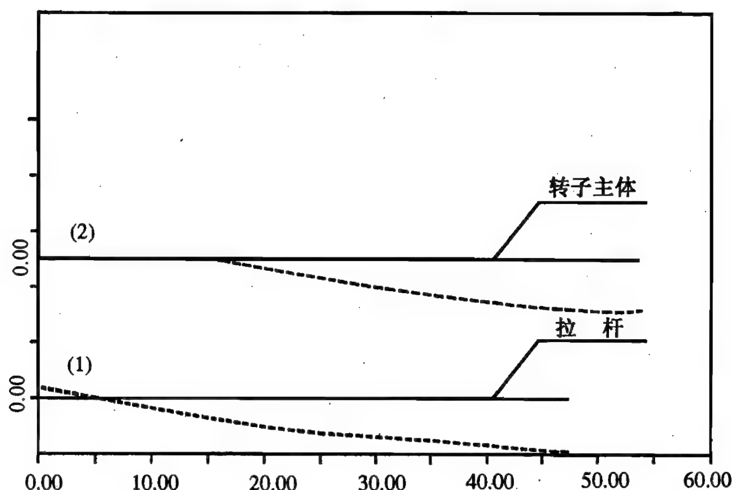


图 3－37　某发动机燃气发生器转子一阶振型（f = 361.68 Hz）

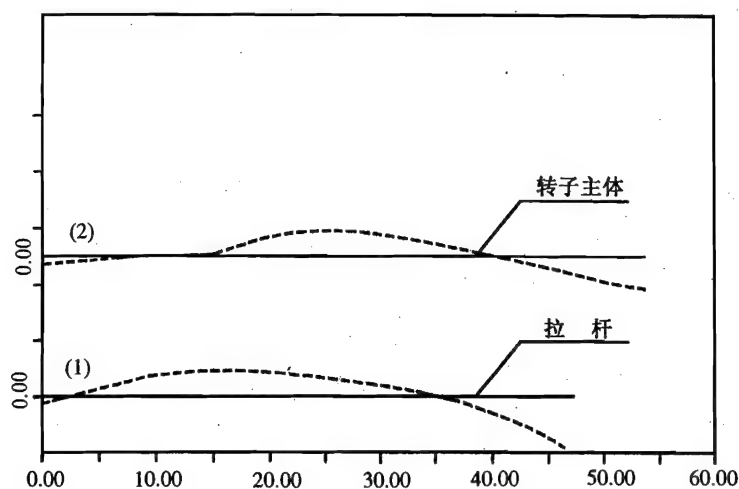


图 3-38 某发动机燃气发生器转子二阶振型(f = 977.1 Hz)

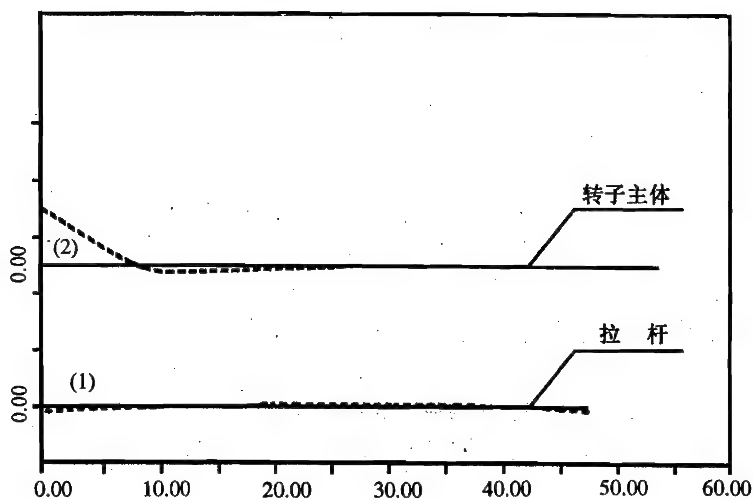


图 3-39 某发动机燃气发生器转子三阶振型(f = 1258.3 Hz)

b. 整机计算模态及频率

轴台固支条件下整机进动频率计算结果列于表3-9,表中 ω_1 为燃气发生器转子转速,ω_2 为自由涡轮转子转速。轴台固支及自由-自由条件下整机频率计算结果列于表3-10。轴台固支条件下整机频率计算结果与试验结果列于表3-11。图3-40~图3-44列出了部分整机模态曲线,图中实线表示结构轮廓线,虚线表示振型曲线。

表3－9　轴台固支整机进动频率计算结果　　(Hz)

ω_1(r/min)	10000	20000	30000	40000	52215	55000
ω_2(r/min)	8500	17000	25000	34000	43522	47000
1	±165.63	±165.63	±165.63	±165.63	±165.63	±165.63
2	+358.78	+360.88	+363.00	+365.11	+367.65	+368.35
	−354.64	−352.53	−350.43	−340.88	−316.68	−307.23
3	+470.11	+496.87	+521.43	+547.95	+573.51	+583.56
	−416.23	−390.03	−366.26	−348.35	−346.00	−345.20
4	±564.80	±564.80	±564.80	±564.80	±564.80	±564.60
5	±650.65	±650.65	±650.65	±650.65	±650.65	±650.65
6	+699.25	+699.38	+699.51	+699.71	+700.00	+700.13
	−699.05	−698.96	−698.91	−698.85	−698.78	−698.76
7	±930.56	±930.56	±930.56	±930.56	±930.56	±930.56
8	+959.28	+971.53	+983.55	+995.43	+1009.45	+1013.25
	−933.66	−920.08	−905.90	−891.05	−872.65	−876.50
9	+1258.33	+1258.70	+1259.08	+1259.45	+1259.90	+1260.01
	−1257.56	−1247.46	−1213.80	−1180.05	−1140.30	−1129.36
10	+1346.53	+1378.41	+1409.50	+1439.56	+1473.16	+1481.56
	−1280.91	−1257.21	−1256.83	−1256.46	−1256.01	−1255.90
11	±1373.73	±1373.73	±1373.73	±1373.73	±1373.73	±1373.73
12	+1508.18	+1508.30	+1508.50	+1508.85	+1509.95	+1510.68
	−1508.00	−1507.91	−1507.56	−1467.96	−1417.25	−1398.25
13	+1621.61	+1621.91	+1622.16	+1622.41	+1622.75	+1622.86
	−1618.33	−1581.00	−1525.38	−1508.13	−1508.00	−1507.98

表3－10　轴台固支及自由－自由条件下整机频率计算结果　　($\omega = 0$)

阶　数	轴　台　固　支		自　由　－　自　由	
	f(Hz)	主振型部位	f(Hz)	主振型部位
			127.93	整机刚体模态
1	*165.63	自由涡轮转子	*165.63	自由涡轮转子
2	*356.10	燃气发生器转子	*356.10	燃气发生器转子
3	443.08	自由涡轮转子	442.20	自由涡轮转子
4 5 6 7	564.80 650.65 699.15 930.57	机　匣		
			527.35 591.68 609.76 930.36	机　匣

续表 3－10

阶　数	轴　台　固　支		自　由　－　自　由	
	f(Hz)	主振型部位	f(Hz)	主振型部位
8	*946.70	燃气发生器转子	*946.70	燃气发生器转子
9	*1257.95	燃气发生器转子	*1257.95	燃气发生器转子
10	*1314.10	燃气发生器转子端部	*1314.10	燃气发生器转子端部
11 12 13	1373.73 1508.08 1620.98	机　匣	1373.31 1481.53 1618.13	机　匣

注：表中带 * 者表示两种状态下所得计算值完全相等。

表 3－11　轴台固支条件下整机频率计算与试验结果对照　($\omega=0$)

阶　数	整机计算结果		整机试验结果		振动类型综合分析
	f(Hz)	主振型部位	f(Hz)	峰值	
			25 50 100 115		由计算模型中未考虑的部件引起
1	165.63	自由涡轮转子	160	大	自由涡轮转子振动
2	356.10	燃气发生器转子	360	最大	燃气发生器转子一阶
3	443.08	自由涡轮转子	440	大	自由涡轮转子振动
			495 540		由计算模型中未考虑的部件引起
4	564.80	机　匣	565	大	机匣振动
5	650.65	机　匣	615	大	机匣振动
6	699.15	机　匣	720		机匣振动
7	930.57	机　匣	900		机匣振动
8	946.70	燃气发生器转子	1005	较大	燃气发生器转子二阶
9	1257.95	燃气发生器转子	1260	大	燃气发生器转子三阶
10	1314.10	燃气发生器转子端部	1300		燃气发生器转子端部
11	1373.73	机　匣	1480		机匣振动
12	1508.08	机　匣	1610		机匣振动
13	1620.98	机　匣	1675	大	机匣振动
14	1731.53	机　匣	1760	大	机匣振动

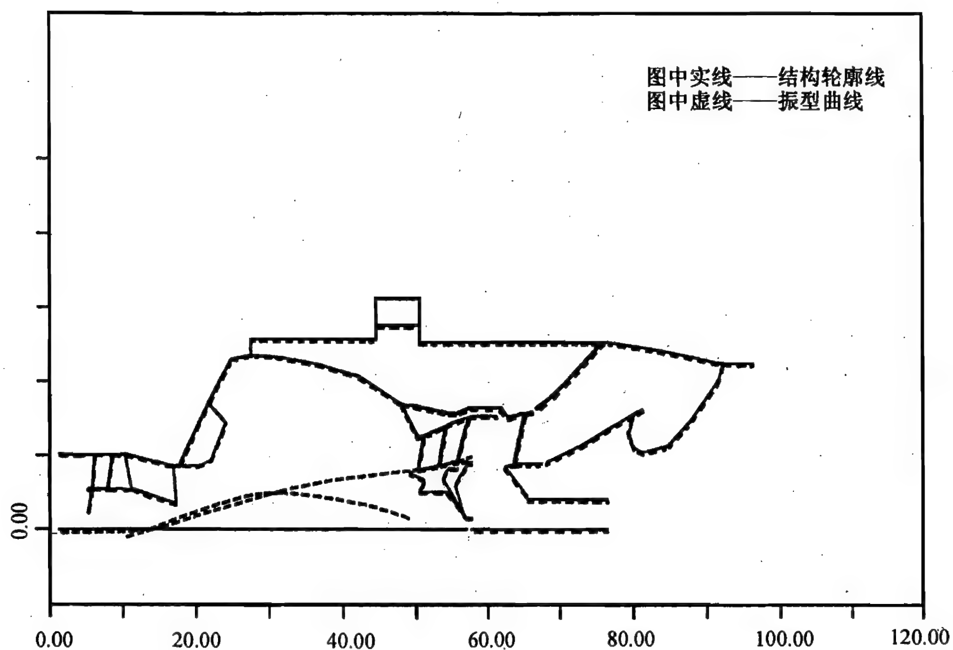


图 3-40　某发动机某阶整机振型曲线(转子振动为主,f = 356.1 Hz)

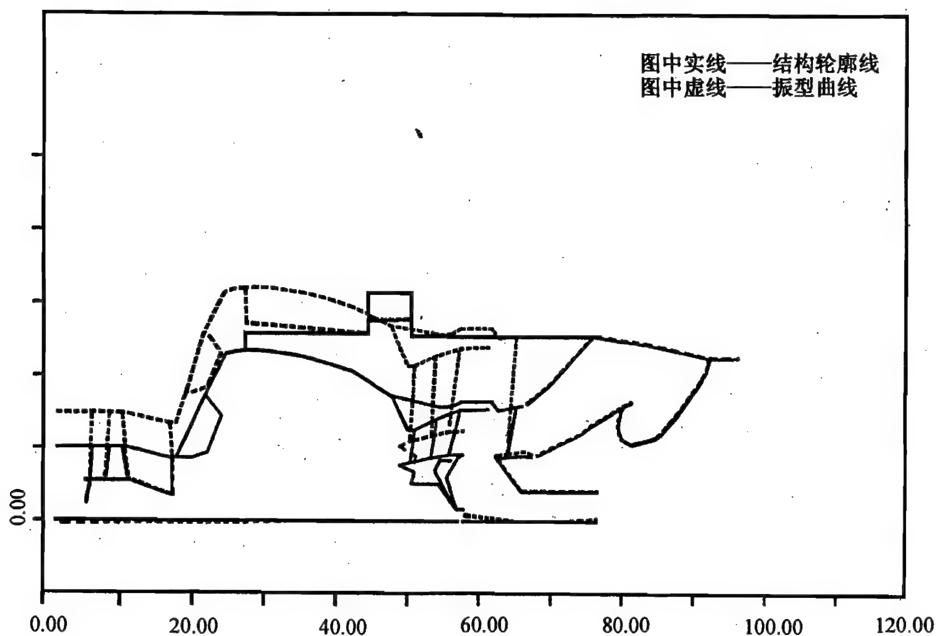


图 3-41　某发动机某阶整机振型曲线(机匣振动为主,f = 650.65 Hz)

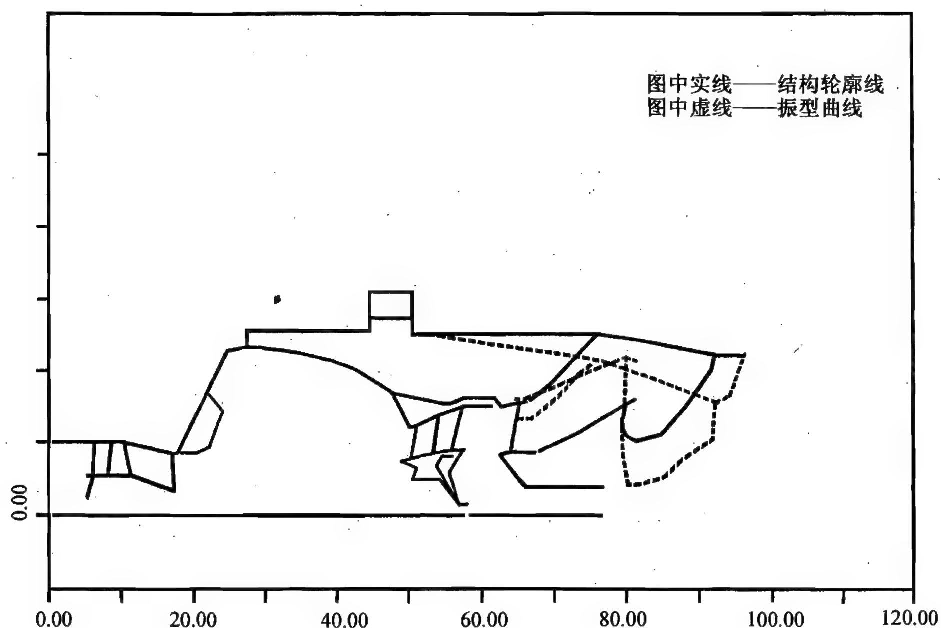


图 3－42　某发动机某阶整机振型曲线(机匣振动为主，f = 930.57 Hz)

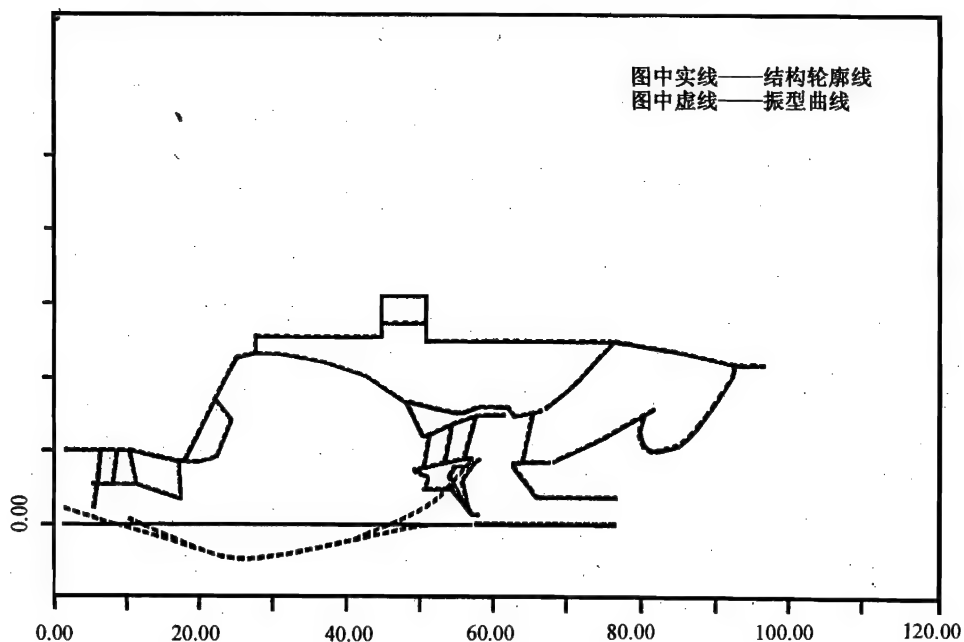


图 3－43　某发动机某阶整机振型曲线(转子振动为主，f = 946.7 Hz)

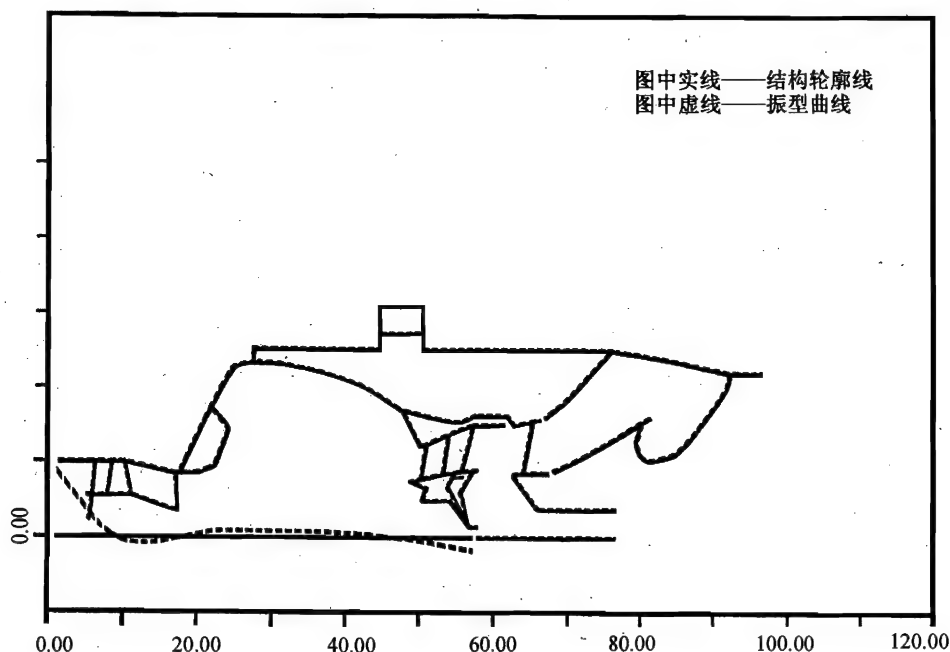


图 3-44　某发动机某阶整机振型曲线(转子端部局部振动，f = 1314.1 Hz)

(6) 计算结果分析

a. 由表3-11可看到，整机试验模态比整机计算模态密集丰富，这是因为计算模型中还有一些部件未考虑进去，例如，燃滑油系统、油泵电机等。

b. 整机试验时，整机轴台固支是将承力机匣承力环固定在轴台支架上，在计算中对这些点施加了约束，整机自由-自由是用橡皮绳将整台发动机吊装，相当于自由-自由梁，在计算中承力环上这些节点无约束，从表3-10结果可以看出该两种安装条件仅对机匣频率有影响，而对远离机匣承力环的转子频率无影响；自由-自由条件下比轴台固支情况下多一阶整机刚体模态。

c. 表3-8是对部件或组件单独进行计算的结果，表3-11是对整机进行计算的结果，该两表结果表明，整机模态与部件模态既有紧密联系又有区别，这说明整机中某阶模态是以某个部件的模态为主产生的。例如，单独对燃气发生器转子进行分析时，其一阶频率为361.68 Hz，对整机进行分析时其二阶频率为356.7 Hz，这说明整机中第二阶模态主要是由燃气发生器转子引起的。

d. 对整机模态进行分析是比较复杂的工作，将部件模态与整机模态结合，计算模态与试验模态结合进行综合分析，是提高分析精度的一种有效方法。

本算例详见参考文献[24]。

3.2　应变能分析

燃气涡轮发动机结构设计准则在转子系统设计要求中指出，为了减小转子系统不平衡振动响应的敏感度和避免转子系统自激振动引起的失稳，对转子-支承-机匣系统应进行应变

能分析。转子部件在临界转速(或响应峰值转速)时的弯曲应变能应不超过转子-支承-机匣系统总应变能的25%。一方面,转子弯曲应变能的增加,意味着转子呈现弯曲较大的振型。该类振型对不平衡激振十分敏感,且转子按刚性转子进行的低速动平衡不能保证转子呈柔性转子工作时平稳运行;另一方面,如发动机应变能较大地集中于转子,则机匣、支承等静子部件应变能较小,说明静子部件变形小,参与振动和吸收振动能量均较小。因此,认为转子弯曲应变能超过25%的振型是不可接受的。在发动机工作转速范围内出现这类振型时,应对发动机转子-支承-机匣结构进行调整。如通过调整仍不能满足应变能分布的限制要求时,应采用阻尼器将振动响应减少到可接受的程度或采用柔性转子高速动平衡技术。

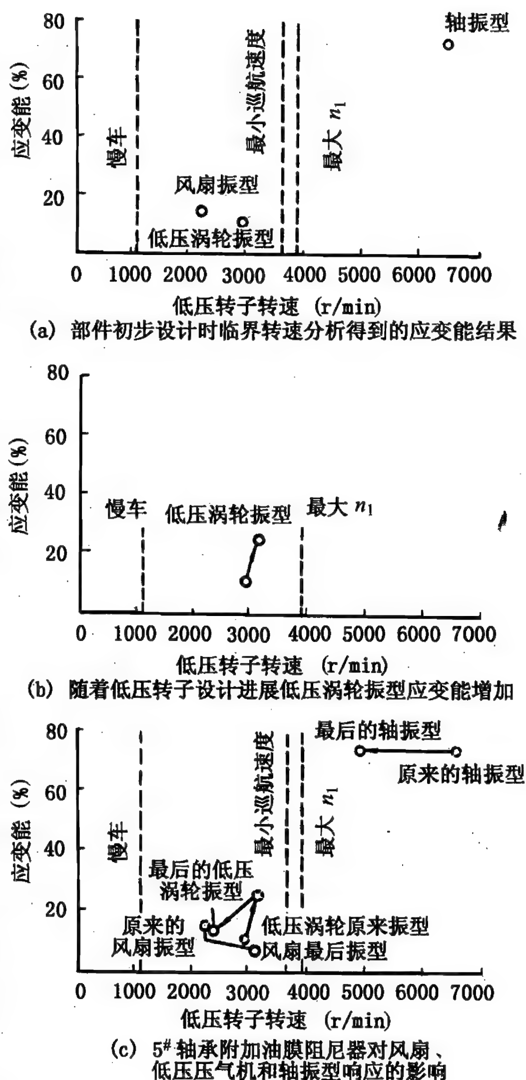
挤压油膜阻尼器已成功和有效地用于航空发动机的振动控制中。阻尼器的振动控制效果与相对变形(位移)有关。为了充分发挥阻尼器作用,应将阻尼器设置在振幅较大的支承位置。当代航空发动机广泛采用的弹性阻尼支承(弹性支承加挤压油膜阻尼器),就是将转子部分应变能转移到弹性支承上,既能有效地调整系统的临界转速,又能充分发挥阻尼器的减振作用。

总之,转子-支承-机匣系统的应变能分析与系统的临界转速分析、不平衡响应分析和稳定性分析一样,均是转子系统设计不可缺少的重要内容。根据转子系统设计准则要求,进行应变能分析的主要目的在于:

(1)根据发动机转子-支承-机匣系统的振动形式和应变能分布的定量(百分比)分析,准确判定转子振型、机匣振型和支承振型的主、次成分和比例。

(2)如果转子部件的弯曲应变能超过规定的限制值(大于转子-支承-机匣系统总应变能的25%),则应采取有效措施(包括设置阻尼器)调整应变能的分布。必要时,应在发动机设计时即考虑采用柔性转子高速动平衡技术。

应变能分析的对象应包括转子、支承和机匣(含安装节),应分析整个系统和各自的应变能分布。如转子系统采用阻尼器装置,则还应分析阻尼器消耗的能量。在发动机方案设计阶段,如不能较准确地提供机匣数据,则必须提供支承刚度数据。此时,发动机总应变能是转子和支承应变能的总和,以支承应变能代表静子结构的应变能。随着设计的进展,特别是工程设计阶段,则必须分析转子-支承-机匣-安装节整个系统的应变能分布。图3-45为一低压转子随设计阶段的进展应变能分布的变化情况。在部件初始设计阶段,临界转速和应变能分析表明风扇轴和低压涡轮轴两者振型均在最小巡航转速以下,其应变能都低



(a) 部件初步设计时临界转速分析得到的应变能结果

(b) 随着低压转子设计进展低压涡轮振型应变能增加

(c) 5# 轴承附加油膜阻尼器对风扇、低压压气机和轴振型响应的影响

图3-45 转子系统应变能随设计过程的变化

于15%；低压转子的弯曲振型应变能很高，但已远超出低压转子最大工作转速（裕度为67%），可不予考虑。此时，低压转子3个轴承支承均未加阻尼器，图3－45(a)示出分析结果。随着设计的进展，转子和支承的质量和刚性数据更明确了，分析结果发现低压涡轮轴振型的应变能超过了25%，如图3－45(b)所示，这种设计是不能接受的。为了控制低压涡轮轴的不平衡响应，在涡轮轴后支承处加装了挤压油膜阻尼器。临界转速和应变能分析表明：低压转子弯曲振型时的应变能水平基本不变，其临界转速对最大工作转速的裕度从67%降到25%，仍符合设计要求；风扇轴振型的弯曲应变能降低到7%，相应的临界转速略有提高，符合设计要求；低压涡轮轴振型的弯曲应变能减少到14%，相应的临界转速有较大降低，符合设计要求。最后设计分析结果如图3－45(c)所示。

应变能计算分析的具体内容应包括：转子（盘、轴等）和机匣的弯曲应变能、剪切应变能；弹性支承的应变能；挤压油膜阻尼器消耗的能量。

应变能分析通常在分析临界转速时进行。此时，主要针对不带阻尼器的转子－支承－机匣系统，计算得到的是系统的应变能的相对值。对于带阻尼器的转子－支承－机匣系统，通常在分析稳态不平衡响应时进行。此时，计算得到的是特定峰值响应转速（阻尼临界转速）下的应变能、动能和阻尼器消耗能量的确定值。

3.2.1　计算分析方法

由于转子－支承－机匣系统的应变能分析是与系统的临界转速分析或稳态不平衡响应分析同时进行，因此，分析临界转速或稳态不平衡响应的计算模型和方法皆可用于应变能分析。

3.2.1.1　传递矩阵法

对于转子－支承－机匣整个系统，特别是双转子－支承－机匣复杂系统，分析临界转速、稳态不平衡响应和应变能大多采用各种改进的传递矩阵法。

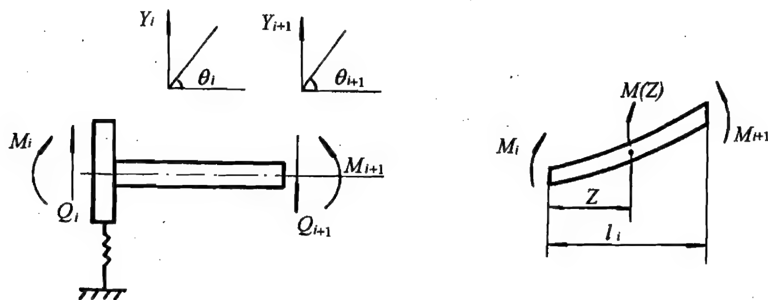


图3－46　传递单元状态参数

如前所述，应用各种改进的传递矩阵法，如考虑水平和垂直（x和y方向）两个平面内的振动，可以求出每个子结构各个截面的状态参数。图3－46示出第i个传递单元的状态参数，其第i截面的状态参数表达式为

$$\begin{bmatrix} Z_x \\ Z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & \theta_x & M_x & Q_x \\ Y & \theta_y & M_y & Q_y \end{bmatrix} \tag{3-192}$$

在求解出状态参数的基础上，即可进一步对各种能量进行计算分析。

(1)弯曲应变能

如图 3－46,i 单元上任一点的弯矩为

$$M(Z) = M_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i} Z \tag{3-193}$$

微段上的弯曲应变能为

$$\mathrm{d}V_b = \frac{1}{2}\frac{M^2(Z)}{EI_i}\mathrm{d}Z \tag{3-194}$$

i 单元的弯曲应变能为

$$V_b = \int_0^{l_i}\mathrm{d}V_b = \frac{1}{2EI_i}\int_0^{l_i}\left[M_i^2 + \frac{2M_i(M_{i+1} - M_i Z)}{l_i} + \frac{(M_{i+1} - M_i)^2}{l_i^2}Z^2\right]\mathrm{d}Z$$

$$= \frac{l_i}{6EI_i}(M_i^2 + M_iM_{i+1} + M_{i+1}^2) \tag{3-195}$$

计及两平面内的振动,则单元应变能为

$$V_b = \frac{l_i}{6EI_i}(M_{xi}^2 + M_{xi}M_{xi+1} + M_{xi+1}^2 + M_{yi} + M_{yi}M_{yi+1} + M_{yi+1}^2) \tag{3-196}$$

(2)剪切应变能

i 单元的剪切应变能为

$$V_s = \frac{l_i}{2A_iG\varphi_{si}}(Q_{xi}^2 + Q_{yi}^2) \tag{3-197}$$

式中:A 为横截面面积;G 为剪切弹性模量;φ_s 为剪切变形系数。

(3)弹性支承应变能

弹性支承的支反力为

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3-198}$$

弹性支承的应变能为

$$V_k = \frac{1}{2}[X \quad Y]\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[k_{xx}X^2 + (k_{xy} + k_{yx})XY + k_{yy}Y^2] \tag{3-199}$$

若是轴对称,两向刚性无耦合作用,则

$$k_{xx} = k_{yy} = k \qquad k_{xy} = k_{yx} = 0$$

此时,弹性支承的应变能为

$$V_k = \frac{1}{2}k(X^2 + Y^2) \tag{3-200}$$

(4)阻尼器消耗的能量

阻尼器每周消耗的能量为

$$V_o = 2\pi\Omega b(X^2 + Y^2) \tag{3-201}$$

式中:Ω 为进动频率;b 为阻尼系数。

阻尼器消耗的能量也可表示为

$$V_o = 2\pi F_o e \tag{3-202}$$

式中：F_0 为挤压油膜阻尼力；$\dot{e}$ 为阻尼器轴颈位移(偏心距)。

(5)动能

轮盘和转子轴单元的动能为

$$T_e = \frac{1}{2}m\Omega^2(X^2 + Y^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{J_p}{J_d}\frac{\omega}{\Omega} - 1\right)J_d\Omega^2(\theta_x^2 + \theta_y^2) \quad (3-203$$

式中：m 为轮盘质量或轴单元的质量；J_d 和 J_p 分别为轮盘或轴单元的赤道转动惯量和极转动惯量；ω 和 Ω 分别为自转频率和进动频率。

上述能量计算主要针对转子(盘、轴)和弹性阻尼支承而言。对于机匣子结构，应用传递矩阵法皆将其按不旋转的轴(梁结构单元)处理。这样处理对于大多数燃气涡轮发动机机匣结构均可保持满意的精度。

3.2.1.2 有限元素法

如前面临界转速计算方法所述，应用有限元素法可求出整个转子－支承－机匣系统的振型，包括各节点的位移和转角。在此计算结果的基础上，即可进一步计算各结构的应变能和动能以及弹性支承的应变能和阻尼器消耗的能量。

(1)梁元素的应变能和动能

由前面3.1.6临界转速的有限元素法求解中(参见式(3－125))，已导出梁元素总的能量方程为

$$\begin{aligned} U^e &= P_B^e + P_A^e + T^e \\ &= \frac{1}{2}[q^e]^T K_B^e q^e - \frac{1}{2}[q^e]^T K_A^e q^e \\ &\quad + \frac{1}{2}J_p^e L\omega^2 + \frac{1}{2}[\dot{q}^e]^T(M_T^e + M_R^e)\dot{q}^e - \omega[\dot{q}^e]^T N^e q^e \end{aligned} \quad (3-204$$

式中：U^e——梁元素的总能量；

$P_B{}^e = \frac{1}{2}[q^e]^T K_B^e q^e$——梁元素的弯曲应变能及剪切应变能；

$P_A{}^e = \frac{1}{2}[q^e]^T K_A^e q^e$——梁元素的拉伸应变能；

$T^e = \frac{1}{2}J_p^e L\omega^2 + \frac{1}{2}[\dot{q}^e]^T(M_T^e + M_R^e)\dot{q}^e - \omega[\dot{q}^e]^T N^e q^e$——梁元素的动能；

q^e——梁元素随时间而变化的端点位移(线位移和角位移)矩阵；

K_B^e——梁元素的弯曲及剪切刚度矩阵；

K_A^e——梁元素的拉伸刚度矩阵；

M_T^e 及 M_R^e——梁元素的质量矩阵；

N^e——梁元素的陀螺矩阵的构成成分($G^e = N^e - [N^e]^T$)。

以上各矩阵的具体表达式见式(3－126)～(3－131)。

(2)盘的动能

盘的动能表达式由3.1.6.1得为

$$\begin{aligned} T^d &= \frac{1}{2}m^d\dot{V}^2 + \frac{1}{2}m^d\dot{W}^2 + \frac{1}{2}J_p^d\omega^2 + \frac{1}{2}J_d^d\dot{B}^2 + \frac{1}{2}J_d^d\dot{\Gamma}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}J_p^d B^2\dot{\Gamma}^2 - J_p^d B\omega\dot{\Gamma} \end{aligned} \quad (3-205)$$

如不计盘沿转轴转动的动能$\frac{1}{2}J_{p}^{d}\omega^{2}$，盘的动能可表示为

$$T^{d}=\frac{1}{2}m^{d}\dot{V}^{2}+\frac{1}{2}m^{d}\dot{W}^{2}+\frac{1}{2}J_{d}^{d}\dot{B}^{2}+\frac{1}{2}J_{d}^{d}\dot{\Gamma}^{2}+\frac{1}{2}J_{p}^{d}B^{2}\Gamma^{2}-J_{p}^{d}B\omega\dot{\Gamma} \tag{3-206}$$

式中各参数的意义见3.1.6.1。

(3)弹性支承的应变能

与应用传递矩阵法求解相同，应用有限元素法求解，其弹性支承的应变能为

$$U_{k}=\frac{1}{2}k(V^{2}+W^{2}) \tag{3-207}$$

式中：k为弹性支承刚度；V和W分别为弹性支承水平和垂直方向的位移。

(4)阻尼器消耗的能量

与应用传递矩阵法求解相同，应用有限元素法求解，其阻尼器每周消耗的能量为

$$V_{o}=2\pi\Omega b(V^{2}+W^{2}) \tag{3-208}$$

式中：b为阻尼器的阻尼系数。

前面叙述了梁元素的应变能和动能的计算表达式以及轮盘的动能计算表达式。对于机匣，可采用三种不同的处理方法：梁单元、锥壳单元或曲面壳单元。虽然机匣是一壳体结构，其振动模态呈多种形式，包括具有周向波数$m=0,1,2,3,\cdots$的模态，但当其与转子耦合时，只能是周向波数$m=1$，与转子耦合(连接)节点上产生弯矩，并与转子的弯曲耦合。至于其他周向波数的振动模态，与转子耦合节点上产生的力矩是自平衡的，与转子弯曲没有耦合。因此，在转子动力学分析中，通常只考虑机匣周向波数为1的振动模态。此时，机匣横截面不变形，仍为圆形，而其轴向呈弯曲模态。据此，目前通用的处理方法是将机匣按梁单元方式处理，相当于按不旋转的轴(梁单元结构)处理，也需考虑剪切效应和转动惯量。这样处理，对于大多数燃气涡轮发动机刚性较好的机匣结构均不失其准确性和可信性。当然，对于壁厚很薄、刚性差的机匣结构，最好采用截锥壳单元处理，3.1.6.2具体介绍了处理方法。这样处理，较按梁单元处理可获得更高的精度。

3.2.2 算　例

以一双转子航空发动机的转子－支承－机匣系统为例，应用整体传递矩阵法计算整个系统的前三阶临界转速和对应的振型，同时计算出该三阶振型各自所对应的转子、机匣和支承的应变能。

(1) 计算模型

图3－47所示为一双转子航空发动机转子－支承－机匣系统的计算模型简图。将其划分为四个子结构：低压转子、高压转子、内机匣和外机匣。高压和低压转子通过前后两个轴间轴承连接；低压转子通过前支承与外机匣连接；高压转子通过两个支承与内机匣连接，而内机匣与外机匣也简化成两个支承的连接。

各子结构可根据自身的结构尺寸、支承位置等情况划分单元，并按需要设置虚单元，从而使各子结构具有相同的单元数目，以便于进行整体传递。

对于内、外机匣，由于只需研究周波数$m=1$的弯曲型模态，故采用考虑剪切和转动惯量的不旋转的梁结构模拟。

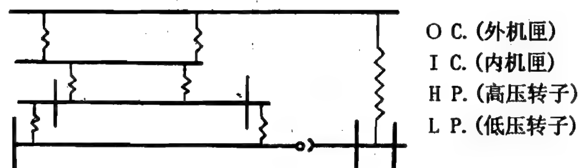


图3－47　双转子发动机转子－机匣系统简化模型

有关高、低压转轴，轮盘，内、外机匣的单元划分和原始数据从略。7个支承仅考虑线刚度，按1～7序号，其刚度分别为：4×10^8N/m、4×10^8N/m、4×10^8N/m、4×10^8N/m、2×10^8 N/m、2×10^8N/m、0.94×10^8N/m。

(2) 计算结果

分别给定高压转子的自转转速，改变低压转子的进动频率，迭代求出低压转子激起的系统的前四阶临界转速，示于表3－12及图3－48中的LRX曲线。

分别给定低压转子的自转转速，改变高压转子的进动频率，迭代求出高压转子激起的系统前四阶临界转速，示于表3－13及图3－48中的HRX曲线。

表3－12　低压转子激起的临界转速　(r/min)

n_{CH} \ n_{CL}	一阶	二阶	三阶	四阶
4000.00	7252.77	8995.41	10830.32	12483.37
6000.00	7368.28	9671.77	11315.57	12856.13
8000.00	7462.62	9950.77	11826.46	13360.62
10000.00	7540.58	10066.29	12133.99	13894.43
12000.00	7605.71	10124.74	12306.10	14312.91
14000.00	7660.68	10159.32	12414.11	14312.91
15000.00	7658.02	10171.74	12454.62	14312.91

表3－13　高压转子激起的临界转速　(r/min)

n_{CL} \ n_{CH}	一阶	二阶	三阶	四阶
4000.00	6571.22	8536.21	9883.23	14299.42
6000.00	7108.84	9251.34	10269.69	14331.18
8000.00	7551.59	9722.76	10887.96	14373.06
10000.00	7887.57	10058.41	11586.63	14430.86
12000.00	8128.83	10348.30	12231.13	14513.32
14000.00	8298.76	10608.30	12766.41	14632.37
15000.00	8364.11	10727.32	12985.43	14632.37

根据高、低压转子转速的确定关系 $\omega_H=f(\omega_L)$，可以得到实际发动机转子－支承－机匣系统的临界转速。图3－48上 a、c、e 点对应的纵坐标为高压转子激起的同步进动临界转速，对应的横坐标为非同步进动临界转速；图3－48上 b、d、f 点对应的横坐标为低压转子激起的

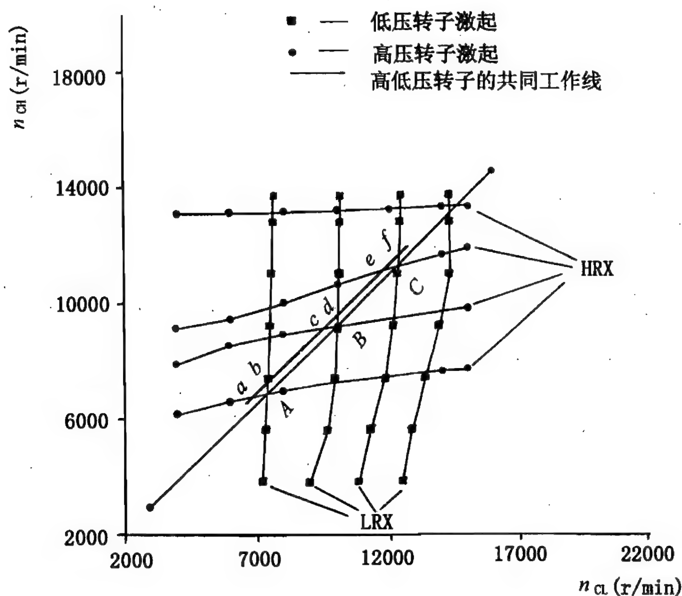


图 3－48　系统临界转速特性图谱

同步进动临界转速，对应的纵坐标为非同步进动临界转速。如果近似地以 A、B、C 三点作为整个系统的临界转速点，计算得到的前三阶振型和应变能分布分别示于图 3－49、图 3－50 和图 3－51 中。该 3 个图中，LP 代表低压转子应变能；HP 代表高压转子应变能；IC 代表内机匣应变能；OC 代表外机匣应变能；PU 代表各支承总的应变能。

由此算例的振型和应变能计算结果可以看出：一阶振型和三阶振型时，低压转子的应变能分别占转子－支承－机匣系统总应变能的 29.1% 和 28.48%，已经超过了应变能设计准则规定的限制值。据此，应当采取措施，如在低压转子支承上加装挤压油膜阻尼器或弹性阻尼支承，以调整转子应变能分布。

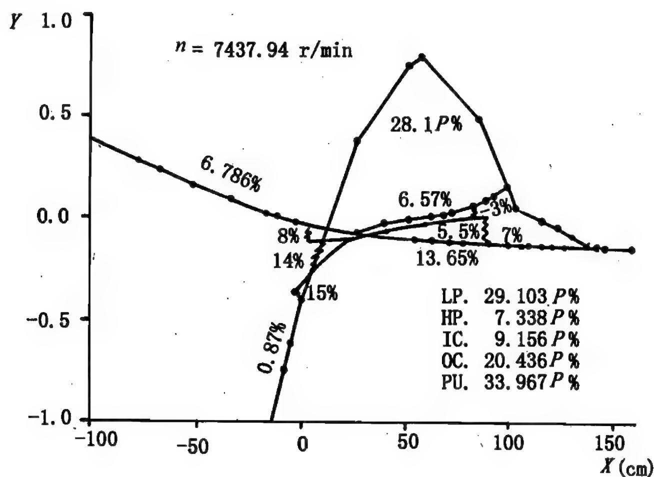


图 3－49　一阶振型和应变能分布

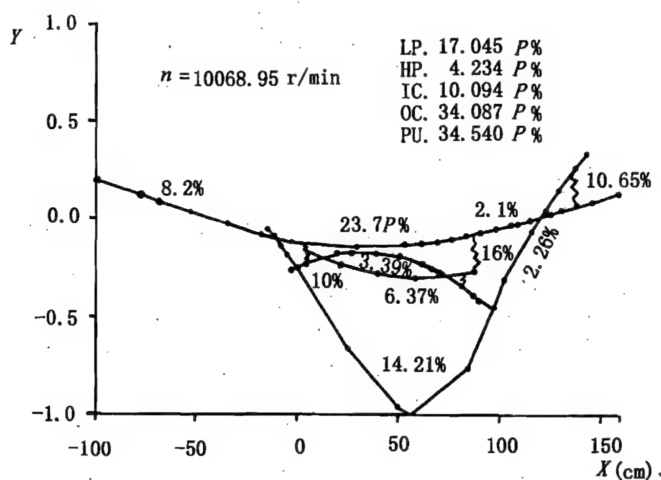


图 3-50　二阶振型和应变能分布

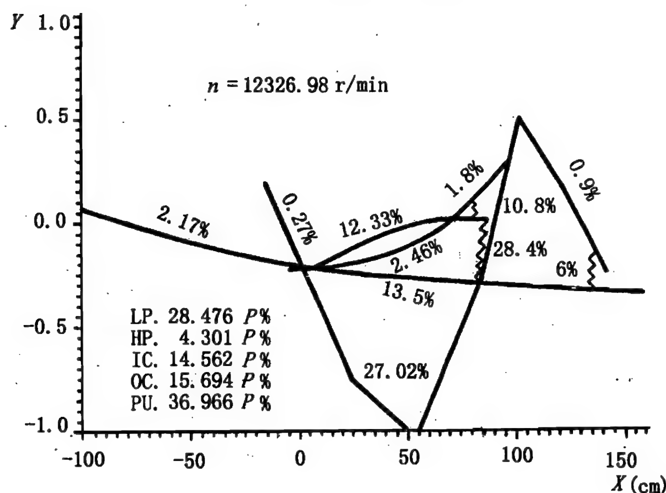


图 3-51　三阶振型和应变能分布

参　考　文　献

[1] 顾家柳等编著.转子动力学.北京:国防工业出版社,1985.

[2] 晏砺堂编著.航空燃气轮机振动和减振.北京:国防工业出版社,1991.

[3] Urban R D. Extension of Holzer - Myklestad - Prohl calculations of Turborotor Critical Speeds. ASME Paper No.58 - A - 246

[4] 赫洛宁 ΠB 著.晏砺堂,谢竹虚等译.航空发动机振动理论和计算.北京航空学院发动机结构教研室翻译出版,1979.

[5] Horner G C. and Pilkey W D. The Riccati Transfer Matrix Method. ASME Paper No.77 - DET - 32

[6] Huang Taiping. The Transfer Matrix Impedance Coupling Method With Its Applications. ASME Paper No.85 - DET - 139

[7] 黄太平.转子动力学中传递矩阵阻抗耦合法.北京:航空动力学报,Vol.3,No.4,1988.

[8] Huang Taiping. The Transfer Matrix Impedance Coupling Method for the Eigensolutions of Multi - Spool Rotor Systems. Transactions of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Oct.1988, Vol.110, 468 ~ 472

[9] 梁尧阶,黄太平,伊立言合编.机械振动基础.北京:国防工业出版社,1980. 183~194
[10] Huang Taiping and Lund J W. The Transfer Matrix Component Mode Synthesis for Eigensolution of Rotor Systems. Journal of Nanjing Aeronautical Institute, Vol.5, No.1, 1988. 143~155
[11] 黄太平.多转子系统振动的子系统分析方法——阻抗耦合法与分振型综合法.南京:振动工程学报, Vol. 1, No.3, 1988. 30~40
[12] 株洲航空动力机械研究所编著.转子动力学研究文集:航空发动机结构完整性研究"七五"课题汇编.中国航空工业总公司涡桨涡轴发动机结构完整性办公室,1994.
[13] 尹泽勇.端齿梁元素的刚度矩阵.株洲航空动力机械研究所,1991.
[14] Nelson H D and Mcraugh J M. The Dynamics of Rotor - Bearing Systems Using Finite Elements. Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, Vol.98, No.2, May 1976.
[15] 欧园霞.转子动力特性有限元分析.中国航空科技文献,HJB860414,1986.
[16] 欧园霞.采用有限元素法的转子系统动力特性分析.株洲航空动力机械研究所,1990.
[17] 欧园霞.采用截锥壳元素的机匣系统的动力特性分析.株洲航空动力机械研究所,1990.
[18] 晏砺堂,朱梓根,李其汉等.结构系统动力特性分析.北京:北京航空航天大学出版社,1989.
[19] 欧园霞.转子支承机匣系统的模态综合法.株洲航空动力机械研究所,1990.
[20] Craig R R. Structural Dynamics An Introduction to computer Method. John Wiley Sons, Inc, 1981.
[21] Childs D W. A Rotor - Fixed Model Simulation Model for Flexible Rotating Equipment. ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol.96, No.2, May 1974.
[22] Glasgow D A and Nelson H D. Stabilty Analysis of Rotor - Bearing Systems Using Component Mode Synthesis. Trans of the ASME Vol.102, April 1980.
[23] 王文亮,杜作润.结构振动与动态子结构方法.上海:复旦大学出版社,1985.
[24] 欧园霞.某发动机整机振动分析.株洲航空动力机械研究所,1992.
[25] Alver A S and Price J L. 燃气涡轮发动机结构设计准则的研究——最终报告(美国 PW 公司).1985.
[26] 朱梓根主编.航空涡喷、涡扇发动机设计准则(研究报告)第六册.中国航空工业总公司发动机系统工程局,1997.
[27] 朱志亮.高速转子系统的动力特性分析——有限元模态综合法的应用.北京航空航天大学硕士论文,1995.
[28] 任光明.高速旋转机械的稳态动力特性及应变能分析.北京航空航天大学硕士论文,1993.

第4章 转子-支承系统不平衡响应计算方法

4.1 稳态不平衡响应

稳态不平衡响应的计算是转子动力学分析中与临界转速计算同等重要的基本任务。稳态不平衡响应分析也可以用来确定系统的临界转速,但它更重要的任务是用来求解在转子系统中可能存在的不平衡量作用下,转子-支承系统的稳态不平衡响应,分析研究如何采取措施限制最大不平衡响应及减小不平衡响应。

转子-支承系统的稳态不平衡响应,是转子-支承系统在其旋转结构本身存在的不平衡量所产生的激励力作用下的频率响应特性。激励力频率即转子的转速,力幅与转速的平方成比例。由于航空发动机转子-支承系统的复杂性,如双转子系统或三转子系统,形成了不同的不平衡响应:同步不平衡响应与非同步不平衡响应。应给出各转子子系统的转速比关系,分别计算各转子子系统由不平衡激起的稳态不平衡响应。

与临界转速计算方法类似,转子-支承系统的稳态不平衡响应计算有两大类基本方法:传递矩阵法与有限元素法。传递矩阵法对于转子-支承系统的稳态不平衡响应计算具有其独特的优点,就是简单明确、容易编程、对计算机容量要求不高、计算结果准确可靠。常规的传递矩阵法及 Riccati 传递矩阵法适用于简单转子-支承系统,而各种改进的传递矩阵法,如子结构传递矩阵法、传递矩阵-阻抗耦合法、传递矩阵-直接积分法以及传递矩阵-分振型综合法等,均可以用来计算复杂的多转子-支承系统的稳态不平衡响应。有限元素法同样可以有效地用来计算复杂的转子-支承系统的稳态不平衡响应,既可以将整个转子-支承系统作为一个整体进行计算,也可以采用子结构模态综合法来计算稳态不平衡响应。

实际上,转子-支承系统的稳态不平衡响应计算与临界转速计算的主要区别仅在于:临界转速计算所建立的基本方程是一个线性齐次方程组;而稳态不平衡响应计算所建立的基本方程是一个线性非齐次方程组,方程式右边存在着仅与不平衡量及转速参数有关的项。对于给定的每一个转速值,由该非齐次方程组可以解得各个未知状态参数,由此可计算在该转速下转子-支承系统各站的状态参数值,即在给定不平衡量及该转速下的稳态响应。对于线性系统不平衡响应与不平衡量成正比。在任一转速下的不平衡响应,可能是若干个主振型的线性叠加,随着转速的改变可由某一阶振型向另一阶振型过渡。不平衡量的分布规律的改变可引起稳态不平衡响应的变化,不仅仅是量的变化,也会引起相应"振型"的变化。因此,稳态不平衡响应计算比临界转速计算能提供更多的有用信息。

4.1.1 传递矩阵法

4.1.1.1 坐标系的选取

转子的不平衡是由于旋转件的质量不平衡造成的,它的力幅与方向随着旋转运动而变化。所以,不平衡力是随着转子的自转(在分析稳态不平衡响应时,自转与公转同步)而转动的。为此,采用旋转坐标系 $O\xi\eta\zeta$,原点为转子的几何中心,如图 4-1 所示。若支承系统的刚度与阻尼特性呈现非轴对称时,往往是在固定坐标系 OX 与 OY 轴方向具有不同的特性。因此,支承特性以固定坐标系表示,原点通过支承的中心连线。动静坐标系的夹角为 ωt。

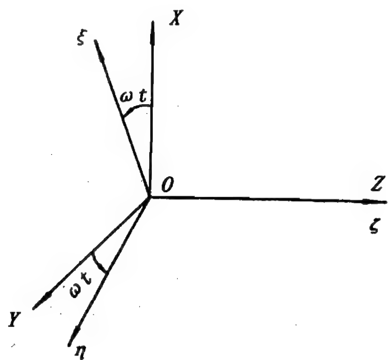


图 4-1　坐标系

设转子某处存在不平衡量 q,它在动坐标系的 ξ、η 方向的分量为 q_ξ、q_η,用复数形式表示为

$$q = q_\xi + \mathrm{i}q_\eta \tag{4-1}$$

将不平衡量投影到固定坐标系,可表示为

$$\begin{cases} q_x = q_\xi \cos\omega t - q_\eta \sin\omega t \\ q_y = q_\xi \sin\omega t + q_\eta \cos\omega t \end{cases} \tag{4-2}$$

用指数形式表示为

$$q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = q_x + \mathrm{i}q_y \tag{4-3}$$

对比式(4-2)与式(4-3)可知

$$\begin{cases} q_x = \mathrm{Re}(q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) \\ q_y = \mathrm{Re}(-\mathrm{i}q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) \end{cases} \tag{4-4}$$

由此可见,复数不平衡力($\omega^2 q$)在固定坐标系 $OXYZ$ 上的投影量可用相应的复数量的实部代表,它所引起的强迫振动也同样可用相应的复数量的实部代表之,如

$$\begin{cases} X = \mathrm{Re}(\bar{X}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) & Y = \mathrm{Re}(\bar{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) \\ \theta = \mathrm{Re}(\bar{\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) & \alpha = \mathrm{Re}(\bar{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) \\ M_x = \mathrm{Re}(\bar{M}_x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) & M_y = \mathrm{Re}(\bar{M}_y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) \\ Q_x = \mathrm{Re}(\bar{Q}_x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) & Q_y = \mathrm{Re}(\bar{Q}_y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) \end{cases} \tag{4-5}$$

有时采用复数 $\bar{X}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$、$\bar{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$、……进行稳态不平衡响应计算更为方便,实际的不平衡响应则为各状态参数的实部。

4.1.1.2 单元传递矩阵

(1) 模型的建立

计算稳态不平衡响应时,所采用的分析模型与计算临界转速时一样,将转子 - 支承系统划分成若干段站,划分的原则与计算临界转速时一样。

图 4-2 为典型的站与轴段,站的左右两侧截面及轴段两端截面上的各状态参数。如果系统非轴对称,则在 XOZ、XOY 平面内具有不同的状态参数。

(2) 站的传递矩阵

由图 4-2 可见,站的左右两侧截面上的状态参数之间的关系可表示为

$$
\begin{cases}
X^{\mathrm{R}} = X^{\mathrm{L}} \\
\theta^{\mathrm{R}} = \theta^{\mathrm{L}} \\
M_x^{\mathrm{R}} = M_x^{\mathrm{L}} - J_{\mathrm{d}} \dfrac{\partial^2 \theta^{\mathrm{L}}}{\partial t^2} + J_{\mathrm{p}} \omega \dfrac{\partial \alpha^{\mathrm{L}}}{\partial t} \\
Q_x^{\mathrm{R}} = Q_x^{\mathrm{L}} - m \dfrac{\partial^2 X^{\mathrm{L}}}{\partial t^2} + \omega^2 q_x - k_{xx} X^{\mathrm{L}} - C_{xy} \dfrac{\partial X^{\mathrm{L}}}{\partial t} - k_{xy} Y^{\mathrm{L}} - C_{xy} \dfrac{\partial Y^{\mathrm{L}}}{\partial t} \\
Y^{\mathrm{R}} = Y^{\mathrm{L}} \\
\alpha^{\mathrm{R}} = \alpha^{\mathrm{L}} \\
M_y^{\mathrm{R}} = M_y^{\mathrm{L}} - J_{\mathrm{d}} \dfrac{\partial^2 \alpha^{\mathrm{L}}}{\partial t^2} - J_{\mathrm{p}} \omega \dfrac{\partial \theta^{\mathrm{L}}}{\partial t} \\
Q_y^{\mathrm{R}} = Q_y^{\mathrm{L}} - m \dfrac{\partial^2 Y^{\mathrm{L}}}{\partial t^2} + \omega^2 q_y - k_{yx} X^{\mathrm{L}} - C_{yx} \dfrac{\partial X^{\mathrm{L}}}{\partial t} - k_{yy} Y^{\mathrm{L}} - C_{yy} \dfrac{\partial Y^{\mathrm{L}}}{\partial t}
\end{cases}
\tag{4-6}
$$

将式(4－5)的关系代入式(4－6)，为简洁起见，将 $\bar{X}$、$\bar{Y}$、……等复数量的顶注“－”省略可以得到

$$
\begin{cases}
X^{\mathrm{R}} = X^{\mathrm{L}} \\
\theta^{\mathrm{R}} = \theta^{\mathrm{L}} \\
M_x^{\mathrm{R}} = -J_{\mathrm{d}} \Omega^2 \theta^{\mathrm{L}} + \mathrm{i}\omega\Omega J_{\mathrm{p}} \alpha^{\mathrm{L}} + M_x^{\mathrm{L}} \\
Q_x^{\mathrm{R}} = (m\Omega^2 - k_{xx} - \mathrm{i}\Omega C_{xx}) X^{\mathrm{L}} - (k_{xy} + \mathrm{i}\Omega C_{xy}) Y^{\mathrm{L}} + Q_x^{\mathrm{L}} + \omega^2 q \\
Y^{\mathrm{R}} = Y^{\mathrm{L}} \\
\alpha^{\mathrm{R}} = \alpha^{\mathrm{L}} \\
M_y^{\mathrm{R}} = -J_{\mathrm{d}} \Omega^2 \alpha^{\mathrm{L}} - \mathrm{i}\omega\Omega J_{\mathrm{p}} \theta^{\mathrm{L}} + M_y^{\mathrm{L}} \\
Q_y^{\mathrm{R}} = (m\Omega^2 - k_{yy} - \mathrm{i}\Omega C_{yy}) Y^{\mathrm{L}} - (k_{yx} + \mathrm{i}\Omega C_{yx}) X^{\mathrm{L}} + Q_y^{\mathrm{L}} - \mathrm{i}\omega^2 q
\end{cases}
\tag{4-7}
$$

写成矩阵形式为

$$
\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \end{bmatrix}^{\mathrm{R}}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -J_{\mathrm{d}}\Omega^2 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{i}\omega\Omega J_{\mathrm{p}} & 0 & 0 \\
\begin{matrix} m\Omega^2 - k_{xx} \\ -\mathrm{i}C_{xx}\Omega \end{matrix} & 0 & 0 & 1 & \begin{matrix} -k_{xy} \\ -\mathrm{i}C_{xy}\Omega \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -\mathrm{i}\omega\Omega J_{\mathrm{p}} & 0 & 0 & 0 & -J_{\mathrm{d}}\Omega^2 & 1 & 0 \\
\begin{matrix} -k_{yx} \\ -C_{yx}\Omega \end{matrix} & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} m\Omega^2 - k_{yy} \\ -\mathrm{i}C_{yy}\Omega \end{matrix} & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \end{bmatrix}^{\mathrm{L}}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega^2 q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mathrm{i}\omega^2 q \end{bmatrix}
\tag{4-7a}
$$

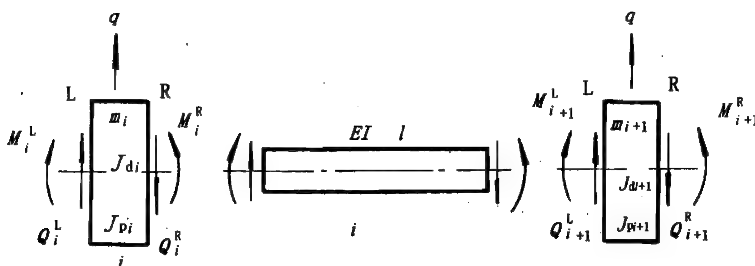


图 4－2　转子单元上的各状态参数

或改写为

$$
\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix}^{R} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 00 & 0 & 0 & 00 & 0 \\
0 & 1 & 00 & 0 & 0 & 00 & 0 \\
0 & -J_d\Omega^2 & 10 & 0 & \mathrm{i}\omega\Omega J_p & 00 & 0 \\
\begin{matrix} m\Omega^2-k_{xx} \\ -\mathrm{i}C_{xx}\Omega \end{matrix} & 0 & 01 & \begin{matrix} -k_{xy} \\ -\mathrm{i}C_{xy}\Omega \end{matrix} & 0 & 00 & q\omega^2 \\
0 & 0 & 00 & 1 & 0 & 00 & 0 \\
0 & 0 & 00 & 0 & 1 & 00 & 0 \\
0 & -\mathrm{i}\omega\Omega J_p & 00 & 0 & -J_d\Omega^2 & 10 & 0 \\
\begin{matrix} -k_{yx} \\ -\mathrm{i}C_{yx}\Omega \end{matrix} & 0 & 00 & \begin{matrix} m\Omega^2-k_{yy} \\ -\mathrm{i}C_{yy}\Omega \end{matrix} & 0 & 01 & -\mathrm{i}\omega^2 q \\
0 & 0 & 00 & 0 & 0 & 00 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix}^{L} \tag{4-7b}
$$

相应的传递矩阵为

$$
\boldsymbol{T}_{\mathrm{sti}} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 00 & 0 & 0 & 00 & 0 \\
0 & 1 & 00 & 0 & 0 & 00 & 0 \\
0 & -J_d\Omega^2 & 10 & 0 & \mathrm{i}\omega\Omega J_p & 00 & 0 \\
\begin{matrix} m\Omega^2-k_{xx} \\ -\mathrm{i}C_{xx}\Omega \end{matrix} & 0 & 01 & \begin{matrix} -k_{xy} \\ -\mathrm{i}C_{xy}\Omega \end{matrix} & 0 & 00 & q\omega^2 \\
0 & 0 & 00 & 1 & 0 & 00 & 0 \\
0 & 0 & 00 & 0 & 1 & 00 & 0 \\
0 & -\mathrm{i}\omega\Omega J_p & 00 & 0 & -J_d\Omega^2 & 10 & 0 \\
\begin{matrix} -k_{yx} \\ -\mathrm{i}C_{yx}\Omega \end{matrix} & 0 & 00 & \begin{matrix} m\Omega^2-k_{yy} \\ -\mathrm{i}C_{yy}\Omega \end{matrix} & 0 & 01 & -\mathrm{i}\omega^2 q \\
0 & 0 & 00 & 0 & 0 & 00 & 1
\end{bmatrix} \tag{4-8}
$$

与计算临界转速用传递矩阵有所不同的，就是增加了第 9 行第 9 列，它是与不平衡力有关的项。

(3) 无质量弹性轴段的传递矩阵

根据图 4－2，按材料力学已知的关系，可写出无质量弹性轴段在计及剪切影响时的两端截面上状态参数之间的关系为

$$
\begin{cases}
X_{i+1} = X_i + l\theta_i + \dfrac{l^2}{2EI}M_{xi+1} - \dfrac{l^3}{3EI}Q_{xi+1} - \dfrac{\beta Q_{xi+1}}{GA} \\
\theta_{i+1} = \theta_i + \dfrac{l}{EI}M_{xi+1} - \dfrac{l^2}{2EI}Q_{xi+1} \\
M_{xi+1} = M_{xi} + lQ_{xi} \\
Q_{xi+1} = Q_{xi} \\
Y_{i+1} = Y_i + l\alpha_i + \dfrac{l^2}{2EI}M_{yi+1} - \dfrac{l^3}{3EI}Q_{yi+1} - \dfrac{\beta Q_{yi+1}}{GA} \\
\alpha_{i+1} = \alpha_i + \dfrac{l}{EI}M_{yi+1} - \dfrac{l^2}{2EI}Q_{yi+1} \\
M_{yi+1} = M_{yi} + lQ_{yi} \\
Q_{yi+1} = Q_{yi}
\end{cases}
\tag{4-9}
$$

将式(4－9)中的第 3、4 式与第 7、8 式分别代入第 1、2 式与第 5、6 式，可得

$$
\begin{cases}
X_{i+1} = X_i + l\theta_i + \dfrac{l^2}{2EI}M_{xi} + \dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI}Q_{xi} \\
\theta_{i+1} = \theta_i + \dfrac{l}{EI}M_{xi} + \dfrac{l^2}{2EI}Q_{xi} \\
M_{xi+1} = M_{xi} + lQ_{xi} \\
Q_{xi+1} = Q_{xi} \\
Y_{i+1} = Y_i + l\alpha_i + \dfrac{l^2}{2EI}M_{yi} + \dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI}Q_{yi} \\
\alpha_{i+1} = \alpha_i + \dfrac{l}{EI}M_{yi} + \dfrac{l^2}{2EI}Q_{yi} \\
M_{i+1} = M_{yi} + lQ_{yi} \\
Q_{yi+1} = Q_{yi}
\end{cases}
\tag{4-10}
$$

式中：$\nu = \dfrac{6EI\beta}{GAl^2}$

于是，可以写出无质量弹性轴段的传递矩阵 $\boldsymbol{T}_{sh}$

$$
\boldsymbol{T}_{sh} = \begin{bmatrix}
1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\tag{4-11}
$$

(4) 均质轴段的传递矩阵

对于均质轴段,若略去微元体的转动惯量与剪切的影响，轴段两端截面上的状态参数之间的关系已由式(3-8)导得

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ \theta_x \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} S(k) & \frac{1}{\alpha}T(k) & \frac{1}{\alpha^2 EI}U(k) & \frac{1}{\alpha^3 EI}V(k) \\ \alpha V(k) & S(k) & \frac{1}{\alpha EI}T(k) & \frac{1}{\alpha^3 EI}U(k) \\ \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) & \frac{1}{\alpha}T(k) \\ \alpha^3 EIT(k) & \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ \theta_x \end{bmatrix}_i \tag{4-12}$$

同样可以写出

$$\begin{bmatrix} Y \\ \alpha \\ M_y \\ \theta_y \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} S(k) & \frac{1}{\alpha}T(k) & \frac{1}{\alpha^2 EI}U(k) & \frac{1}{\alpha^3 EI}V(k) \\ \alpha V(k) & S(k) & \frac{1}{\alpha EI}T(k) & \frac{1}{\alpha^3 EI}U(k) \\ \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) & \frac{1}{\alpha}T(k) \\ \alpha^3 EIT(k) & \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \alpha \\ M_y \\ \theta_y \end{bmatrix}_i \tag{4-13}$$

按照状态参数列阵$[x\ q\ M_x\ Q_x\ y\ \alpha\ M_y\ Q_y\ 1]^T$,可以写出均质轴段的相应传递矩阵为：

$$T_{shi} = \begin{bmatrix} S(k) & \frac{T(k)}{\alpha} & \frac{U(k)}{\alpha^2 EI} & \frac{V(k)}{\alpha^3 EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha V(k) & S(k) & \frac{T(k)}{\alpha EI} & \frac{U(k)}{\alpha^2 EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) & \frac{T(k)}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^3 EIT(k) & \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S(k) & \frac{T(k)}{\alpha} & \frac{U(k)}{\alpha^2 EI} & \frac{V(k)}{\alpha^3 EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha V(k) & S(k) & \frac{T(k)}{\alpha EI} & \frac{U(k)}{\alpha^2 EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) & \frac{T(k)}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^3 EIT(k) & \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-14}$$

(5) 综合轴段传递矩阵

根据图 4-2,综合轴段的传递矩阵由轴段传递矩阵 T_{sh}与站传递矩阵 T_{st}组成,即

$$T_i = T_{sti} \cdot T_{shi} \tag{4-15}$$

其一般形式可表示为

$$T_i = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{19} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{29} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{91} & T_{92} & \cdots & T_{99} \end{bmatrix} \tag{4-16}$$

对于无质量弹性轴段与站构成的综合轴段,由式(4-8)与式(4-11)得

$$
\boldsymbol{T}_i=\begin{bmatrix}
1+Z_{xx}\frac{l^3(1-\nu)}{6EI} & l-\frac{l^2J_d\Omega^2}{2EI} & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3(1-\nu)}{6EI} & -Z_{xy}\frac{l^3(1-\nu)}{6EI} & \frac{l^2\mathrm{i}\omega\Omega J_p}{2EI} & 0 & 0 & \frac{l^3(1-\nu)}{6EI}\omega^2q \\
Z_{xx}\frac{l^2}{2EI} & 1-\frac{lJ_d\Omega^2}{EI} & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & -Z_{xy}\frac{l^2}{2EI} & \frac{l\,\mathrm{i}\omega\Omega J_p}{EI} & 0 & 0 & \frac{l^2}{2EI}\omega^2q \\
Z_{xx}l & -J_d\Omega^2 & 1 & l & -Z_{xy}l & \mathrm{i}\omega\Omega J_p & 0 & 0 & l\omega^2q \\
Z_{xx} & 0 & 0 & 1 & -Z_{xy} & 0 & 0 & 0 & \omega^2q \\
-Z_{yx}\frac{l^3(1-\nu)}{6EI} & -\frac{l^2}{2EI}\mathrm{i}\omega\Omega J_p & 0 & 0 & 1+Z_{yy}\frac{l^3(1-\nu)}{6EI} & l-\frac{l^2J_d\Omega^2}{2EI} & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3(1-\nu)}{6EI} & -\frac{l^3(1-\nu)}{6EI}\mathrm{i}\omega^2q \\
-Z_{yx}\frac{l^2}{2EI} & -\frac{l}{EI}\mathrm{i}\omega\Omega J_p & 0 & 0 & Z_{yy}\frac{l^2}{2EI} & 1-\frac{l}{EI}J_d\Omega^2 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & -\frac{l^2}{2EI}\mathrm{i}\omega^2q \\
-Z_{yx}l & -\mathrm{i}\omega\Omega J_p & 0 & 0 & Z_{yy}l & -J_d\Omega^2 & 1 & l & -\mathrm{i}l\omega^2q \\
-Z_{yx} & 0 & 0 & 0 & Z_{yy} & 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i}\omega^2q \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{4-17}
$$

式中：

$$
\begin{cases}
Z_{xxi}=m_i\Omega^2-k_{xxi}-\mathrm{i}\Omega C_{xxi}\\
Z_{xyi}=k_{xyi}+\mathrm{i}\Omega C_{xyi}\\
Z_{yxi}=k_{yxi}+\mathrm{i}\Omega C_{yxi}\\
Z_{yyi}=m_i\Omega^2-k_{yyi}-\mathrm{i}\Omega C_{yyi}
\end{cases} \tag{4-18}
$$

对于由均质轴段与站构成的综合轴段，由式(4－8)与式(4－14)得

$$
\boldsymbol{T}_i=\begin{bmatrix}
S+\frac{Z_{xx}V}{\alpha^3EI} & \frac{T}{\alpha}-\frac{UJ_d\Omega^2}{\alpha^2EI} & \frac{U}{\alpha^2EI} & \frac{V}{\alpha^3EI} & -\frac{Z_{xy}V}{\alpha^3EI} & \frac{\mathrm{i}\omega\Omega J_pU}{\alpha^2EI} & 0 & 0 & \frac{V\omega^2q}{\alpha^3EI} \\
\alpha V+\frac{Z_{xx}U}{\alpha^2EI} & S-\frac{TJ_d\Omega^2}{\alpha EI} & \frac{T}{\alpha EI} & \frac{U}{\alpha^2EI} & -\frac{Z_{xy}U}{\alpha^2EI} & \frac{\mathrm{i}\omega\Omega J_pT}{\alpha^2EI} & 0 & 0 & \frac{U\omega^2q}{\alpha^2EI} \\
\alpha^2EIU+\frac{Z_{xx}T}{\alpha} & \alpha V-SJ_d\Omega^2 & S & \frac{T}{\alpha} & -\frac{Z_{xy}T}{\alpha} & \mathrm{i}\omega\Omega J_pS & 0 & 0 & \frac{T\omega^2q}{\alpha} \\
\alpha^3EIT+Z_{xx}S & \alpha^2EIU-\alpha VJ_d\Omega^2 & \alpha V & S & -Z_{xy}S & \mathrm{i}\omega\Omega J_p\alpha V & 0 & 0 & S\omega^2q \\
-\frac{Z_{yx}V}{\alpha^3EI} & -\frac{\mathrm{i}\omega\Omega J_pU}{\alpha^2EI} & 0 & 0 & S+\frac{Z_{yy}V}{\alpha^3EI} & \frac{T}{\alpha}-\frac{UJ_d\Omega^2}{\alpha^2EI} & \frac{U}{\alpha^2EI} & \frac{V}{\alpha^3EI} & -\frac{\mathrm{i}V\omega^2q}{\alpha^3EI} \\
-\frac{Z_{yx}U}{\alpha^2EI} & -\frac{\mathrm{i}\omega\Omega J_pT}{\alpha^2EI} & 0 & 0 & \alpha V+\frac{Z_{yy}U}{\alpha^2EI} & S-\frac{TJ_d\Omega^2}{\alpha EI} & \frac{T}{\alpha EI} & \frac{U}{\alpha^2EI} & -\frac{\mathrm{i}U\omega^2q}{\alpha^2EI} \\
-\frac{Z_{yx}T}{\alpha} & -\mathrm{i}\omega\Omega J_pS & 0 & 0 & \alpha^2EIU+\frac{Z_{yy}T}{\alpha} & \alpha V-SJ_d\Omega^2 & S & \frac{T}{\alpha} & -\frac{\mathrm{i}T\omega^2q}{\alpha} \\
-Z_{yx}S & -\mathrm{i}\omega\Omega J_p\alpha V & 0 & 0 & \alpha^3EIT+Z_{yy}S & \alpha^2EIU-\alpha VJ_d\Omega^2 & \alpha V & S & -\mathrm{i}S\omega^2q \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{4-19}
$$

4.1.1.3　稳态不平衡响应求解

对于单转子系统，假设转子的两端均为自由端，其边界条件应满足：

$$
M_{x0}=M_{y0}=0,\ Q_{x0}=Q_{y0}=0 \tag{4-20}
$$

$$M_{xn}=M_{yn}=0,\ Q_{xn}=Q_{yn}=0 \tag{4-21}$$

截面间的状态参数传递关系可写为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix}_n = \boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_{n-1}\cdots\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix}_0 = \boldsymbol{T}\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix}_0 \tag{4-22}$$

式中，总传递矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为 9×9 方阵，记为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{19} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{29} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{91} & T_{92} & \cdots & T_{99} \end{bmatrix} \tag{4-23}$$

由边界条件式(4－20)代入式(4－22)可简化为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{15} & T_{16} & T_{19} \\ T_{21} & T_{22} & T_{25} & T_{26} & T_{29} \\ T_{31} & T_{32} & T_{35} & T_{36} & T_{39} \\ T_{41} & T_{42} & T_{45} & T_{46} & T_{49} \\ T_{51} & T_{52} & T_{55} & T_{56} & T_{59} \\ T_{61} & T_{62} & T_{65} & T_{66} & T_{69} \\ T_{71} & T_{72} & T_{75} & T_{76} & T_{79} \\ T_{81} & T_{82} & T_{85} & T_{86} & T_{89} \\ T_{91} & T_{92} & T_{95} & T_{96} & T_{99} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ Y \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4-24}$$

代入边界条件式(4－21)，进一步简化为

$$\begin{bmatrix} T_{31} & T_{32} & T_{35} & T_{36} & T_{39} \\ T_{41} & T_{42} & T_{45} & T_{46} & T_{49} \\ T_{71} & T_{72} & T_{75} & T_{76} & T_{79} \\ T_{81} & T_{82} & T_{85} & T_{86} & T_{89} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ Y \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_n \tag{4-25}$$

式(4－25)可改写为非齐次方程的形式

$$\begin{bmatrix} T_{31} & T_{32} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{45} & T_{46} \\ T_{71} & T_{72} & T_{75} & T_{76} \\ T_{81} & T_{82} & T_{85} & T_{86} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ Y \\ \alpha \end{bmatrix}_0 = -\begin{bmatrix} T_{39} \\ T_{49} \\ T_{79} \\ T_{89} \end{bmatrix} \tag{4-26}$$

式(4－26)便是简单转子－支承系统（两端均为自由边界）不平衡响应的基本方程式，或

称为频率响应特性方程。此方程中包含了转子－支承系统两自由端的4个未知状态参数——位移与转角响应。系统矩阵的各元素 T_{ij}为总传递矩阵的有关项。给定一个转速 ω 值(对于单转子稳态不平衡响应计算,自转角速度 ω 与进动角速度 Ω 相等),便可由式(4－26)求得 $[X\ \theta\ Y\ \alpha]_0^{\mathrm{T}}$ 的对应解。然后,可按如下关系依次求出各截面的相应的状态参数:

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix}_1 = \boldsymbol{T}_1 \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix}_0 \tag{4-27}$$

....

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix}_0 = \boldsymbol{T}_i \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M_x \\ Q_x \\ Y \\ \alpha \\ M_y \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix}_i \tag{4-28}$$

求出的各截面状态参数,一般说来,均为复数解。按式(4－5)的说明,作为强迫响应的幅值,只取相应复数量的实部。

4.1.1.4 轴心运动轨迹

在求得不同转速下的各截面的强迫响应之后,可以得出在每一个转速下的稳态不平衡响应的轴心运动轨迹。

记:

$$\begin{cases} x_i = x_{ci} + \mathrm{i}x_{si} \\ y_i = y_{ci} + \mathrm{i}y_{si} \end{cases} \tag{4-29}$$

可得出

$$\begin{cases} x_i = x_{ci}\cos\omega t - x_{si}\sin\omega t = \sqrt{x_{ci}^2 + x_{si}^2}\cos(\omega t + \varphi_{xi}) \\ y_i = y_{ci}\cos\omega t - y_{si}\sin\omega t = \sqrt{y_{ci}^2 + y_{si}^2}\sin(\omega t + \varphi_{yi}) \end{cases} \tag{4-30}$$

式中:$\varphi_{xi} = \mathrm{tg}^{-1}(x_{si}/x_{ci})$;

$\varphi_{yi} = \mathrm{tg}^{-1}(y_{si}/y_{ci})$。

由式(4－28)消去时间变量 t,可得到

$$\frac{(x_i y_{ci} - x_{ci} y_i)^2}{(x_{ci} y_{si} - x_{si} y_{ci})^2} + \frac{(x_i y_{si} - x_{si} y_i)^2}{(x_{ci} y_{si} - x_{si} y_{ci})^2} = 1$$

展开并整理之，可得

$$(y_{ci}^2 + y_{si}^2) x_i^2 + (x_{ci}^2 + x_{si}^2) y_i^2 - 2(x_{ci} y_{ci} + x_{si} y_{si}) x_i y_i - (x_{si} y_{ci} - x_{ci} y_{si})^2 = 0 \quad (4-31)$$

式(4－31)为第 i 截面的轴心轨迹方程，显然，在一般情况下，它代表了一个椭圆，圆心在坐标原点上。

令 r 为轴心振幅，β 为振幅的方向角，即振幅与 OX 轴的夹角，则有

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2, \mathrm{tg}\beta = y/x \\ x = r\cos\beta, y = r\sin\beta \end{cases} \quad (4-32)$$

将式(4－32)中下式的 x，y 代入式(4－30)，为计算简便，将代表第 i 截面的下标 i 省略，可得

$$r^2 = \frac{(x_c y_s - x_s y_c)^2}{(y_s^2 + y_c^2)\cos^2\beta + (x_c^2 + x_s^2)\sin^2\beta - 2(x_c y_c + x_s y_s)\sin\beta\cos\beta} \quad (4-33)$$

作三角函数变换，并记 $X^2 = x_c^2 + x_s^2$，$Y^2 = y_c^2 + y_s^2$，得

$$r^2 = \frac{2(x_c y_s - x_s y_c)^2}{X^2 + Y^2 - (X^2 - Y^2)\cos 2\beta - 2(x_c y_c + x_s y_s)\sin\beta} \quad (4-34)$$

求 r 的极值以得长短轴。令 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\beta = 0$ 得

$$\beta = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\frac{2x_c y_c + x_s y_s}{X^2 - Y^2} \quad (4-35)$$

相应的

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{1}{2}(x_c^2 + x_s^2 + y_c^2 + y_s^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(x_c^2 + x_s^2 + y_c^2 + y_s^2)^2 + (x_c y_c + x_s y_s)^2}} \quad (4-36)$$

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{1}{2}(x_c^2 + x_s^2 + y_c^2 + y_s^2) - \sqrt{\frac{1}{4}(x_c^2 + x_s^2 + y_c^2 + y_s^2)^2 + (x_c y_c + x_s y_s)^2}} \quad (4-37)$$

所得轴心运动轨迹如图 4－3 所示。由于各截面上的稳态响应值是不同的，它们可能有不同的椭圆长短轴 $r_{\max}$、$r_{\min}$，也具有不同的夹角 β。所以，在一般情况下，在任意不平衡量作用下，转子的轴线以空间曲线作椭圆形运动，如图 4－3 所示。

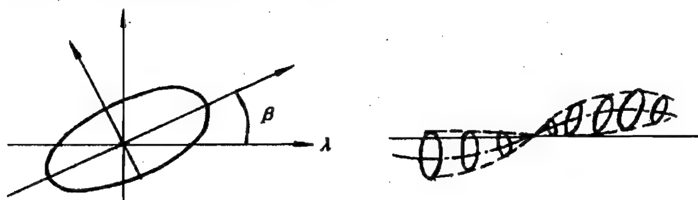


图 4－3　轴心运动轨迹及轴线的空间曲线形

4.1.1.5　轴对称转子－支承系统的不平衡响应

当转子－支承系统是完全轴对称时，表征站与轴段截面上的状态参数减少一半，即仅有 5 个 $[X\ q\ M\ Q\ 1]^{\mathrm{T}}$。于是，站与轴段的相应传递矩阵也缩减为 5×5 方阵。

站的传递矩阵 T_{st} 为

$$
\boldsymbol{T}_{\mathrm{st}}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & J\Omega^2 & 1 & 0 & 0\\
m\Omega^2-k-\mathrm{i}c\Omega & 0 & 0 & 1 & q\omega^2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{4-38}
$$

均质轴段的传递矩阵 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{sh}}$为

$$
\boldsymbol{T}_{\mathrm{sh}}=\begin{bmatrix}
S(k) & \dfrac{T(k)}{\alpha} & \dfrac{U(k)}{\alpha^2 EI} & \dfrac{V(k)}{\alpha^3 EI} & 0\\
\alpha V(k) & S(k) & \dfrac{T(k)}{\alpha EI} & \dfrac{U(k)}{\alpha^2 EI} & 0\\
\alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) & \dfrac{T(k)}{\alpha} & 0\\
\alpha^3 EIT(k) & \alpha^2 EIU(k) & \alpha V(k) & S(k) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{4-39}
$$

无质量弹性轴段的传递矩阵 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{sh}}$为

$$
\boldsymbol{T}_{\mathrm{sh}}=\begin{bmatrix}
1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI} & 0\\
0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} & 0\\
0 & 0 & 1 & l & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{4-40}
$$

相应的综合轴段的传递矩阵为 5×5 方阵。带无质量轴段的综合轴段传递矩阵为

$$
\boldsymbol{T}_i=\begin{bmatrix}
1+\dfrac{Zl^3(1-\nu)}{6EI} & l+\dfrac{l^2J\Omega^2}{2EI} & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI} & \dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI}\omega^2 q\\
Z\dfrac{l^2}{2EI} & 1+\dfrac{lJ\Omega^2}{EI} & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^2}{2EI}\omega^2 q\\
Zl & J\Omega^2 & 1 & l & l\omega^2 q\\
Z & 0 & 0 & 1 & \omega^2 q\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{4-41}
$$

带均质轴段的综合轴段传递矩阵为

$$
\boldsymbol{T}_i=\begin{bmatrix}
S+\dfrac{ZV}{\alpha^3 EI} & \dfrac{T}{\alpha}+\dfrac{J\Omega^2 U}{\alpha^2 EI} & \dfrac{U}{\alpha^2 EI} & \dfrac{V}{\alpha^3 EI} & \dfrac{V}{\alpha^3 EI}\omega^2 q\\
\alpha V+\dfrac{ZU}{\alpha^2 EI} & S+\dfrac{J\Omega^2 U}{\alpha EI} & \dfrac{T}{\alpha EI} & \dfrac{U}{\alpha^2 EI} & \dfrac{U}{\alpha^2 EI}\omega^2 q\\
\alpha^2 EIU+\dfrac{ZT}{\alpha} & \alpha V+J\Omega^2 S & S & \dfrac{T}{\alpha} & \dfrac{T}{\alpha}\omega^2 q\\
\alpha^3 EIT+ZS & \alpha^2 EIU+J\Omega^2\alpha V & \alpha V & S & S\omega^2 q\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{4-42}
$$

相仿地,根据起始端与终止端的边界条件

$$\begin{cases} M_0 = 0, Q_0 = 0 \\ M_n = 0, Q_n = 0 \end{cases} \tag{4-43}$$

可以得到

$$\begin{bmatrix} T_{31} T_{32} T_{35} \\ T_{41} T_{42} T_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{4-44}$$

或改写为

$$\begin{bmatrix} T_{31} T_{32} \\ T_{41} T_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \end{bmatrix}_0 = -\begin{bmatrix} T_{35} \\ T_{45} \end{bmatrix} \tag{4-45}$$

在给定转速下，可由式(4-45)求得 X_0、θ_0 的解，然后，将所求得的 X_0、θ_0 代入相应的传递矩阵关系式，可依次求得各截面上的位移与内力参数。所得位移参数便是各截面相应的强迫响应。轴心轨迹为一圆，圆心在原点。整个转子轴线呈一空间曲线，作圆周运动。

4.1.2　Riccati 传递矩阵法

Riccati 传递矩阵法同样可以用来分析计算转子 - 支承系统的稳态不平衡响应，其基本思路与计算临界转速类似。只是在计算临界转速时，传递矩阵中仅包含各综合轴段的几何、物理参数及运动参数，而稳态不平衡响应计算的传递矩阵中还包含了不平衡力的影响，它所形成的运动方程不再是齐次方程，而是非齐次方程。因此，对应一定的不平衡量情况，在每一个转速下，可以唯一地确定各截面的状态参数，也就唯一地确定了不平衡响应数值。

4.1.2.1　Riccati 传递矩阵的建立

将传递矩阵的一般关系式(4-22)改写为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \cdots \\ \boldsymbol{f} \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{11} & \vdots & \boldsymbol{T}_{12} & \vdots & \boldsymbol{T}_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{T}_{21} & \vdots & \boldsymbol{T}_{22} & \vdots & \boldsymbol{T}_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{T}_{31} & \vdots & \boldsymbol{T}_{32} & \vdots & \boldsymbol{T}_{33} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \cdots \\ \boldsymbol{f} \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}_i \tag{4-46}$$

也可以改写成为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \cdots \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{11} & \vdots & \boldsymbol{T}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{T}_{21} & \vdots & \boldsymbol{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \cdots \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \cdots \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix}_i \tag{4-47}$$

式中：

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ Y \\ \alpha \end{bmatrix}_i \qquad \boldsymbol{e}_{i+1} = \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ Y \\ \alpha \end{bmatrix}_{i+1}$$

$$\boldsymbol{f}_i = \begin{bmatrix} M_x \\ Q_x \\ M_y \\ Q_y \end{bmatrix}_i \qquad \boldsymbol{f}_{i+1} = \begin{bmatrix} M_x \\ Q_x \\ M_y \\ Q_y \end{bmatrix}_{i+1}$$

$$\boldsymbol{u}_i=\begin{bmatrix}T_{19}\\T_{29}\\T_{59}\\T_{69}\end{bmatrix}_i \qquad \boldsymbol{F}_i=\begin{bmatrix}T_{39}\\T_{49}\\T_{79}\\T_{89}\end{bmatrix}_i$$

显然，$\boldsymbol{u}_i$ 与 $\boldsymbol{F}_i$ 系不平衡量引起的附加变形与附加载荷。式(4－46)与式(4－47)中的子矩阵 $\boldsymbol{T}_{11}$、$\boldsymbol{T}_{12}$、$\boldsymbol{T}_{21}$、$\boldsymbol{T}_{22}$以及 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{F}$ 因综合轴段模型的不同而不同。

对于无质量弹性轴段与站构成的综合轴段，由式(4－17)可以得到

$$\boldsymbol{T}_{11}=\begin{bmatrix}1+\frac{Z_{xx}l^3(1-\nu)}{6EI} & l-\frac{l^2J_d\Omega^2}{2EI} & -\frac{Z_{xy}l^3(1-\nu)}{6EI} & \frac{l^2}{2EI}\mathrm{i}\omega\Omega J_p\\ \frac{Z_{xx}l^2}{2EI} & 1-\frac{lJ_d\Omega^2}{EI} & -Z_{xy}\frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI}\mathrm{i}\omega\Omega J_p\\ -\frac{Z_{yx}l^3(1-\nu)}{6EI} & -\frac{l^2}{2EI}\mathrm{i}\omega\Omega J_p & 1+\frac{Z_{yy}l^3(1-\nu)}{6EI} & l-\frac{l^2J_d\Omega^2}{EI}\\ -\frac{Z_{yx}l^2}{2EI} & -\frac{l}{EI}\mathrm{i}\omega\Omega J_p & Z_{yy}\frac{l^2}{2EI} & 1-\frac{lJ_d\Omega^2}{EI}\end{bmatrix} \tag{4-48}$$

$$\boldsymbol{T}_{12}=\begin{bmatrix}\frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3(1-\nu)}{6EI} & 0 & 0\\ \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3(1-\nu)}{6EI}\\ 0 & 0 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI}\end{bmatrix} \tag{4-49}$$

$$\boldsymbol{T}_{21}=\begin{bmatrix}Z_{xx}l & -J_d\Omega^2 & -Z_{xy}l & +\omega\Omega J_p\\ Z_{xx} & 0 & -Z_{xy} & 0\\ -Z_{yx}l & -\mathrm{i}\omega\Omega J_p & Z_{yy}l & -J_d\Omega^2\\ -Z_{yx} & 0 & Z_{yy} & 0\end{bmatrix} \tag{4-50}$$

$$\boldsymbol{T}_{22}=\begin{bmatrix}1 & l & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & l\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4-51}$$

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\frac{l^3(1-\nu)}{6EI}\omega^2q\\ \frac{l^2}{2EI}\omega^2q\\ -\frac{l^3(1-\nu)}{6EI}\mathrm{i}\omega^2q\\ -\frac{l^2}{2EI}\mathrm{i}\omega^2q\end{bmatrix}. \tag{4-52}$$

$$F=\begin{bmatrix} l\omega^2 q \\ \omega^2 q \\ -\mathrm{i}l\omega^2 q \\ -\mathrm{i}\omega^2 q \end{bmatrix} \tag{4-53}$$

对于由均质轴段与站构成的综合轴段，由式(4-19)可得

$$T_{11}=\begin{bmatrix} S+\dfrac{Z_{xx}V}{\alpha^3 EI} & \dfrac{T}{\alpha}-\dfrac{U}{\alpha^2 EI}J_d\Omega^2 & -\dfrac{Z_{xy}V}{\alpha^3 EI} & \mathrm{i}\omega\Omega J_p\dfrac{U}{\alpha^2 EI} \\ \alpha V+\dfrac{Z_{xx}U}{\alpha^2 EI} & S-\dfrac{T}{\alpha EI}J_d\Omega^2 & -\dfrac{Z_{xy}U}{\alpha^2 EI} & \mathrm{i}\omega\Omega J_p\dfrac{T}{\alpha EI} \\ -\dfrac{Z_{yx}V}{\alpha^3 EI} & -\mathrm{i}\omega\Omega J_p\dfrac{U}{\alpha^2 EI} & S+\dfrac{Z_{yy}V}{\alpha^3 EI} & \dfrac{T}{\alpha}-\dfrac{U}{\alpha^2 EI}J_d\Omega^2 \\ -\dfrac{Z_{yx}U}{\alpha^2 EI} & -\mathrm{i}\omega\Omega J_p\dfrac{T}{\alpha EI} & \alpha V+\dfrac{Z_{yy}U}{\alpha^2 EI} & S-\dfrac{T}{\alpha EI}J_d\Omega^2 \end{bmatrix} \tag{4-54}$$

$$T_{12}=\begin{bmatrix} \dfrac{U}{\alpha^2 EI} & \dfrac{V}{\alpha^3 EI} & 0 & 0 \\ \dfrac{T}{\alpha EI} & \dfrac{U}{\alpha^2 EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{U}{\alpha^2 EI} & \dfrac{V}{\alpha^3 EI} \\ 0 & 0 & \dfrac{T}{\alpha EI} & \dfrac{U}{\alpha^2 EI} \end{bmatrix} \tag{4-55}$$

$$T_{21}=\begin{bmatrix} \alpha^2 EIU+Z_{xx}\dfrac{T}{\alpha} & \alpha V-J_d\Omega^2 S & -Z_{xy}\dfrac{T}{\alpha} & \mathrm{i}\omega\Omega J_p S \\ \alpha^3 EIT+Z_{xx}S & \alpha^2 EIU-J_d\Omega^2\alpha V & -Z_{xy}S & \mathrm{i}\omega\Omega J_p\alpha V \\ -Z_{yx}\dfrac{T}{\alpha} & -\mathrm{i}\omega\Omega J_p S & \alpha^2 EIU+Z_{yy}\dfrac{T}{\alpha} & \alpha V-J_d\Omega^2 S \\ -Z_{yx}S & -\mathrm{i}\omega\Omega J_p\alpha V & \alpha^3 EIT+Z_{yy}S & \alpha^2 EIU-J_d\Omega^2\alpha V \end{bmatrix} \tag{4-56}$$

$$T_{22}=\begin{bmatrix} S & \dfrac{T}{\alpha} & 0 & 0 \\ \alpha V & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & \dfrac{T}{\alpha} \\ 0 & 0 & \alpha V & S \end{bmatrix} \tag{4-57}$$

$$u=\begin{bmatrix} \dfrac{V}{\alpha^3 EI}q\omega^2 \\ \dfrac{U}{\alpha^3 EI}q\omega^2 \\ -\dfrac{V}{\alpha^3 EI}\mathrm{i}q\omega^2 \\ -\dfrac{U}{\alpha^2 EI}\mathrm{i}q\omega^2 \end{bmatrix} \tag{4-58}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{T}{\alpha}\omega^2 q \\ S\omega^2 q \\ -\frac{T}{\alpha}\mathrm{i}\omega^2 q \\ -S\mathrm{i}\omega^2 q \end{bmatrix} \tag{4-59}$$

建立 Riccati 关系式

$$\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{S}_i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{G}_i \tag{4-60}$$

式中：$\boldsymbol{S}_i$——4×4 方阵；

$\boldsymbol{G}_i$——4 阶列阵。

将式(4-47)展开得

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{i+1} = \boldsymbol{T}_{11i}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{T}_{12i}\boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{f}_{i+1} = \boldsymbol{T}_{21i}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{T}_{22i}\boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{F}_i \end{cases} \tag{4-61}$$

将 Riccati 变换关系式(4-60)代入上式得

$$\boldsymbol{e}_{i+1} = (\boldsymbol{T}_{11} + \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{S})_i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{T}_{12i}\boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{u}_i \tag{4-62}$$

改写为

$$\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{T}_{11} + \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{S})_i^{-1}\boldsymbol{e}_{i+1} - (\boldsymbol{T}_{11} + \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{S})_i^{-1}(\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{u})_i \tag{4-63}$$

同样可得

$$\boldsymbol{f}_{i+1} = \boldsymbol{S}_{i+1}\boldsymbol{e}_{i+1} + \boldsymbol{G}_{i+1} \tag{4-64}$$

式中：

$$\boldsymbol{S}_{i+1} = (\boldsymbol{T}_{21} + \boldsymbol{T}_{22}\boldsymbol{S})_i(\boldsymbol{T}_{11} + \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{S})_i^{-1} \tag{4-65}$$

$$\boldsymbol{G}_{i+1} = (\boldsymbol{T}_{22}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F})_i - (\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{u})_i\boldsymbol{S}_{i+1} \tag{4-66}$$

式(4-64)~(4-66)建立了由截面 i 向截面 $i+1$ 的参数递推关系，而式(4-63)则建立了由截面 $i+1$ 向截面 i 的状态参数反推关系。它们可用来求解稳态不平衡响应。

4.1.2.2 计算不平衡响应的基本步骤

设转子-支承系统为自由端，则左自由端(起始截面)的边界条件为 $M_{x0} = M_{y0} = 0, Q_{x0} = Q_{y0} = 0$

即

$$\boldsymbol{f}_0 = 0 \tag{4-67}$$

显然，在起始端不存在由于不平衡量引起的附加载荷，即 $\boldsymbol{G}_0 = 0$。于是，由式(4-60)可知，为了保证 $\boldsymbol{e}_0 \neq 0$，必须有 $\boldsymbol{S}_0 = 0$。因此，左自由端的初始条件为

$$\boldsymbol{f}_0 = 0, \boldsymbol{G}_0 = 0, \boldsymbol{S}_0 = 0 \tag{4-68}$$

根据式(4-65)，可以依次计算 $\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$、…$\boldsymbol{S}_n$，由式(4-66)，可依次计算 $\boldsymbol{G}_1$、$\boldsymbol{G}_2$、…$\boldsymbol{G}_n$。式中所需的参数 $\boldsymbol{T}_{11}$、$\boldsymbol{T}_{12}$、$\boldsymbol{T}_{21}$、$\boldsymbol{T}_{22}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{U}$ 等均为综合轴段传递矩阵的子矩阵，由式(4-48)~(4-59)确定，在给定转速(ω、Ω)条件下，均为确定值。

在右端(终止截面)，同样应该满足自由端边界条件

$$\boldsymbol{f}_n = 0 \tag{4-69}$$

根据式(4-64)，上列边界条件可写为

$$\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{G}_n = 0 \tag{4-70}$$

由于 $\boldsymbol{S}_n$、$\boldsymbol{G}_n$ 已经递推求得，可从线性方程组(4 - 70)求得 $\boldsymbol{e}_n$。

按照式(4 - 63)，自右至左，依次求得各截面的变形参数列阵 $\boldsymbol{e}_{n-1}$、$\boldsymbol{e}_{n-2}$、$\cdots \boldsymbol{e}_1$。同时可按式(4 - 64)求得相应的力参数列阵 $\boldsymbol{f}_{n-1}$、$\boldsymbol{f}_{n-2}\cdots \boldsymbol{f}_1$。

给定一系列转速值，即可求出在相应各转速下的各变形参数列阵 $\boldsymbol{e}_i$ 与力参数列阵 $\boldsymbol{f}_i$ 值，得到各转速下各个截面的稳态不平衡响应。

由于系统存在阻尼，所求得的响应 $\boldsymbol{e}_i$ 也均为复数。各截面上的振幅以及相应的轴心轨迹计算，可参考 4.1.1.4 所述方法。

4.1.2.3 系统为轴对称时的简化

当轴系为轴对称时，上述方法完全适用，只是所有的矩阵维数均减少。在此情况下，$X = Y$，$\theta = \alpha$，$M_x = M_y$，$Q_x = Q_y$，所以，式(4 - 47)缩减为 5×5 矩阵方程，$\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{F}$ 均缩减为 2 阶列阵，$\boldsymbol{T}_{11}$、$\boldsymbol{T}_{12}$、$\boldsymbol{T}_{21}$、$\boldsymbol{T}_{22}$均缩减为 2×2 方阵。在 Riccati 关系式(4 - 62)中，$\boldsymbol{S}_i$ 与 $\boldsymbol{G}_i$ 均缩减为 2 维，递推方程式(4 - 63) ~ (4 - 66)仍然适用。求解给定转速下的不平衡响应的过程完全相同，只是所求得的变形列阵本身就是各截面的响应幅值与相位，轴心轨迹为一圆。

4.1.3 多转子系统的稳态不平衡响应

常规的传递矩阵法与 Riccati 传递矩阵法均难以直接用来计算复杂转子 - 支承系统的不平衡响应，须采用各种改进的方法，如子结构传递矩阵法、传递矩阵 - 阻抗耦合法、传递矩阵 - 直接积分法、传递矩阵 - 分振型综合法等。

4.1.3.1 子结构传递矩阵法

以图 3 - 14 所示双转子典型结构为例，设在第 2 站盘上有不平衡量 q_2，在第 12 站盘上有不平衡量 q_{12}。在这种情况下，式(3 - 60)可改写成为

$$
\begin{aligned}
M_6 = {} & M_6^{x_1} X_1 + M_6^{\theta_1}\theta_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\
& + 0 + 0 + 0 + 0 + M_6^{p_{u2}} p_{u2} + 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_7 - X_{17} = {} & X_7^{x_1} X_1 + X_7^{\theta_1}\theta_1 + X_7^{\Delta\theta}\Delta\theta - X_{17}^{x_{11}} X_{11} - X_{17}^{\theta_{11}}\theta_{11} \\
& + X_{17}^{-M_{13}} M_{13} + X_{17}^{-R_{13}} R_{13} + 0 + 0 + 0 + 0 + X_7^{p_{u2}} p_{u2} - X_{17}^{p_{u2}} p_{u2} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_8 - X_{20} = {} & X_8^{x_1} X_1 + X_8^{\theta_1}\theta_1 + X_8^{\Delta\theta}\Delta\theta - X_{20}^{x_{11}} X_{11} - X_{20}^{\theta_{11}}\theta_{11} + X_{20}^{-M_{13}} M_{13} \\
& + X_{20}^{-R_{13}} R_{13} + (X_8^{R_7} + X_{20}^{-R_7}) R_7 + 0 + 0 + 0 + X_8^{p_{u2}} p_{u2} - X_{20}^{p_{u12}} p_{u12} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{10} = {} & M_{10}^{x_1} X_1 + M_{10}^{\theta_1}\theta_1 + M_{10}^{\Delta\theta}\Delta\theta + 0 + 0 + 0 + 0 \\
& + M_{10}^{R_7} R_7 + M_{10}^{R_8} R_8 + 0 + 0 + M_{10}^{p_{u2}} p_{u2} + 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{10} = {} & Q_{10}^{x_1} X_1 + Q_{10}^{\theta_1}\theta_1 + Q_{10}^{\Delta\theta}\Delta\theta + 0 + 0 + 0 + 0 \\
& + Q_{10}^{R_7} R_7 + Q_{10}^{R_8} R_8 + 0 + 0 + Q_{10}^{p_{u2}} p_{u2} + 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
M_{22} = 0 + 0 + 0 + M_{22}^{x_{11}} X_{11} + M_{22}^{\theta_{11}}\theta_{11} - M_{22}^{-M_{13}} M_{13} - M_{22}^{-R_{13}} R_{13}
$$

$$-M_{22}^{-R_7}R_7-M_{22}^{-R_8}R_8+0+0+0+M_{22}^{p_{u12}}p_{u12}=0 \tag{4-71}$$

$$Q_{22}=0+0+0+Q_{22}^{x_{11}}X_{11}+Q_{22}^{\theta_{11}}\theta_{11}-Q_{22}^{-M_{13}}M_{13}-Q_{22}^{-R_{13}}R_{13}$$
$$-Q_{22}^{-R_7}R_7-Q_{22}^{-R_8}R_8+0+0+0+Q_{22}^{p_{u12}}p_{u12}=0$$

$$M_{15}=0+0+0+0+0+M_{15}^{M_{13}}M_{13}+M_{15}^{R_{13}}R_{13}+0+0$$
$$+M_{15}^{x_{13}}X_{13}+M_{15}^{\theta_{13}}\theta_{13}+0+0=0$$

$$Q_{15}=0+0+0+0+0+Q_{15}^{M_{13}}M_{13}+Q_{15}^{R_{13}}R_{13}+0+0$$
$$+Q_{15}^{x_{13}}X_{13}+Q_{15}^{\theta_{13}}\theta_{13}+0+0=0$$

$$X_{16}-X_{13}=0+0+0+X_{16}^{x_{11}}X_{11}+X_{16}^{\theta_{11}}\theta_{11}+0+0+0+0$$
$$-X_{13}+0+0+X_{16}^{p_{u12}}p_{u12}=0$$

$$\theta_{16}-\theta_{13}=0+0+0+\theta_{16}^{x_{11}}X_{11}+\theta_{16}^{\theta_{11}}\theta_{11}+0+0+0+0+0$$
$$-\theta_{13}+0+\theta_{16}^{p_{u12}}p_{u12}=0$$

式(4－71)中的 p_{u2}、p_{u12}为不平衡量 q_2、q_{12}引起的不平衡力，即 $p_{u2}=\omega^2 q_2$、$p_{u12}=\omega^2 q_{12}$。在已知不平衡量 q_2、q_{12}的条件下，它们只是转速 ω_1、ω_2 的函数。显然，q_2 只影响转子子结构Ⅰ上的有关状态参数 M_6、X_7、X_8、M_{10}、Q_{10}，而 q_{12}只影响 M_{22}、Q_{22}、X_{16}、θ_{16}。式(4－71)是包含 11 个未知状态参数(X_1、θ_1、$\Delta\theta$、X_{11}、θ_{11}、M_{13}、R_{13}、R_7、R_8、X_{13}、θ_{13})的线性非齐次方程组，在给定转速下，可求得各状态参数。

实际上，由于系统中可能存在阻尼，支承刚度也可能是非轴对称的。在这种情况下，式(4－71)的未知状态参数将扩展一倍，即 X_1、θ_1、Y_1、α_1、$\Delta\theta$、$\Delta\alpha$、X_{11}、θ_{11}、Y_{11}、α_{11}、M_{x13}、R_{x13}、R_{x7}、R_{x8}、M_{y13}、R_{y13}、R_{y7}、R_{y8}、X_{13}、θ_{13}、Y_{13}、α_{13}，共 22 个，相应的方程式数目也增加一倍，共 22 个。同时，不平衡量 p_{u2}、p_{u12}也分解在两个正交平面上：p_{ux2}、p_{ux12}、p_{uy2}、p_{uy12}。

此时，式(4－71)的对应方程组为一个 22 阶的线性非齐次方程组，在给定转速下，可求得相应的解。由于双转子系统各转子的转速是不同的，有对应于不同转子的同步稳态响应。在同一状态下，不同转子的转速不同，它们激起的稳态不平衡响应的频率也不相同。两个不同频率的振动的合成可能是一个周期过程，也可能是一个非周期过程，还可能有拍的现象。从分析稳态不平衡响应的主要目的出发，可以把不同频率的不平衡响应的幅值叠加，作为稳态响应的最大幅值。于是可写出此双转子子系统各截面上的最大振幅为

$$A_{i\max}=r_{1\max}+r_{2\max} \tag{4-72}$$

式中，$r_{1\max}$、$r_{2\max}$由式(4－36)求得。

4.1.3.2　传递矩阵－阻抗耦合法

传递矩阵－阻抗耦合法也可以用来计算复杂的多转子－支承系统的稳态不平衡响应。

当任一轮盘站存在不平衡量 q 时，该站的传递矩阵中应增加由于不平衡量引起的不平衡力——剪切力，则式(3－17)的状态参数关系式改写为

$$\begin{cases} X^R = X^L \\ \theta^R = \theta^L \\ M^R = M^L + (1 - \dfrac{\omega}{\Omega}\dfrac{J_p}{J_d}) J_d \Omega^2 \theta^L \\ Q^R = Q^L + m\Omega^2 X^L + q\omega^2 \end{cases} \tag{4-73}$$

记 $q\omega^2 = p_u$，可将式(4-73)改写为

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}^R = \boldsymbol{T}_{st} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}^L + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_u \end{bmatrix} \tag{4-74}$$

或写成

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} & & & & \vdots & 0 \\ & \boldsymbol{T}_{st} & & & \vdots & 0 \\ & & & & \vdots & 0 \\ & & & & \vdots & p_u \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ Q \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}^L \tag{4-75}$$

于是，计算稳态不平衡响应的传递矩阵写成为

$$\boldsymbol{T}_{st}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{st} & & \vdots & 0 \\ & & \vdots & p_u \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & \vdots & 1 \end{bmatrix} \tag{7-76}$$

相应的综合轴段的传递矩阵可根据轴段模型而定，对于无质量弹性轴段组成的综合轴段，其传递矩阵为

$$\boldsymbol{T}^* = \begin{bmatrix} & \vdots & \dfrac{l^3(1-\nu)}{6EI} p_u \\ \boldsymbol{T} & \vdots & \dfrac{l^2}{2EI} p_u \\ & \vdots & \left[l + \dfrac{l^3(1-\nu)N}{6EI} \right] p_u \\ & \vdots & p_u \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4-77}$$

对于由均质轴段组成的综合轴段，其传递矩阵为

$$
T^* = \begin{bmatrix} & & \vdots & \frac{V}{\alpha^3 EI} p_u \\ & T & \vdots & \frac{U}{\alpha^2 EI} p_u \\ & & \vdots & \frac{T}{\alpha} p_u \\ & & \vdots & p_u \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4-78}
$$

若轴系是非轴对称的，则式(4-77)、(4-78)扩展为 9×9 方阵。如同式(4-17)、(4-19)。

上式中 4×4 块矩阵 T 为一般综合轴段的传递矩阵(详见第3章)。

与第3章中计算临界转速的传递矩阵-阻抗耦合法方程(3-86)相比，可写出如下计算稳态不平衡响应的方程

$$
\begin{bmatrix} A(1,1) & \cdots & A(1,2N+M+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A(2N+M,1) & \cdots & A(2N+M+1,2N+M+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{4-79}
$$

改写为

$$
\begin{bmatrix} A(1,1) & \cdots & A(1,2N+M) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A(2N+M,1) & \cdots & A(2N+M,2N+M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \vdots \\ R_M \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A(1,2N+M+1) \\ \vdots \\ A(2N+M+1,2N+M+1) \end{bmatrix} \tag{4-80}
$$

式(4-80)为计算稳态不平衡响应的基本方程。式中各元素 $A(i,j)$ 均为各综合轴段传递矩阵各有关元素的函数，只与综合轴段的几何物理参数及运动参数(ω、Ω)有关，方程右边则还与不平衡量有关。在给定转速下，按一定的不平衡量，便可计算得到各站的稳态不平衡响应。

当轴系为非轴对称时，方程组(4-80)的维数扩大一倍，即$(4N+2M)$个。在算得各站的不平衡响应值后，根据 X、Y 两平面的向量组合，以及不同频率之间的算术叠加，得到最大稳态不平衡响应幅值。具体处理方法与4.1.3.1所述相同。

4.1.4 有限元子结构模态综合法

第3章3.1.6及3.1.7采用有限元子结构模态综合法已经导出了转子系统回到状态空间下的运动方程(3-187)，形式如下：

$$
\overline{A}_s \dot{y}_s + \overline{B}_s y_s = Q_s \tag{4-81}
$$

式中右端的广义力为广义不平衡力，其表达式为

$$
Q_s = Q_s^{(1)} \cos\omega t + Q_s^{(2)} \sin\omega t \tag{4-82}
$$

将式(4-82)代入式(4-81)得

$$
\overline{A}_s \dot{y}_s + \overline{B}_s y_s = Q_s^{(1)} \cos\omega t + Q_s^{(2)} \sin\omega t \tag{4-83}
$$

设 $y_s = y_s^{(1)} \cos\omega t + y_s^{(2)} \sin\omega t$，将其代入式(4-83)后可得：

$$
\begin{cases} y_s^{(1)} = (A_s^* A_s^* + \omega^2 I)^{-1} (A_s^* \overline{A}_s^{-1} Q_s^{(1)} - \omega \overline{A}_s^{-1} Q_s^{(2)}) \\ y_s^{(2)} = \frac{1}{\omega} (-A_s^* y_s^{(1)} + \overline{A}_s^{-1} Q_s^{(1)}) \end{cases} \tag{4-84}
$$

式中：$A_s^* = \overline{A}_s^{-1}\overline{B}_s$；

响应幅值 $A = \frac{1}{2}\sqrt{(y_s^{(1)R} + y_s^{(2)I})^2 + (y_s^{(1)I} + y_s^{(2)R})^2}$；

相位角 $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y_s^{(1)I} - y_s^{(2)R}}{y_s^{(1)R} + y_s^{(2)I}}$　。

式中，上标 R 表示实部，I 表示虚部。

4.1.5 采用有限元模态综合法的工程算例分析

例：某发动机燃气发生器转子稳态响应分析，要求给出油膜参数等最佳匹配值。

(1) 原始数据

某发动机燃气发生器转子由轴流叶轮、离心叶轮、涡轮盘及轴组成。前端为刚性支承，后端为带挤压油膜阻尼器的弹性支承。

阻尼器参数如下：

油膜宽度：$L = 0.9\mathrm{cm}$；

油膜半径：$r = 2.073\mathrm{cm}$；

滑油动力粘度：$\mu = 2.209242 \times 10^{-2}\mathrm{Pa \cdot s}$；

油膜半径间隙：$C = 0.002 \sim 0.01\mathrm{cm}$；

不平衡量：$U = 1.05 \sim 10.5\mathrm{g \cdot cm}$。

(2) 计算模型

将整个转子划分为两个子结构，叶片及盘按集中质量处理。计算模型示于图 4 – 4。

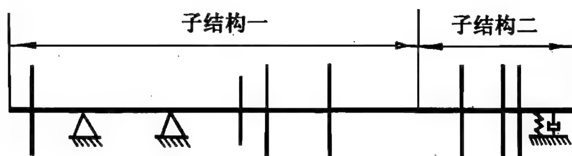


图 4 – 4　某机燃气发生器转子计算模型

(3) 计算方法

采用有限元模态综合法，相应计算软件为 DARC(见 4.4 节)。本计算选取如下三组油膜半径间隙及三组不平衡量进行分析，以选取最佳匹配方案：

油膜半径间隙：$C_1 = 0.002\mathrm{cm}$

$C_2 = 0.005\mathrm{cm}$

$C_3 = 0.01\mathrm{cm}$

不平衡量：$U_1 = 1.05\mathrm{g \cdot cm}$

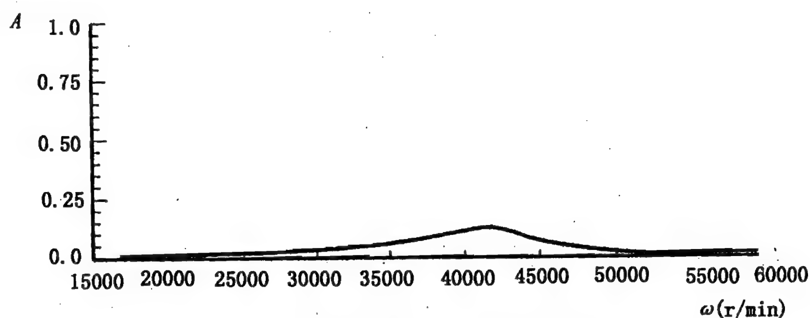
$U_2 = 5.2\mathrm{g \cdot cm}$

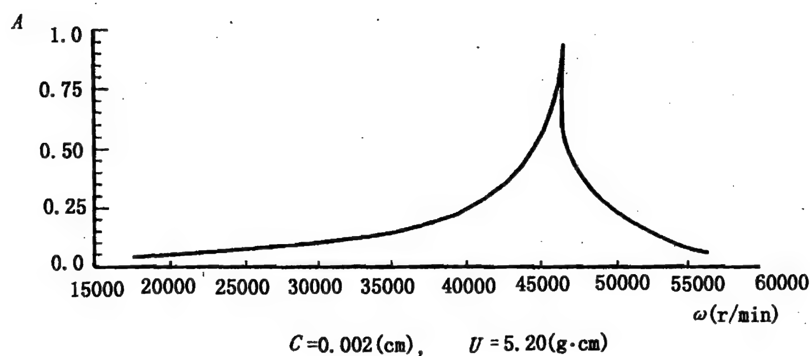
$U_3 = 10.5\mathrm{g \cdot cm}$

U_i 加在第二个子结构第一级盘上。

(4) 计算结果

计算结果分别列于图 4 – 5 ~ 图 4 – 7。图中 ω 为转子自转速度，A 为振幅。





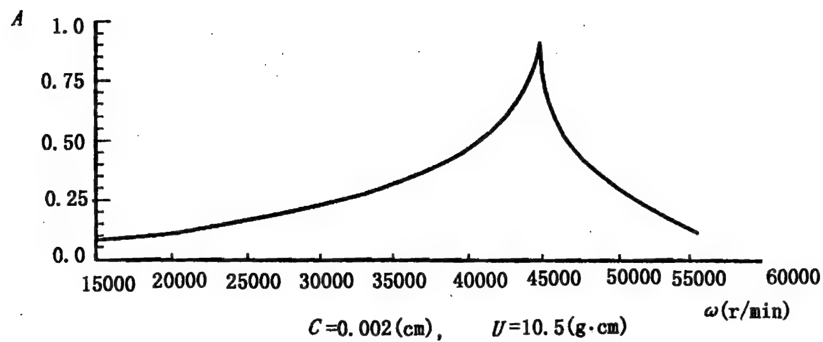
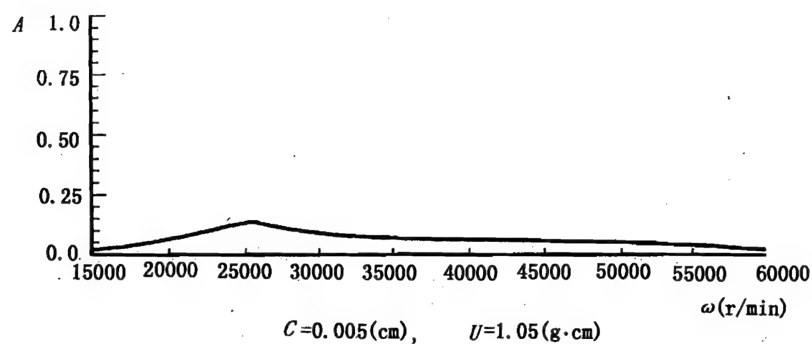
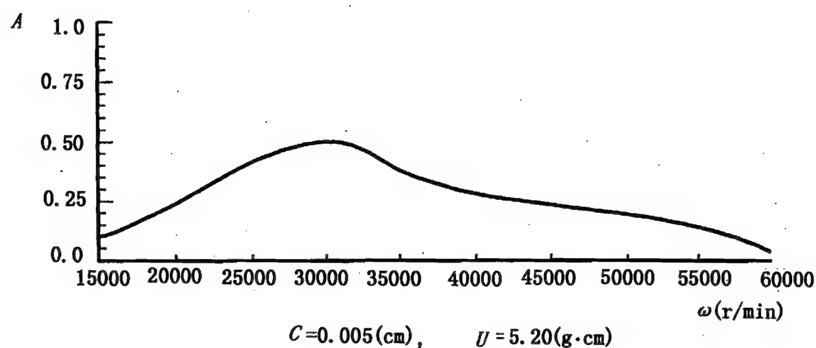


图4-5　燃气发生器转子稳态不平衡响应





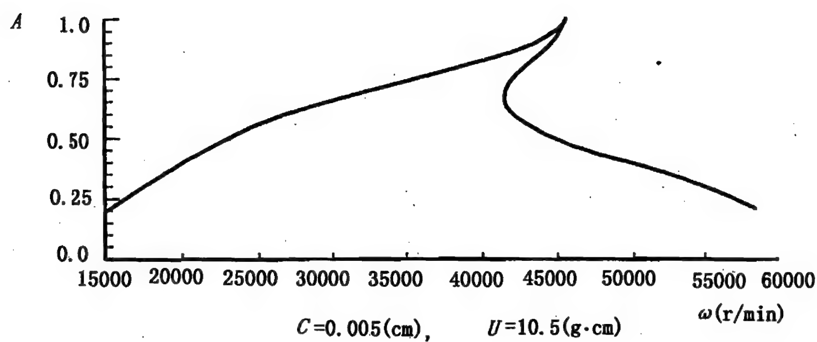


图4－6　燃气发生器转子稳态不平衡响应

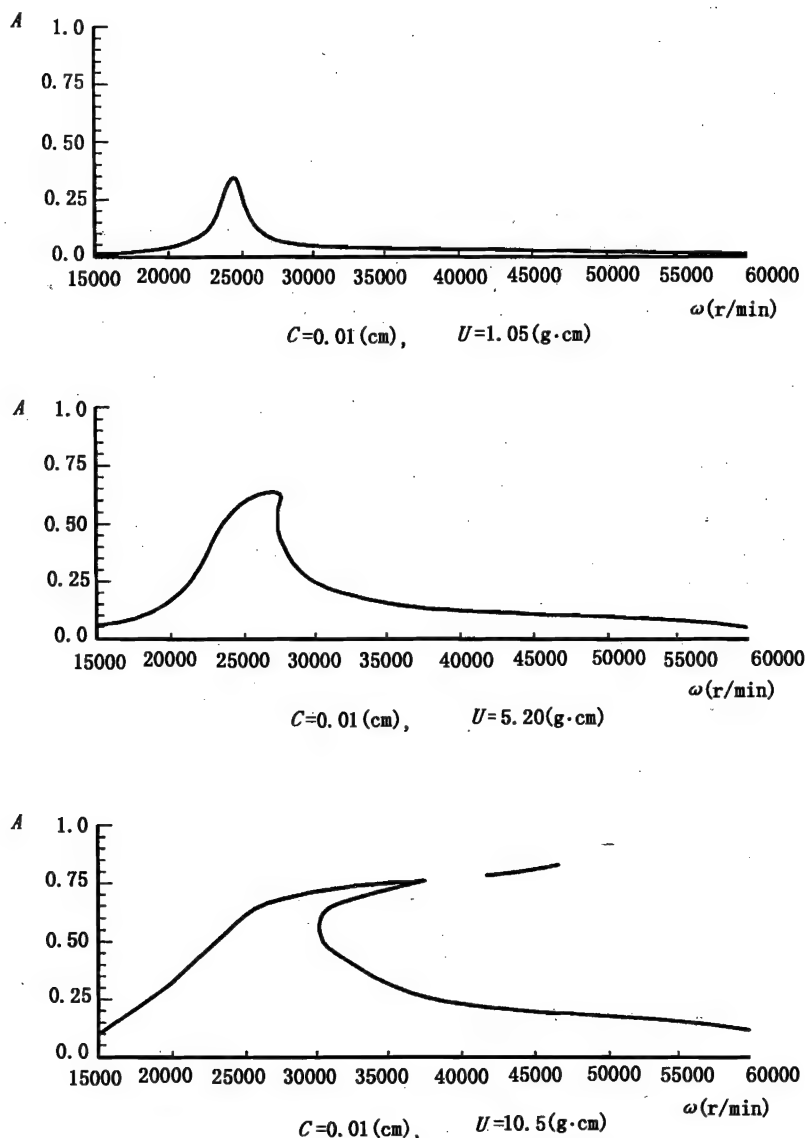


图 4-7 燃气发生器转子稳态不平衡响应

(5) 计算结果分析

由图 4-5～图 4-7 可以看出:不平衡量较小时,阻尼器间隙越小,减振效果越好;不平衡量较大时,阻尼器间隙越大,越容易出现双稳态现象。阻尼器间隙一定时,随着不平衡量增大,位移峰值对应的转速增加,并可能出现双稳态。不平衡量一定时,随阻尼器间隙的减小,在临界转速处转子的振动减小,但在超临界转速处,振动幅值反而增大。这是由于随着阻尼器油膜间隙的改变,油膜刚度与油膜阻尼均相应发生变化,因而在一定程度上改变响应幅值,也改变了与峰值对应的频率。由图 4-6 可以看出,当不平衡量为 5.2g·cm 时,取油膜间隙为 0.005cm 比较合适。

4.2 瞬态响应

转子系统的瞬态响应分析主要是指在转子系统不平衡突然变化、作用在转子系统上的外载荷突然变化或转子系统在变转速下工作等情况下,转子系统的响应分析,包括转子系统的位移、变形以及支承结构的传递载荷分析。其中,转子系统工作中的加、减速过程,叶片折断飞出引起的转子系统突加不平衡响应,转、静件之间的碰摩响应,发动机的喘振响应等是瞬态响应分析的主要研究内容。

对于带挤压油膜阻尼器的转子系统,在机动载荷作用下的响应需进行瞬态分析。飞机机动飞行时引起的机动载荷(陀螺力矩和惯性力),通常按静载处理,即只计及机动载荷作用下转子结构的静位移。然而,机动飞行的突发性还会使机动载荷具有冲击效应。对于带挤压油膜阻尼器的转子系统,需用瞬态响应分析方法分析在该冲击载荷作用下阻尼器的承载能力和抑制失稳的能力。此外,对于支承各向异性或带非同心型挤压油膜阻尼器的转子系统,须采用瞬态响应分析方法才可能求得稳态响应特性。

4.2.1 加、减速响应

起动加速是最常见的瞬态过程。现代航空发动机大多采用柔性支承设计,转子系统的平动和俯仰型临界转速一般均设计在慢车转速以下或慢车转速到工作转速的过渡转速范围内。因此,在发动机加、减速过程中要通过转子系统的临界转速,应准确分析加、减速的响应特性并力求减小加、减速通过临界转速时的瞬态响应。

E.J.Gunter 等人研究了加、减速对图 4-8 所示 Jeffcott 转子的临界转速响应特性的影响。其计算模型为一只计刚性不计质量的柔性轴,轴中央置一具有质量偏心的单盘,轴两端对称地安装在刚性支承上。

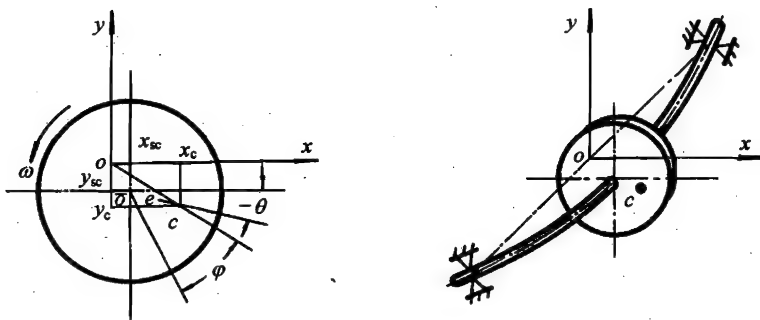


图 4-8 Jeffcott 转子模型

由图可见,盘的质心坐标为 x_c 和 y_c,它与固定坐标 x 和 y 的关系为

$$\begin{cases} x_c = x + e\cos\theta \\ y_c = y + e\sin\theta \end{cases} \tag{4-85}$$

转子除受不平衡力作用外,还受由加速或减速引起的惯性力作用,在固定坐标系统内转子系统的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me(\omega^2\cos\theta + a\sin\theta) \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = me(-\omega^2\sin\theta + a\cos\theta) \end{cases} \tag{4-86}$$

式中,m、c 和 k 分别为盘的质量、系统外阻尼和轴的刚度;$\theta = \omega t$,ω 为自转角速度,$a = \dot{\omega}$ 为角加速度;e 为质量偏心距。

给定初始条件,对式(4-86)采用数值积分法,选取适当步长在时域内积分即可得到瞬态响应结果。以 δ 表示轴的挠度,$\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$;$A$ 代表放大因子,$A = \delta/e$;A_c 代表无加、减速时临界转速放大因子,$A_c = m\omega_c/c$,ω_c 为系统无阻尼临界角速度;进动角 $\beta = \tan^{-1}(y/x)$;相位角 $\varphi = \beta - \theta$ 表示转子响应和不平衡矢量间的相位差。

计算时采用了较小的不平衡度,计算了不同加、减速比和不同阻尼比时的瞬态响应。图4-9和图4-10分别是加速和减速通过转子系统临界转速时的典型响应曲线示例。图中,加减速比以无量纲参数 $\gamma = a/\omega_c^2$ 表示;ξ 代表阻尼比。

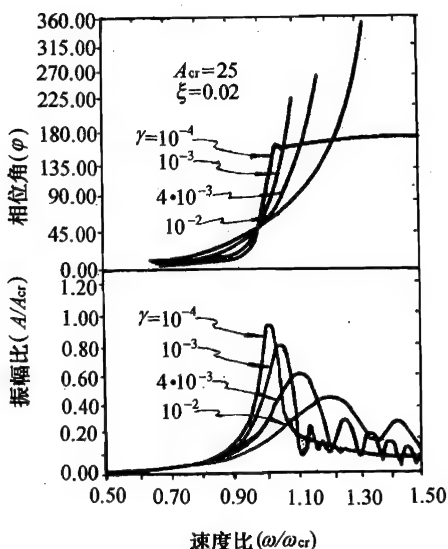


图4-9 加速过临界时的响应曲线

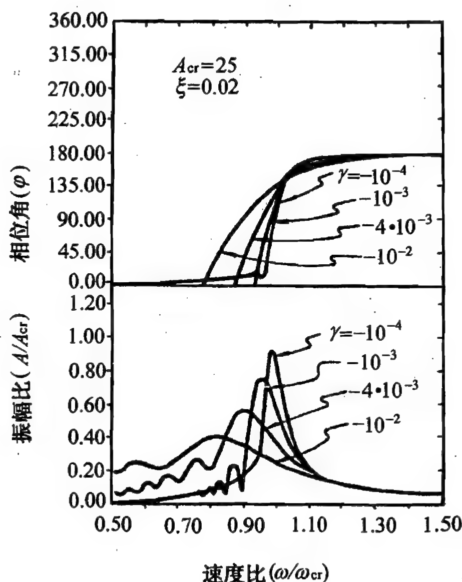


图4-10 减速过临界时的响应曲线

分析计算结果中的加、减速临界转速响应曲线,可以得到以下规律:

(1)加速或减速时,振动的最大幅值随加速比加大或减速比加大而减小。对小阻尼系统该种影响则更明显。

(2)加速或减速时,发生最大幅值的角速度(ω_{max})随加速比增加而加大,随减速比增加而减小。对小阻尼系统该种影响则更明显。

(3)加速或减速时,系统在临界转速时不呈现典型的90°相位角,而在相—频图中显示出一个节点。此节点的相位与加速比或减速比大小无关。加速时,节点发生在45°,减速时发生在135°。

(4)加速或减速时,过临界时的振动(在系统的临界转速区)一般会出现拍振现象。拍振的频率等于旋转角速度(ω)和临界角速度(ω_c)之差。该频率与加、减速比和阻尼比无关。拍振的幅值取决于阻尼的大小。

对于实际的转子系统,只要列出以矩阵形式表达的多自由度系统在不平衡力、加速或减速

引起的惯性力和油膜力(对带挤压油膜阻尼器的转子系统)作用下的运动方程,同样可以应用数值积分的方法求出其加、减速过临界时的瞬态响应。上面所总结的规律具有普遍意义,可作为转子系统设计考虑加、减速瞬态响应特性的参考。

4.2.2 转子突加不平衡瞬态响应

在《综合高性能涡轮发动机技术(IHPTET)计划文集》中提出了各种叶片在高转速下飞失时对发动机承受能力的要求。要求指出:“高压压气机和涡轮在转子叶片飞失造成不平衡的情况下,系统应能在短时间内降低功率工作;对于风扇转子叶片的丢失,由于质量较大、不平衡量极大,因此,要保证发动机安装节不出故障或保证不出现发动机二次损伤的情况下安全停车。”为此,必须进行转子系统瞬态(叶片飞失突加不平衡)响应特性分析。

研究表明,对于不带专门的弹性支承或(和)挤压油膜阻尼器,而只考虑滚动轴承弱阻尼的转子-支承系统,当出现较大的突加不平衡时,其瞬态不平衡响应幅值或轴颈轨迹将以大速率增长而呈发散形态,最终将导致转子系统的失效。因此,现代航空发动机广泛应用了带或不带定心弹性支承的挤压油膜阻尼器,旨在吸收转子振动能量,使发动机不平衡敏感度降低并大大减小转子系统的振动和支承的传递载荷。研究转子系统突加不平衡瞬态响应的一个重要内容就是分析和确定挤压油膜阻尼器抑制转子系统振动和避免转子系统失稳的能力。

求解瞬态响应问题,从数学上可归结为求解初值的问题。整个系统的位移和速度必须由初始瞬时值来确定。由此初始值开始,取适当时间步长在时域内积分,如系统动力稳定,瞬态过程即消失,则系统在周期激振力作用下产生周期运动稳态响应;如果系统是不稳定的,则瞬态响应不会消失而会随时间增长,除非(或直到)系统中由于非线性参数的作用,而形成所谓极限圆。所以,瞬态响应分析既是求解非线性动力学问题的一种有效方法,也是判断系统稳定性的一个重要方法。

图4-11所示为一端刚性支承、另一端为弹性支承加挤压油膜阻尼器(SFD)的简单刚性转子系统。以此系统为例,说明其突加不平衡瞬态响应特性。该转子系统可简化为带SFD的单质量-弹簧系统,其油膜阻尼器的力学模型如图4-12所示。

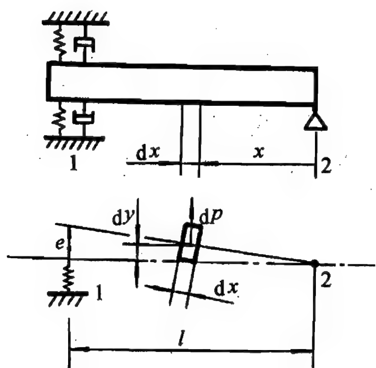


图4-11 带弹支加SFD简单刚性转子系统

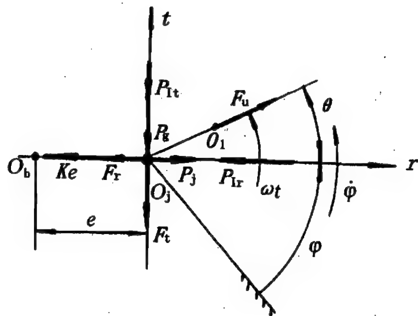


图4-12 油膜阻尼器力学模型

系统的等效质量 m 可按其振动惯性力对刚性支点的力矩等于转子系统总惯性力对刚性支点的力矩与陀螺力矩之和的条件求出；系统的刚度即为弹性支承刚度 k。其轴颈中心 O_j 点的径向和切向运动方程如下：

$$\begin{cases} m(\ddot{e} - e\dot{\varphi}^2) = F_u\cos(\omega t - \varphi) - ke - F_r \\ m(e\ddot{\varphi} + 2\dot{e}\dot{\varphi}) = F_u\sin(\omega t - \varphi) - F_t \end{cases} \quad (4-87)$$

式中，F_u 为等效单质量系统的等效不平衡力；e 为轴颈径向位移；φ 为进动角，$\dot{\varphi}$ 为轴颈进动角速度；F_r 和 F_t 分别为挤压油膜径向力和切向力。油膜力可按雷诺方程短轴承理论解求得。

将式(4-87)化为无量纲形式，即用 $m\omega^2 c$ 去除式中各项，得

$$\begin{cases} \varepsilon'' - \varepsilon\varphi'^2 = U\cos(\omega t - \varphi) - \bar{F}_r - \varepsilon/\delta^2 \\ \varepsilon\varphi'' - 2\varepsilon'\varphi' = U\sin(\omega t - \varphi) - \bar{F}_t \end{cases} \quad (4-88)$$

式中，上标(′)和(″)表示对 ωt 求导；U 为不平衡质量偏心率；$\varepsilon = e/c$ 为轴颈偏心率（c 为油膜半径间隙）；$\delta = \omega/\omega_c$，（$\omega_c = \sqrt{k/m}$为等效单质量系统的临界转速）；$\bar{F}_r$ 和 $\bar{F}_t$ 为无量纲油膜径向力和切向力。

由雷诺方程短轴承解，采用 π 油膜假设，$\bar{F}_r$ 和 $\bar{F}_t$ 可表示为

$$\begin{cases} \bar{F}_r = B(\varepsilon\varphi' I_1 + \varepsilon' I_2)/\delta \\ \bar{F}_t = B(\varepsilon\varphi' I_3 + \varepsilon' I_1)/\delta \end{cases} \quad (4-89)$$

式中：$B = \mu RL^3/(m\omega_c c^3)$为轴承参数（$\mu$ 为滑油动力粘度，R 和 L 分别为 SFD 的半径和承载长度）。

$$\begin{cases} I_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \dfrac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^3}\,\mathrm{d}\theta \\ I_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \dfrac{\sin^2\theta}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^3}\,\mathrm{d}\theta \\ I_3 = \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \dfrac{\cos^2\theta}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^3}\,\mathrm{d}\theta \\ \theta_1 = \tan^{-1}(-\varepsilon'/\varepsilon\varphi') \end{cases} \quad (4-90)$$

运动方程(4-88)是含描述系统运动状态的量 ε 和 φ，自变量为 ωt 的二阶常微分方程组。可将其降阶为一阶常微分方程组。采用数值积分法（如用四阶 Runge-Kutta 法），即可求解系统的瞬态响应（轴颈偏心率轨迹）。

表征转子系统的瞬态振动特性除偏心率 ε 外，尚有传递率 T。T 定义为通过阻尼支承的外传力与等效系统不平衡激振力之比。外传力是支承上油膜力与支承弹性力的向量和；不平衡力等于 $m\Omega^2 e$，$\Omega = \dot{\varphi}$。根据定义，可求出 T 的无量纲参数表达式：

$$T = \sqrt{(\varepsilon + B\varepsilon I_1\delta)^2 + (B\varepsilon I_2\delta)^2}/(U\delta^2) \quad (4-91)$$

数值模拟时，认为等效的带弹性阻尼支承的单质量系统具有初始不平衡，其初始不平衡质量通过计算油膜轴颈中心的响应轨迹图和传递率的时间历程图，可以形象地揭示转子系统在模拟叶片丢失突加不平衡前后的瞬态响应和稳定性。

偏心率为 U_0，在此初始不平衡作用下，先数值积分 3~5 圈，达到稳定状态。然后，在与 U_0 相同方向上突加不平衡，形成总的不平衡质量偏心率为 U，再进行数值积分，求出突加不平衡后的瞬态响应轨迹和传递率。

图 4-13 给出了轴承参数 $B = 0.1$（这是 SFD 正常设计时常用的参数之一），$U_0 = 0.15$（这

也是正常的残余不平衡情况），突加不平衡质量偏心率 $U_S=0.275$，总的不平衡质量偏心率 $U=0.425$，转速比 $\delta=3$ 时系统的突加不平衡响应特性。由图可以看出，突加不平衡后，轴颈在大偏心轨迹运转几圈后逐渐趋于小偏心轨道；传递率一度增大到 1.4 后很快减小下来。在此情况下，SFD 的减振作用是明显的。但当突加不平衡增大，即使总的不平衡质量偏心率不变，保持 $U=0.425$，而使 U_0 减小为 0.1，U_S 增大为 0.325，$\delta=3$，计算得到的响应特性如图 4 - 14 所示。由图可以看出，突加不平衡后，轴颈轨迹 $\varepsilon=0.88$，即出现了极限圆；传递率最高值达 2.78，稍后稳定在 $T=2.57$（远大于 1）。这样的特性表明转子已失稳。

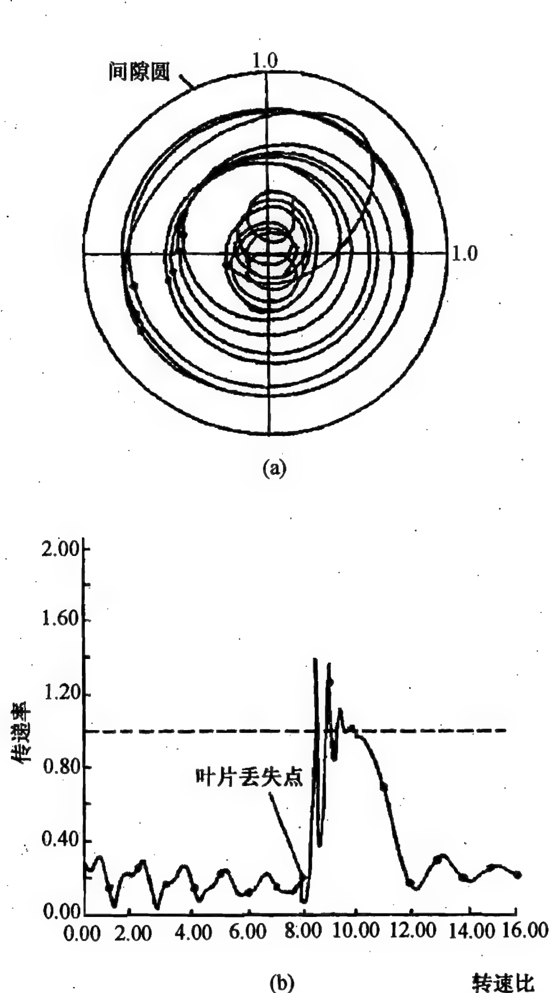


图 4 - 13　带 SFD 刚性转子突加不平衡响应

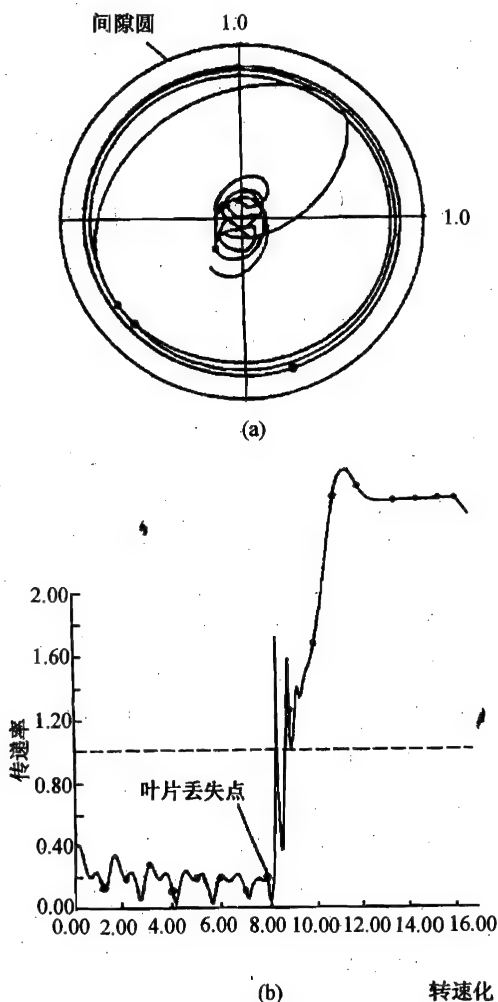


图 4 - 14　带 SFD 刚性转子突加不平衡响应

4.2.3　瞬态响应分析方法

转子系统瞬态响应计算分析方法有两类：一类是传递矩阵法；另一类是直接刚度法（有限元素法、模态综合法等）。利用传递矩阵法直接计算转子系统的瞬态响应问题（初值问题）比较困难，其主要原因在于由传递矩阵法建立的系统振动方程及其状态向量没有包含与时间相关

的位移项、速度项和加速度项。为了充分发挥传递矩阵法求解方程的维数不随结构系统的自由度数目增加而增加、解法简便等优点，可以利用传递矩阵法与数值积分法相结合，如传递矩阵－直接积分法来求解转子系统的瞬态响应问题。用有限元素法或其他方法建立转子系统的运动微分方程，如不计陀螺力矩，通常如下式所示：

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = f \tag{4-92}$$

直接数值积分求解上面的方程组统称直接刚度法。选用合适的数值积分方法，从初始瞬时开始，以适当的步长进行时域积分，即可求得瞬态响应。目前常用的是模态叠加法。推广到求解大型复杂转子系统则是模态综合法。可以认为，模态综合法（求解复杂转子系统的瞬态响应）乃是当今应用最广泛、最有效的方法。

模态综合法在转子系统瞬态响应分析的具体应用中又发展了子结构传递矩阵－模态综合法和有限元－模态综合法等方法。下面分别介绍子结构传递矩阵－模态综合法和有限元－模态综合法的基本思路。

4.2.3.1 子结构传递矩阵－模态综合法

子结构传递矩阵－模态综合法的基本思路是先用子结构传递矩阵法计算出各子结构前几阶模态（考虑模态截断），将其作为模态综合法各子结构的模态集（与固定界面法或自由界面法相比，更符合转子系统各子结构的实际边界条件）。然后，用模态坐标代换物理坐标（固定的直角坐标），建立各子结构的模态运动方程，再利用子结构间的协调条件去掉冗余自由度，从而建立转子系统的综合（耦合）运动方程。对该综合运动方程应用合适的数值积分方法，以适当的步长在时域内积分，即可求出转子系统的瞬态响应特性。该法适用于复杂转子－支承系统的瞬态不平衡响应分析和稳定性判别。

以一发动机双转子系统为例，说明其计算模型和突加不平衡响应求解方法的具体步骤。

（1）计算模型和坐标系

图4－15所示为一发动机双转子系统结构简图及其简化模型。将其划分为三个子结构：低压转子由子结构1和2组成，套齿连接处（铰接点）为分界面；高压转子为子结构3。分析中，忽略转子系统的轴向振动和扭转振动，仅考虑垂直和水平面内的弯曲振动，并认为垂直和水平方向的刚度和阻尼相同。计及轮盘的陀螺效应。高、低压轴的后轴间轴承处设置轴间阻尼器并有定心弹性支承与之并联。高、低压转子通过三个轴承与机匣连接。

图4－16所示，$x_1y_1z_1$、$x_2y_2z_2$ 和 $x_3y_3z_3$ 坐标系是固定于空间的直角坐标系。其原点分别位于低压转子的左端、低压转子套齿连接处和高压转子的左端。沿 x_i、y_i 和 z_i 方向的线位移分别由 u_i、v_i 和 ξ_i 表示；绕 x_i 和 y_i 的角位移分别由 α_i 和 θ_i 表示。下标 i 等于1,2,3，对应于三个子结构系统。

（2）确定模态集

利用子结构传递矩阵法或整体传递矩阵法，计算出各子结构的前几阶模态（考虑模态截断）。通过计算，三个子结构各得到一组模态，共三组模态（考虑轴对称，x、y 方向各选取相同的 j 阶模态，每一组则有 $2j$ 个模态），即 φ_{uij} 和 φ_{vij}（$i=1、2、3$，代表三个子结构；$j=1、2、\cdots、n$，代表模态阶数）。

（3）第一次坐标转换

认为转子系统运动空间和时间各自独立，则用物理坐标表示的垂直和水平方向的线位移 $u(\xi,t)$ 和 $v(\xi,t)$ 可以用一组展开的模态函数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\cdots,\varphi_n$ 和 n 个模态（广义）坐标 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_n$ 表示。其坐标转换的表达式为

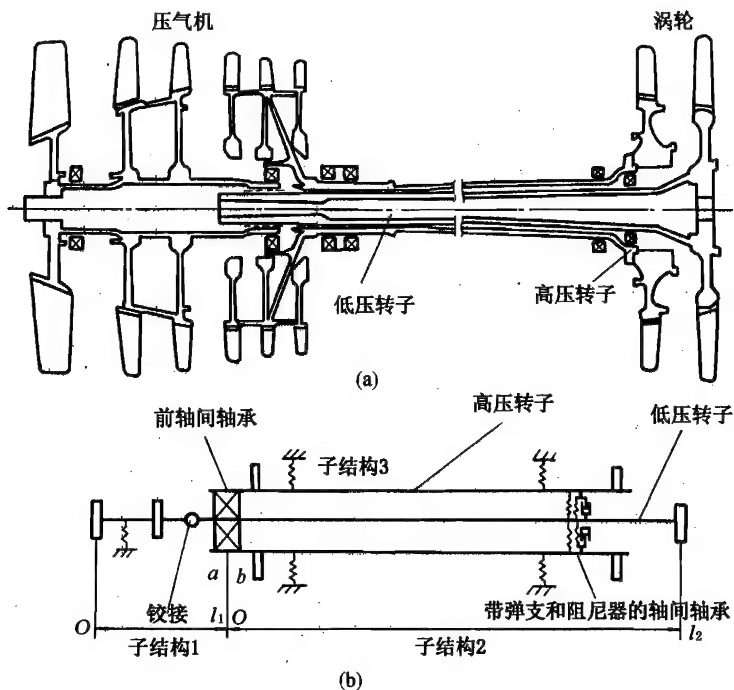


图 4 – 15　双转子系统结构及简化模型

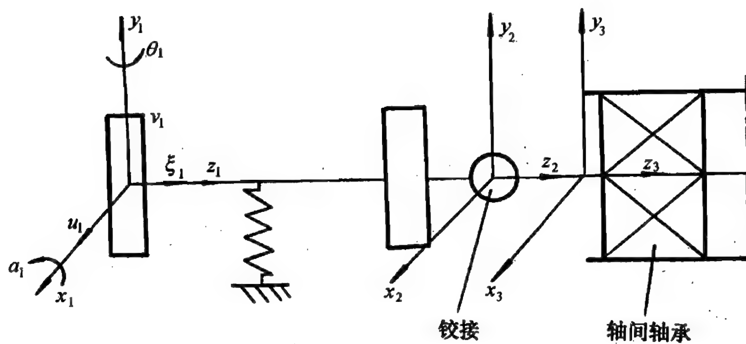


图 4 – 16　简化模型坐标系统

$$
\begin{cases} u_i(\xi,t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{uij}(\xi)\eta_{uij}(t) \\ v_i(\xi,t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{vij}(\xi)\eta_{vij}(t) \end{cases} \tag{4-93}
$$

用矩阵表示为

$$
\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}_u\boldsymbol{\eta}_u \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\varphi}_v\boldsymbol{\eta}_v \end{cases} \tag{4-94}
$$

绕 x、y 轴方向的角位移可写为

$$\begin{cases}\alpha(\xi,t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\boldsymbol{\varphi}_v(\xi)\boldsymbol{\eta}_v(t) = \boldsymbol{\varphi}'_v\boldsymbol{\eta}_v \\ \theta(\xi,t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\boldsymbol{\varphi}_u(\xi)\boldsymbol{\eta}_u(t) = \boldsymbol{\varphi}'_u\boldsymbol{\eta}_u\end{cases} \tag{4-95}$$

式(4－94)和式(4－95)的组合矩阵表达式为

$$\begin{bmatrix}u\\v\\\alpha\\\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_u & 0\\0 & \boldsymbol{\varphi}_v\\0 & \boldsymbol{\varphi}'_v\\\boldsymbol{\varphi}'_u & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{H}_Z\boldsymbol{\eta} \tag{4-96}$$

矩阵 $\boldsymbol{H}_Z$ 是沿轴任意给定点位移由直角坐标到模态(广义)坐标的转换矩阵，即所谓的第一次坐标转换。这样，对物理参数$[u \quad v \quad \alpha \quad \theta]^{\mathrm{T}}$求解的问题，转化成求解$[\boldsymbol{\eta}_u \quad \boldsymbol{\eta}_v]^{\mathrm{T}}$。

(4)导出子结构的运动方程

分别对每一个子结构进行力学分析，得到各自的运动方程。

a. 轴的模态质量矩阵和模态刚度矩阵

轴的动能为

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l m_s\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2 \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int_0^l m_s\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]^2 \mathrm{d}\xi \tag{4-97}$$

式中，m_s 为轴单位长度的质量；l 为轴长。

速度项$\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}\right]$和$\left[\dfrac{\partial v}{\partial t}\right]$以下面的矩阵表达式表示：

$$\begin{cases}\dot{u} = \boldsymbol{\varphi}_u\dot{\boldsymbol{\eta}}_u\\\dot{v} = \boldsymbol{\varphi}_v\dot{\boldsymbol{\eta}}_v\end{cases} \tag{4-98}$$

式中，“·”表示对时间的偏导数。

将其代入式(4－97)得到：

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_S\dot{\boldsymbol{\eta}} \tag{4-99}$$

式中，$\boldsymbol{M}_S = \int_0^l m_s\boldsymbol{\varphi}_u{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_u\mathrm{d}\xi + \int_0^l m_s\boldsymbol{\varphi}_v{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_v\mathrm{d}\xi$ 为轴的模态质量矩阵。

轴的位能为

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right]^2 \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right]^2 \mathrm{d}\xi \tag{4-100}$$

式中，EI 为轴的弯曲刚度。

线位移的二阶偏导数$\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right]^2$和$\left[\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right]^2$以下面的矩阵表达式表示：

$$\begin{cases}u'' = \boldsymbol{\varphi}''_u\boldsymbol{\eta}_u\\v'' = \boldsymbol{\varphi}''_v\boldsymbol{\eta}_v\end{cases} \tag{4-101}$$

式中，“″”表示对坐标 ξ 的二阶求导。

将其代入式(4－100)得到：

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_S\boldsymbol{\eta} \tag{4-102}$$

式中，$\boldsymbol{K}_S = \int_0^l EI[\boldsymbol{\varphi}''_u]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}''_u\mathrm{d}\xi + \int_0^l EI[\boldsymbol{\varphi}''_v]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}''_v\mathrm{d}\xi$ 为轴的模态刚度矩阵。

b. 轮盘的模态质量、惯性力矩阵和模态陀螺矩阵

在固定直角坐标系中，轮盘作用在轴上的惯性力和陀螺力矩可以表示为

$$\begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_d & & & 0 \\ & m_d & & \\ & & J_d & \\ 0 & & & J_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p\omega \\ 0 & 0 & -J_p\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{4-103}$$

式中，m_d 表示轮盘的质量；J_d 和 J_p 分别表示轮盘的赤道转动惯量和极转动惯量；ω 为转子旋转角速度。需要注意的是，通常高、低压转子转速不相等，公式中的 ω 具体数值应根据所计算的转子来定。

转换到模态(广义)坐标系中可得：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix} &= \boldsymbol{H}_Z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} m_d & & & 0 \\ & m_d & & \\ & & J_d & \\ 0 & & & J_d \end{bmatrix} \boldsymbol{H}_Z \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{H}_Z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p\omega \\ 0 & 0 & -J_p\omega & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{H}_Z \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ &= \boldsymbol{M}_D \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{G}_D \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \tag{4-104}$$

式中，$\boldsymbol{M}_D$ 为盘的模态质量和惯性力矩阵；$\boldsymbol{G}_D$ 为盘的模态陀螺矩阵。

c. 支承模态刚度矩阵和模态阻尼矩阵

从轴承内圈开始，通过轴承座向外延伸到机匣安装边或安装节定义为转子支承。支承刚度应考虑轴承载荷作用点相对于机匣安装边或安装节的位移。支承阻尼系指滚珠或滚棒轴承的外阻尼。此项内容不含轴间弹性元件的刚度和阻尼；也不含支承设置有挤压油膜阻尼器的油膜刚度和油膜阻尼。

沿轴任意给定点的支承模态刚度矩阵和模态阻尼矩阵，通过坐标转换，可分别得到：

$$\boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{H}_Z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} K_b & & & 0 \\ & K_b & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{H}_Z \tag{4-105}$$

$$\boldsymbol{C}_b = \boldsymbol{H}_Z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} C_b & & & 0 \\ & C_b & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{H}_Z \tag{4-106}$$

式中，$\boldsymbol{K}_b$ 和 $\boldsymbol{C}_b$ 分别表示支承的模态刚度矩阵和模态阻尼矩阵；K_b 和 C_b 分别表示支承刚度和支承阻尼(转子轴对称，故 x、y 两方向的支承刚度、阻尼相等)。

d. 系统模态外力列阵

将转子系统质量偏心引起的不平衡力、转子结构的重力作为系统的外力。此外，将挤压油膜阻尼器的瞬态油膜力也作为系统的外力。

沿轴任意给定点的模态外力矩阵，通过坐标转换，可得到：

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{H}_Z^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_u + \boldsymbol{H}_Z^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_w + \boldsymbol{H}_Z^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_o \tag{4-107}$$

式中,N 表示模态外力列阵;F_u 表示转子系统不平衡力向量,对于瞬态响应,此处应指突加不平衡向量;F_w 表示转子的重力向量;F_o 表示挤压油膜阻尼器作用在转子上的油膜力。将此油膜力作为外力考虑,可采用短轴承理论解或其他求解方法进行计算。

上述各项求得后,即可写出在模态(广义)坐标系统中,每个子结构运动方程的一般表达式:

$$[M_S+M_D]_{2j\times 2j}\ddot{\eta}_{2j\times 1}+[G_D+C_b]_{2j\times 2j}\dot{\eta}_{2j\times 1}+[K_S+K_b]_{2j\times 2j}\eta_{2j\times 1}=N_{2j\times 1} \tag{4-108}$$

式中,各矩阵的下标符号 j 代表子结构垂直或水平方向取的模态阶数;$2j$ 代表子结构两个方向共取的模态阶数。

对于第 i 个子结构,式(4-108)可缩写为

$$[M_i]_{2j\times 2j}\ddot{\eta}_{2j\times 1}+[G_i+C_i]_{2j\times 2j}\dot{\eta}_{2j\times 1}+[K_i]_{2j\times 2j}\eta_{2j\times 1}=[N_i]_{2j\times 1} \tag{4-109}$$

按图4-16示例,$i=1,2,3$。如果每个子结构水平、垂直方向各取3阶模态($j=3$),整个子结构共6个模态,则式(4-109)可写为

$$[M_1]_{6\times 6}\ddot{\eta}_6+[G_1+C_1]_{6\times 6}\dot{\eta}_{6\times 1}+[K_1]_{6\times 6}\eta_{6\times 1}=[N_1]_{6\times 1} \tag{4-110}$$

$$[M_2]_{6\times 6}\ddot{\eta}_{6\times 1}+[G_2+C_2]_{6\times 6}\dot{\eta}_{6\times 1}+[K_2]_{6\times 6}\eta_{6\times 1}=[N_2]_{6\times 1} \tag{4-111}$$

$$[M_3]_{6\times 6}\ddot{\eta}_{6\times 1}+[G_3+C_3]_{6\times 6}\dot{\eta}_{6\times 1}+[K_3]_{6\times 6}\eta_{6\times 1}=[N_3]_{6\times 1} \tag{4-112}$$

(5)建立整个转子系统的综合运动方程

按图4-15示例,简单组集三个子结构的运动方程可得到:

$$\begin{bmatrix} M_1 & & 0 \\ & M_2 & \\ 0 & & M_3 \end{bmatrix}_{18\times 18}\ddot{\eta}_{18\times 1}$$

$$+\begin{bmatrix} G_1+C_1 & & 0 \\ & G_2+C_2 & \\ 0 & & G_3+C_3 \end{bmatrix}_{18\times 18}\dot{\eta}_{18\times 1}$$

$$+\begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & K_2 & \\ 0 & & K_3 \end{bmatrix}_{18\times 18}\eta_{18\times 1}=\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}_{18\times 1} \tag{4-113}$$

方程(4-113)表示一组没有综合的子结构方程。这意味着列阵 η 包含了一定量的多余自由度。为消除多余自由度,需利用子结构对接界面的位移协调或约束条件。

示例的转子系统在子结构2和子结构3之间的后轴间阻尼器处有一弹性支承,通过应用转换矩阵 H_Z,从直角坐标转换到模态(广义)坐标得到的模态刚度可以直接加到组合的系统运动方程(4-113)中的模态刚度矩阵中。该模态力项新的表达式为

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2+K_{C2} & K_{C23} \\ 0 & K_{C32} & K_3+K_{C3} \end{bmatrix}_{18\times 18}\eta_{18\times 1} \tag{4-114}$$

式中,$K_{C2}\eta$ 和$K_{C3}\eta$分别表示作用在子结构2和子结构3上的模态弹性力列阵;$K_{C23}\eta$ 和 $K_{C32}\eta$ 则表示两子结构间模态弹性力耦合项。

需要强调的是，在转子系统中，经常遇到在子结构间由一些本身具有一定柔性的弹性支承或密封件组成。此时，子结构间没有公共自由度，即不存在位移（线位移或角位移）协调条件。其处理办法是，将这些柔性连接直接以模态阻尼和模态刚度的形式引入模态运动方程。

由示例，该转子系统在子结构 1 和子结构 2 之间有 2 个位移协调（约束）条件，即在铰接点子结构 1 的 l_1 处和子结构 2 的 0 处 x 方向和 y 方向的线位移各自相等；在子结构 2 和子结构 3 之间有 2 个位移协调（约束）条件，即在前轴间轴承子结构 2 的 a 处和子结构 3 的 b 处 x 方向和 y 方向的线位移各自相等。其约束方程（参见图 4－15）为

x 方向

$$\begin{cases}\varphi_{u11}(l_1)\eta_1+\varphi_{u12}(l_1)\eta_2+\varphi_{u13}(l_1)\eta_3=\varphi_{u21}(0)\eta_4+\varphi_{u22}(0)\eta_5+\varphi_{u23}(0)\eta_6\\ \varphi_{u21}(a)\eta_4+\varphi_{u22}(a)\eta_5+\varphi_{u23}(a)\eta_6=\varphi_{u31}(b)\eta_7+\varphi_{u32}(b)\eta_8+\varphi_{u33}(b)\eta_9\end{cases},\quad(4-115)$$

y 方向

$$\begin{cases}\varphi_{v11}(l_1)\eta_{10}+\varphi_{v12}(l_1)\eta_{11}+\varphi_{v13}(l_1)\eta_{12}=\varphi_{v21}(0)\eta_{13}+\varphi_{v22}(0)\eta_{14}+\varphi_{v23}(0)\eta_{15}\\ \varphi_{v21}(a)\eta_{13}+\varphi_{v22}(a)\eta_{14}+\varphi_{v23}(a)\eta_{15}=\varphi_{v31}(b)\eta_{16}+\varphi_{v32}(b)\eta_{17}+\varphi_{v33}(b)\eta_{18}\end{cases}\quad(4-116)$$

式(4－115)和式(4－116)可以写成矩阵形式

$$\boldsymbol{S}_{4\times18}\,\boldsymbol{\eta}_{18\times1}=0\quad(4-117)$$

将向量列阵 $\boldsymbol{\eta}$ 分为 14 维独立变量向量 $\boldsymbol{q}$ 和 4 维非独立变量向量即约束向量 $\boldsymbol{\eta}_C$；相应地，矩阵 $\boldsymbol{S}$ 可分部为

$$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B}]\quad(4-118)$$

式中，$\boldsymbol{B}$ 是 4×4 非奇异矩阵，而 $\boldsymbol{A}$ 是 4×14 矩阵。于是方程(4－115)和(4－116)可写为

$$\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\alpha_6&\alpha_7&\alpha_8&\alpha_9&\alpha_{10}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}&\alpha_{15}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\alpha_{16}&\alpha_{17}&\alpha_{18}&\alpha_{19}&\alpha_{20}\end{bmatrix}_{4\times14}\begin{bmatrix}\eta_2\\\eta_3\\\eta_4\\\eta_5\\\eta_6\\\eta_8\\\eta_9\\\eta_{11}\\\eta_{12}\\\eta_{13}\\\eta_{14}\\\eta_{15}\\\eta_{16}\\\eta_{17}\\\eta_{18}\end{bmatrix}_{14\times1}$$

$$+\begin{bmatrix}\varphi_{u11}(l_1)&&&0\\&-\varphi_{u31}(b)&&\\&&\varphi_{v11}(l_1)&\\0&&&-\varphi_{v31}(b)\end{bmatrix}_{4\times4}\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_7\\\eta_{10}\\\eta_{16}\end{bmatrix}_{4\times1}=0\quad(4-119)$$

式中：

$\alpha_1=\varphi_{u12}(l_1)$；$\alpha_2=\varphi_{u13}(l_1)$；$\alpha_3=-\varphi_{u21}(0)$；$\alpha_4=-\varphi_{u22}(0)$；$\alpha_5=-\varphi_{u23}(0)$；

$\alpha_6=\varphi_{u21}(a)$；$\alpha_7=\varphi_{u22}(a)$；$\alpha_8=\varphi_{u23}(a)$；$\alpha_9=-\varphi_{u32}(b)$；$\alpha_{10}=-\varphi_{u33}(b)$；
$\alpha_{11}=\varphi_{v12}(l_1)$；$\alpha_{12}=\varphi_{v13}(l_1)$；$\alpha_{13}=-\varphi_{v21}(0)$；$\alpha_{14}=-\varphi_{v22}(0)$；$\alpha_{15}=-\varphi_{v23}(0)$；
$\alpha_{16}=\varphi_{v21}(a)$；$\alpha_{17}=\varphi_{v22}(a)$；$\alpha_{18}=\varphi_{v23}(a)$；$\alpha_{19}=-\varphi_{v32}(b)$；$\alpha_{20}=-\varphi_{v33}(b)$。
式(4-119)可缩写为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{C}}=0 \tag{4-120}$$

由方程(4-120)可得

$$\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{C}}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \tag{4-121}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_{18\times1}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \cdots\\ \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{C}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{14\times14}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ -\boldsymbol{B}_{4\times4}^{-1}\boldsymbol{A}_{4\times14}\end{bmatrix}\boldsymbol{q}_{14\times1}\\&=\boldsymbol{\beta}_{18\times14}\,\boldsymbol{q}_{14\times1}\end{aligned} \tag{4-122}$$

式中，$\boldsymbol{I}$为单位矩阵；$\boldsymbol{\beta}$矩阵是反映$\boldsymbol{\eta}$和$\boldsymbol{q}$之间关系的转换矩阵，即所谓的第二次坐标转换。

将式(4-122)代入式(4-113)，并在等式两端各项前乘$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，即可得到整个转子系统的综合运动方程

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1 & & 0\\ & \boldsymbol{M}_2 & \\ 0 & & \boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\ddot{\boldsymbol{q}}\\&+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{C}_1 & & 0\\ & \boldsymbol{G}_2+\boldsymbol{C}_2 & \\ 0 & & \boldsymbol{G}_3+\boldsymbol{C}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\eta}}\\&+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_1 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{K}_{\mathrm{C2}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{C23}}\\ 0 & \boldsymbol{K}_{\mathrm{C32}} & \boldsymbol{K}_3+\boldsymbol{K}_{\mathrm{C3}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_1\\ \boldsymbol{N}_2\\ \boldsymbol{N}_3\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4-123}$$

上式可简写为

$$[\boldsymbol{M}_{\mathrm{Q}}]_{14\times14}\ddot{\boldsymbol{q}}_{14\times1}+[\boldsymbol{G}_{\mathrm{Q}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{Q}}]_{14\times14}\dot{\boldsymbol{q}}_{14\times1}+[\boldsymbol{K}_{\mathrm{Q}}]_{14\times14}\boldsymbol{q}_{14\times1}=[\boldsymbol{N}_{\mathrm{Q}}]_{14\times1} \tag{4-124}$$

式中，$\boldsymbol{M}_{\mathrm{Q}}$、$\boldsymbol{G}_{\mathrm{Q}}$、$\boldsymbol{C}_{\mathrm{Q}}$、$\boldsymbol{K}_{\mathrm{Q}}$和$\boldsymbol{N}_{\mathrm{Q}}$分别代表系统综合的模态质量矩阵、模态陀螺矩阵、模态阻尼矩阵、模态刚度矩阵和模态力列阵。

(6)转子系统综合运动方程的求解

整个转子系统在外力作用下的瞬态响应可通过对系统综合运动方程(4-124)在时域内积分求得。需要注意的是，系统外力包括转子的突加不平衡力、转子本身的重力和挤压油膜阻尼器作用在转子上的油膜力。对每一个时间步长积分时，均需求得挤压油膜阻尼器的瞬时油膜力。

根据粘流体运动微分方程和流体连续方程，可导出固定坐标系的雷诺方程，并可进一步得到按短轴承理论解的油膜力表达式：

$$\begin{bmatrix}F_{ox}\\ F_{oy}\end{bmatrix}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}-\frac{\mu RL^3(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta)}{(c-x\cos\theta-y\sin\theta)^3}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}\mathrm{d}\theta \tag{4-125}$$

式中，F_{ox}和F_{oy}分别表示x轴方向和y轴方向的油膜力分量；μ为滑油动力粘度；R为油膜轴承半径；L为阻尼器承载长度；c为油膜半径间隙；θ为油膜力的方向角。

对于短轴承半油膜，取积分限为

$$\theta_1 = \theta_0 \qquad \theta_2 = \theta_0 + \pi$$

按式(4－124)用数值积分求得模态坐标表示的瞬态不平衡响应后，可根据式(4－122) $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta q}$和式(4－93) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}_u \boldsymbol{\eta}_u$、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\varphi}_v \boldsymbol{\eta}_v$，进行两次坐标逆转换，即可得到以固定直角坐标(物理坐标)表示的瞬态不平衡响应。

4.2.3.2　有限元模态综合法

下面简介求解转子－支承－机匣系统瞬态不平衡响应的有限元模态综合法的基本思路和步骤。

(1)子结构划分

将复杂的转子－支承－机匣系统按结构特点或工程计算需要分解为几个子结构。

(2)子结构的有限元分析

应用有限元素法建立固定坐标系下各子结构的运动方程。计算瞬态响应宜采用固定坐标系。

转子及机匣子结构运动方程的通用表达式如式(3－168)，即：

$$\boldsymbol{M\ddot{X}} + \boldsymbol{G\dot{X}} + \boldsymbol{KX} = \boldsymbol{f} \tag{4－126}$$

计算出每个子结构各元素，包括轴元素、盘元素、轴承元素和机匣元素的质量矩阵、陀螺和阻尼矩阵以及刚度矩阵。

(3)建立子结构在广义状态空间的运动方程

引入状态向量，将子结构按内部自由度和界面自由度分块并引入变换矩阵，得到子结构在广义状态空间的运动方程如式(3－170)，即：

$$\boldsymbol{A\dot{Y}} + \boldsymbol{BY} = \boldsymbol{F} \tag{4－127}$$

(4)建立子结构在模态坐标下的运动方程

按固定界面模态综合法分析，可分别求出各子结构的进动模态和静力约束模态。求解进动模态时，考虑模态截断，只保留有实际工程意义的低阶模态。充分发挥模态综合法有效降低方程阶数，大大缩聚自由度的特点。

子结构的运动描述为保留的进动模态与静力约束模态的叠加。经变换、缩聚得到子结构在模态坐标下的运动方程如式(3－179)，即：

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{\dot{P}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^{\mathrm{b}} \tag{4－128}$$

(5)建立系统在广义状态空间的运动方程(系统的综合运动方程)

将各个子结构模态坐标下的运动方程组集在一起，将所有的界面坐标及各子结构的保留广义坐标集成系统的状态向量。

引入界面对接条件，消除相关项。利用各子结构界面相容条件的变换矩阵导出系统变换矩阵，从而得到系统在广义状态空间的运动方程如式(3－187)，即：

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{\dot{Y}}_{\mathrm{S}} + \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S}} \tag{4－129}$$

(6)系统综合运动方程的求解

整个转子－支承－机匣系统在外力作用下的瞬态响应可选择合适的数值积分方法对系统综合运动方程式(4－129)在时域内积分求得。同样，系统外力包括转子的突加不平衡力、转子自身的重力和挤压油膜阻尼器作用在转子上的油膜力。对每一个时间步长积分时，均需求解挤压油膜阻尼器的瞬时油膜力。固定坐标系下按短轴承解的挤压油膜阻尼器的油膜力仍如式

(4-125)所示。

瞬态响应分析中有两个关键问题需认真考虑和处理:一是应用模态综合法,其子结构模态阶数的选取;另一是应用数值积分法,其积分步长的选取。

模态综合法的显著特点是能有效地降低方程阶数、大大缩减自由度数目,使复杂的问题能方便求解。然而,要保证问题求解的精度,还必须根据求解问题的性质和要求,进行合理的降阶,即所谓模态截断。对于航空发动机转子-支承-机匣系统而言,由系统各阶模态叠加反映的瞬态不平衡响应,主要是低阶成分,高阶成分占很小乃至不占比例。因此,根据经验,子结构模态一般取前6阶,最多至12阶就足够了。一般情况下,机匣子结构与转子子结构的同一阶模态相比,机匣的固有频率较转子高很多。这样,模态综合的结果,整个系统的瞬态不平衡响应,转子模态的影响和成分往往是主要的。

数值积分法既适用于线性系统,也适用于非线性系统。采用数值积分法所考虑的基本出发点是积分算法的稳定性和精确度。数值积分的算法很多,如四阶 Runge-Kutta 法、改进的 Euler 法、中心差分法、Newmark 法、Wilson-θ 法等,其中 Runge-Kutta 法用得最广泛。为了保证计算的稳定性(数学方法本身的稳定)和精确度,选择一个合适的时间步长是十分重要的。一方面,该时间步长必须小到足以保持数学稳定并得到精确的解;另一方面,该时间步长又不宜选得过小,以致影响计算效率和经济性。

所选择的时间步长 Δt 应对应于系统的最小周期。如果最小周期为 T_N(N 为选取的模态阶数),则 Δt 通常可选取为 $\Delta t \leqslant T_N/10$。实际进行数值积分时,也可以分段取时间步长,如一开始可以选取 Δt 大一些,后面几圈(接近稳定解或极限圆)取小一些。或开始选取大一些,如出现不稳定迹象时,则减小时间步长,判定是否属于数值算法的不稳定。计算程序中应具有实时显示瞬态响应轨迹图的功能,以便对积分过程进行实时观察,对积分步长实时监控。

4.2.4 瞬态响应算例

4.2.4.1 子结构传递矩阵-模态综合法算例

计算了图4-15所示带轴间弹性阻尼支承的双转子系统。后轴间弹性阻尼支承的弹性支承刚度取为 2×10^5N/cm;挤压油膜阻尼器的直径为6cm、承载长度为2.4cm。阻尼器无端封,按短轴承理论半油膜解计算油膜力。高压和低压转子的转速比1.1,仅在高压转子前级压气机上突加不平衡量(模拟叶片丢失)。瞬态响应计算时的初始位移和初始速度均取为零。

计算了不同转速时,在不同突加不平衡量和不同阻尼器油膜间隙情况下转子的瞬态响应特性。数值积分方法采用了四阶 Runge-Kutta 法和修改的 Newmark 法两种,其计算结果是一致的。典型的计算结果示于图4-17至图4-20上,图的含意是在阻尼器间隙圆内,轴颈相对阻尼器外环的瞬态轨迹。图中轨迹圆上的时间标记表示高压转子的一转。

图4-17示出高压转子转速 8000r/min 时,突加不平衡量和阻尼器油膜间隙分别为 0.1kg·cm和0.024cm情况下的瞬态响应。由图可以看出,转子系统是稳定的,已形成了稳态的圆轨迹。图4-18至图4-20示出高压转子转速 10000r/min 时,不同转子突加不平衡量和不同阻尼器油膜间隙情况下的瞬态轨迹。在油膜间隙为0.018cm、转子突加不平衡量为0.05 kg·cm情况下,转子系统呈现不稳定,其特征是在大约95%阻尼器间隙圆处形成极限圆。阻尼器油膜间隙为0.024cm,在突加不平衡量0.1kg·cm的作用下,转子系统是稳定的,形成稳态的轨迹圆;而在突加不平衡0.3kg·cm作用下,则瞬态轨迹迅速增大,形成一极限圆,表明转子系统出现非线性失稳。

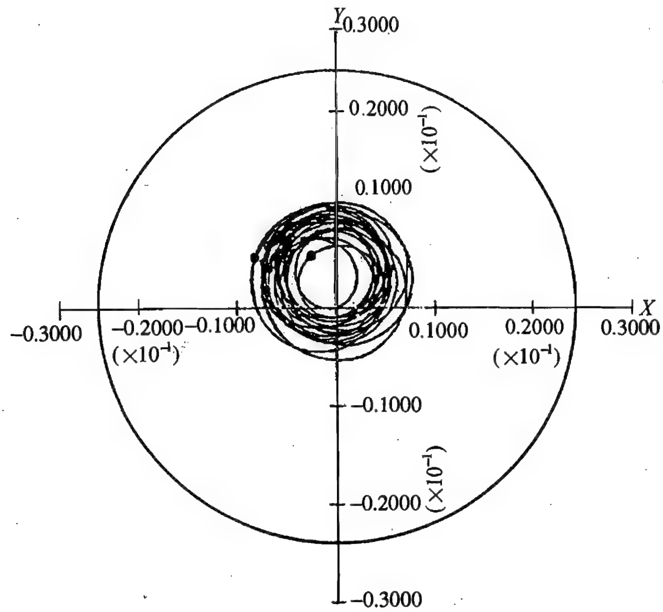


图 4 - 17　轴间阻尼器处的瞬态响应轨迹

（n_H = 8000 r/min，c = 0.024 cm，UE = 0.1kg·cm）

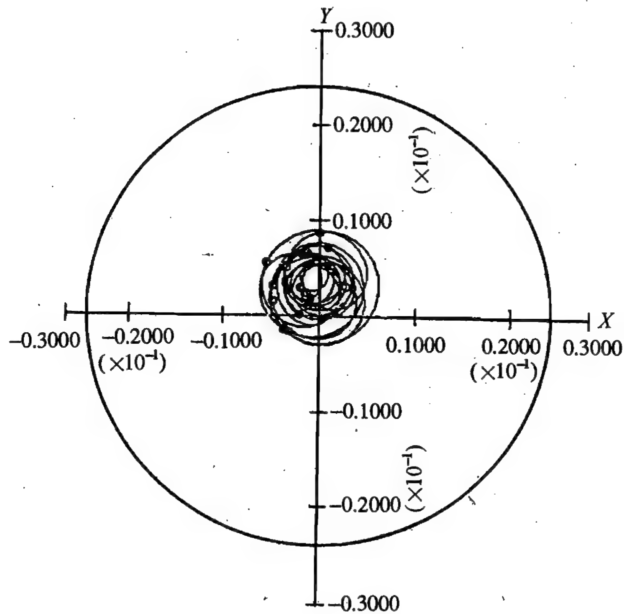


图 4 - 18　轴间阻尼器处的瞬态响应轨迹

（n_H = 10000 r/min，c = 0.024 cm，UE = 0.1kg·cm）

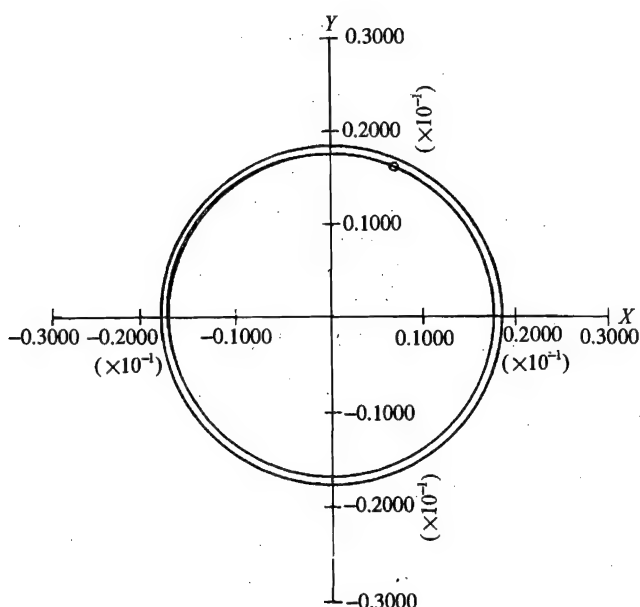


图 4－19 轴间阻尼器处的瞬态响应轨迹

(n_H = 10000 r/min, c = 0.018 cm, UE = 0.05kg·cm)

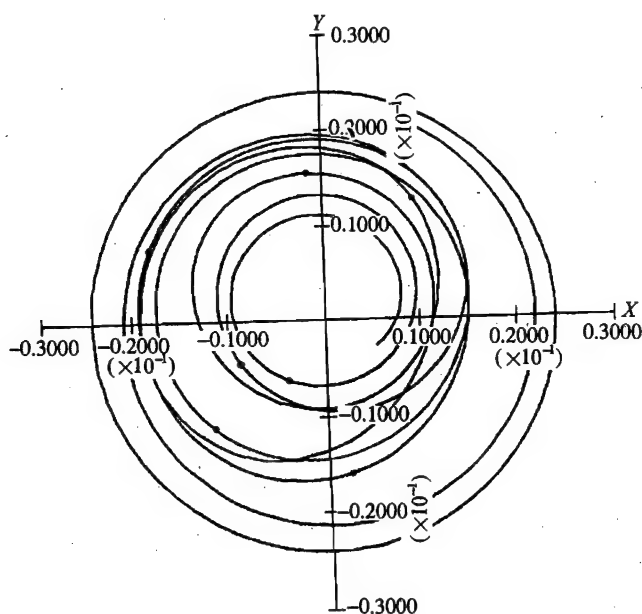


图 4－20 轴间阻尼器处的瞬态响应轨迹

(n_H = 10000 r/min, c = 0.024 cm, UE = 0.3kg·cm)

4.2.4.2 有限元模态综合法算例

计算了图 4－4 所示某燃气发生器转子系统。该系统划分为两个子结构。弹性阻尼支承安置在第 2 个子结构的支承上，其弹性支承的刚度取为 2.5×10^5N/cm；挤压油膜阻尼器的直径

为4.14cm、承载长度为0.9cm。阻尼器无端封，按短轴承理论半油膜解计算油膜力。在第2个子结构第1级盘上突加不平衡量(模拟叶片丢失)。瞬态响应计算时的初始位移和初始速度均取值为零。

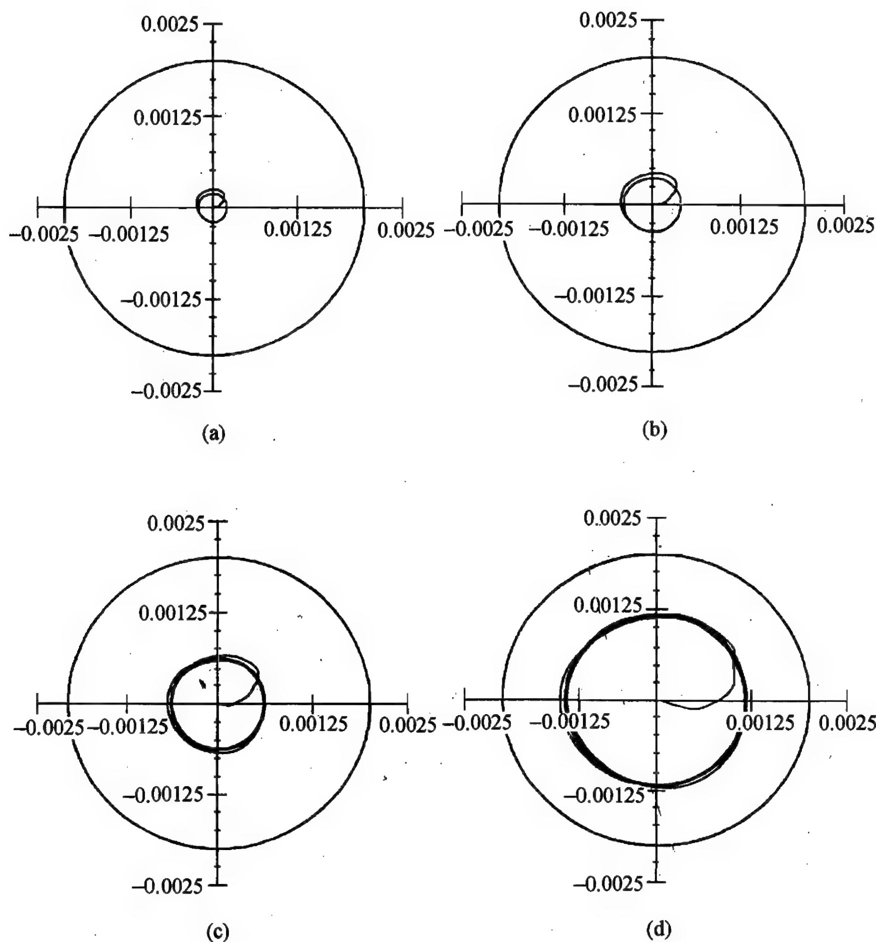


图4－21　瞬态响应轨迹图

(a) $U_a=5.24$ g·cm　(b) $U_b=10.5$ g·cm　(c) $U_c=21.0$ g·cm　(d) $U_d=81.0$ g·cm

$n=24000$ r/min　$c=0.002$ cm

计算了两种转速、三种阻尼器油膜间隙，在四种不同大小的突加不平衡量作用情况下的转子系统的瞬态响应特性。数值积分方法采用四阶 Runge－Kutta 法。典型的计算结果示于图4－21至图4－24。

图4－21与图4－22分别表示在转速 $n=24000$r/min(该转速接近转子系统的一阶临界转速)，阻尼器油膜间隙 $c=0.002$ cm，$c/R\approx0.1\%$ 和 $c=0.005$，$c/R=0.24\%$ 情况时，在四种突加不平衡量($U_a=5.24$ g·cm、$U_b=10.5$ g·cm、$U_c=21.0$ g·cm 和 $U_d=81.0$ g·cm)作用下的瞬态响应轨迹图。由图可以看出，在其他条件相同情况下，对比两种油膜间隙和阻尼器半径之比 $c/R=0.1\%$ 和 $c/R=0.24\%$，挤压油膜阻尼器采用 $c/R=0.1\%$ 时的减振效果和抑制失稳的能力

较好。

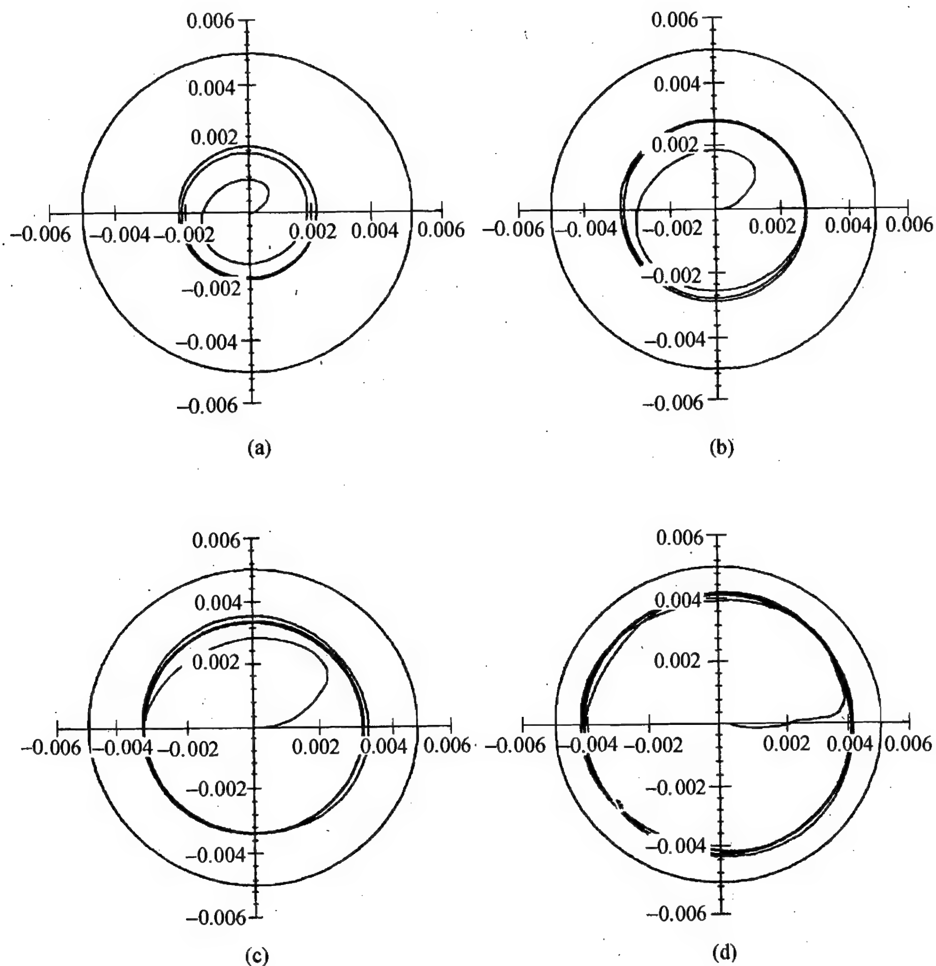


图4-22 瞬态响应轨迹图

(a) $U_a = 5.24\ \text{g·cm}$ (b) $U_b = 10.5\ \text{g·cm}$ (c) $U_c = 21.0\ \text{g·cm}$ (d) $U_d = 81.0\ \text{g·cm}$

$n = 24000\ \text{r/min}$ $c = 0.005\ \text{cm}$

图4-23与图4-24分别表示在转速 $n = 53250\text{r/min}$，阻尼器油膜间隙与半径比 $c/R = 0.1\%$ 和 $c/R = 0.24\%$ 情况时，在前述四种突加不平衡量作用下的瞬态响应轨迹图。

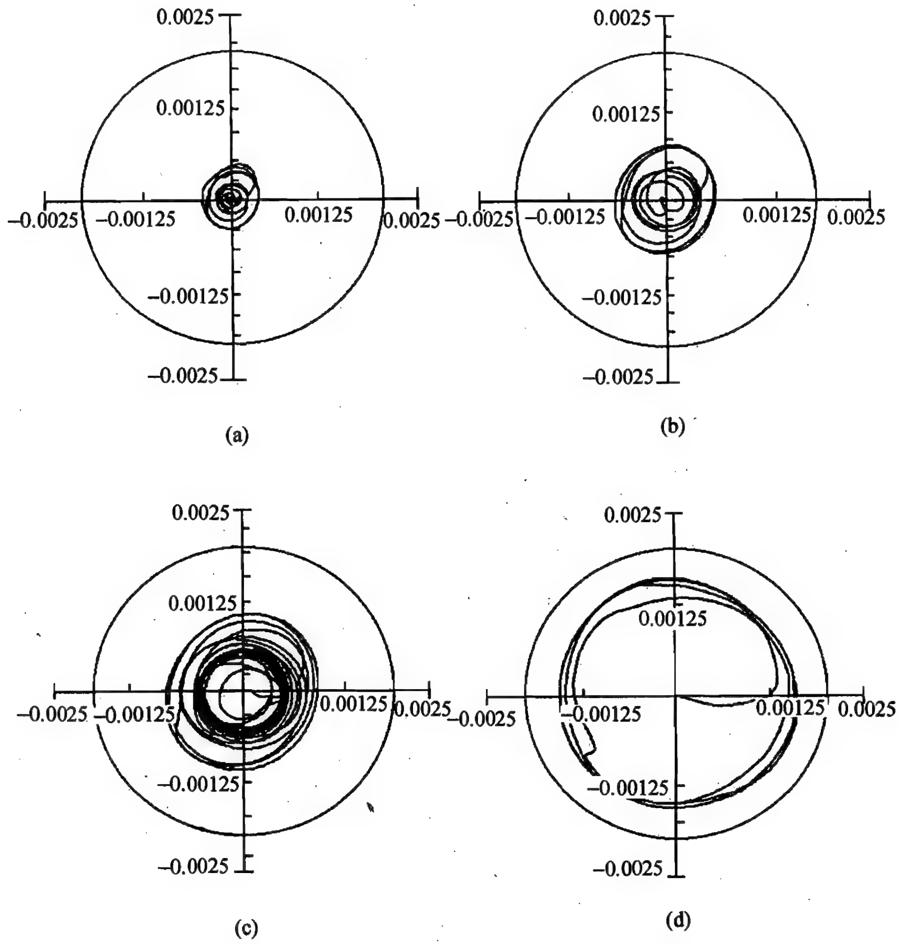


图 4－23　瞬态响应轨迹图

(a) $U_a = 5.24$ g·cm　(b) $U_b = 10.5$ g·cm　(c) $U_c = 21.0$ g·cm　(d) $U_d = 81.0$ g·cm

$n = 53250$ r/min　$c = 0.002$ cm

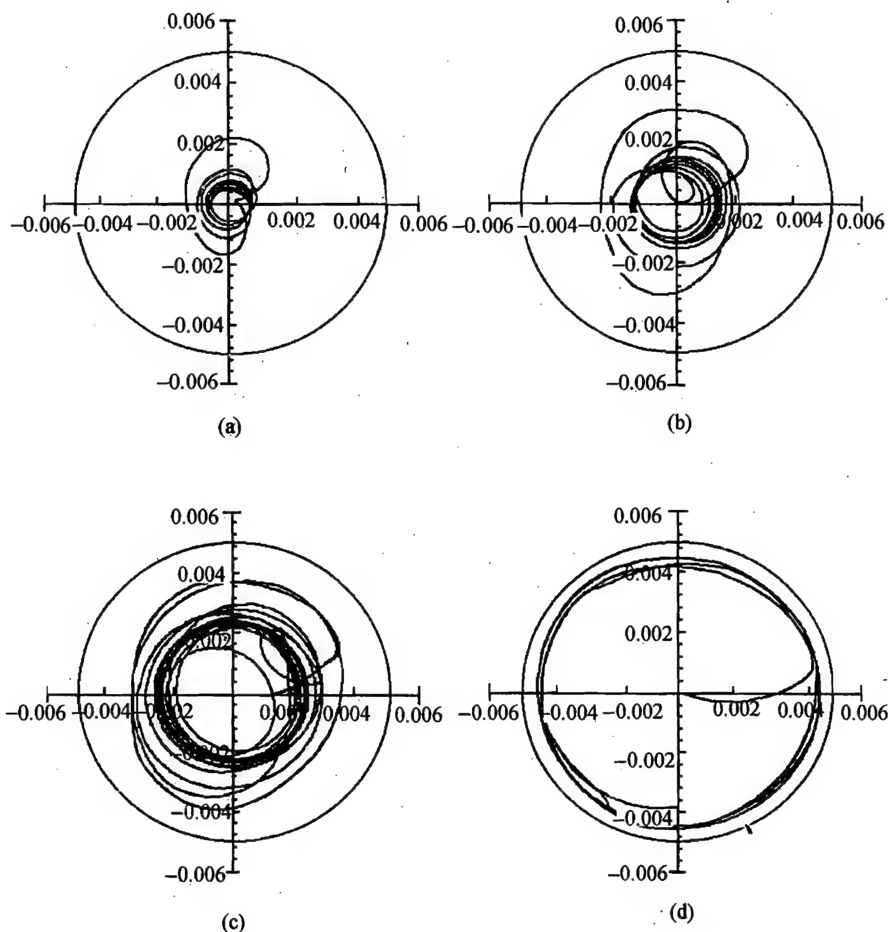


图4-24 瞬态响应轨迹图

(a) $U_a = 5.24$ g·cm (b) $U_b = 10.5$ g·cm (c) $U_c = 21.0$ g·cm (d) $U_d = 81.0$ g·cm

$n = 53250$ r/min $c = 0.005$ cm

4.3 不平衡响应的灵敏度分析

4.3.1 灵敏度分析目的和内容

为了获得转子-支承-机匣系统重量轻和对振动敏感度低的最佳设计,必须仔细分析系统的临界转速和不平衡响应,包括不平衡响应的灵敏度分析。

作为一般概念,对于连续可微多元函数 $Y = Y(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,当自变量产生一增量 ΔX_i 时,应变量相应产生增量 ΔY,其变化率 $\Delta Y/\Delta X_i$ 可用以表征一变量引起另一变量变化的程度。考虑到实际计算、测量、分析、判定的方便,可用下面定义的量作为描述一个参数影响另一个参数的程度:

$$S = \frac{\partial Y/Y}{\partial X/X} \times 100\% \tag{4-130}$$

式中，S 代表灵敏度，即灵敏度定义为应变量的相对变化与自变量的相对变化之比。

燃气涡轮发动机结构设计准则在转子系统设计中提出的要求是："通过评定发动机对转子上不同位置的不平衡响应，确定其对不平衡量的敏感程度。"按此要求并根据灵敏度的定义，可以将发动机转子沿轴向各位置的振动位移响应视为因变量，而将转子系统的不平衡力视为自变量。如果已知作用在转子系统上的不平衡力向量 F(相当于式(4-130)的自变量 X)，通过转子系统运动方程，可以求解得到转子系统沿轴向各位置的振动位移向量 Y_Z(相当于式(4-130)的应变量 Y)。如果增加一单位不平衡力向量 ΔF，则相应的转子系统沿轴向各位置的振动位移有一增量 ΔY_Z。因此，转子上不同位置的不平衡响应灵敏度 S_R 可以表示为

$$S_R = \frac{\Delta Y_Z / Y_Z}{\Delta F / F} \tag{4-131}$$

用增量"Δ"代替偏导数"∂"，是为了避免各个单元所产生的众多偏导矩阵，可大量减少计算机的工作量和存贮量。只要 ΔF 取得足够小，这种替代与一阶灵敏度有很好的近似，而基本上不包含高阶的影响，因而具有很好的准确度。

对发动机转子系统进行不平衡响应的灵敏度分析主要目的在于：

(1)通过评定发动机对转子上不同轴向位置的不平衡响应，确定其对残余和突加不平衡量的灵敏度。并进一步分析确定转子系统是否需加装弹性阻尼支承及加装的位置，以减少对发动机的稳态不平衡响应、叶片飞出突加不平衡响应和喘振响应的敏感程度。

(2)作为转子系统动力学优化设计的一个重要步骤，通过支承刚度对系统临界转速和不平衡响应的灵敏度分析，以正确地选择和调整支承刚度；通过阻尼器对系统不平衡响应的灵敏度分析，以选择最佳的阻尼器布局和阻尼器设计。

转子系统的不平衡响应灵敏度分析可以按以下几种情况进行：

(1)在不同转速或在某特定转速情况下，在转子系统轴向某一位置存在残余不平衡量或突加不平衡量，分析转子沿轴向不同位置的不平衡响应灵敏度；

(2)在不同转速或在某特定转速情况下，在转子系统轴向多个位置存在残余不平衡量或突加不平衡量，分析转子沿轴向不同位置的不平衡响应灵敏度；

(3)根据转子系统动力学优化设计的要求，进行支承刚度或阻尼器的临界转速或不平衡响应的灵敏度分析。

4.3.2　灵敏度分析方法

对于复杂转子-支承系统，转子上不同轴向位置的不平衡响应灵敏度可以用求解稳态响应的方法，或用求解瞬态响应的方法得到。只是在计算稳态或瞬态不平衡响应时，应同时计及作用在转子系统上的初始不平衡力和不平衡力增量，再按式(4-131)的灵敏度概念计算分析灵敏度。

求解稳态响应的方法可采用本章4.1介绍的旋转坐标下的子结构传递矩阵法，或采用模态综合法。求解瞬态响应的方法可采用本章4.2介绍的固定坐标下的子结构传递矩阵-模态综合法，或采用有限元模态综合法。

对于未设置阻尼器支承的转子系统，可按线性系统处理；如设置阻尼器支承，则应按非线性系统处理。由于油膜刚度和油膜阻尼是位移的非线性函数，故不能直接求解稳态不平衡响应，而需迭代求解。灵敏度分析时，只计算一个稳态解的情况，而不计及双稳态响应。进行瞬态响应灵敏度分析时，按初始状态或瞬态过程消失，系统趋于稳定的情况计算，而不计及瞬态

过渡过程,也不计及失稳(出现极限圆)状态。

计算转速不同,转子上不同轴向位置的不平衡响应对残余不平衡量和突加不平衡量的灵敏度不同,这主要取决于转子系统在该转速下呈现的模态。灵敏度分析时,通常选择转子系统工作转速范围的临界转速状态或发动机慢车转速和设计工作转速等重要转速状态。

4.3.3 算 例

以一双转子涡轮风扇发动机为例,计算转子沿轴向几个支承位置的不平衡响应对突加不平衡量的灵敏度。计算模型如图4-25所示。应用子结构传递矩阵-模态综合法计算系统的突加不平衡瞬态响应。由于发动机机匣部分的弯曲振动固有频率远大于发动机转子的最大工作转速和高压、低压转子-支承系统的前几阶弯曲振动固有频率(临界转速),故计算中忽略机匣部分对转子系统振动的耦合作用。将高压和低压转子系统分成三个子结构:风扇和增压级部分作为畸形结构,定为子结构Ⅰ;低压转子部分定为子结构Ⅱ;高压转子部分定为子结构Ⅲ。子结构Ⅰ和Ⅱ,在连接处用线位移和角位移协调条件耦合;子结构Ⅱ和子结构Ⅲ,通过C点处的轴间轴承耦合。

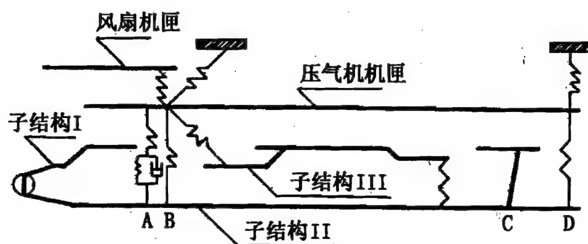


图4-25 双转子涡轮风扇发动机转子-机匣系统简化模型

计算了两种状态:

(1)在高压转子涡轮处突加不平衡,由高压转子激起转子-支承系统一阶临界转速状态,高压转子转速2330 r/min,低压转子转速300 r/min;

(2)在风扇处突加不平衡,由低压转子激起转子-支承系统一阶临界转速状态,高压转子转速11000 r/min,低压转子转速2168 r/min。

初始突加不平衡量取为50 g·cm,突加不平衡增量取为5 g·cm。

在上述状态下,计算了三种情况的灵敏度:

(1)转子系统不装挤压油膜阻尼器时,转子沿轴向4个支承A、B、C、D处不平衡振动位移响应对突加不平衡量的灵敏度;

(2)低压转子前支点A处加装弹性支承和挤压油膜阻尼器时,转子沿轴向4个支承A、B、C、D处不平衡振动位移响应对突加不平衡量的灵敏度;

(3)低压转子前、后支点A、D处均加装弹性支承和挤压油膜阻尼器时,转子沿轴向4个支承A、B、C、D处不平衡振动位移响应对突加不平衡量的灵敏度。

A、D处加装的弹性支承刚度和阻尼器的基本参数均相同。弹性支承刚度为$k_S = 2\times10^8$ N/m;挤压油膜阻尼器的油膜间隙与阻尼器半径之比$c/R = 0.2\%$,阻尼器的承载长度$L = 0.037$ m。

在高压转子涡轮处突加不平衡,由高压转子激起转子系统一阶临界转速时,上述三种情况

的计算结果分别示于表 4 - 1 至表 4 - 3 中。由计算结果可以看出，转子 - 支承系统设置弹性阻尼支承可以明显减少对不平衡响应的敏感程度。转子 - 支承系统 A 处加装弹性阻尼支承时，A、B、C、D 四个支承处的不平衡响应对突加不平衡量的灵敏度分别比不加装弹性阻尼支承时减少约 41.6%、17.1%、11.6%和 12.8%；转子 - 支承系统 A、D 两处加装弹性阻尼支承时，A、B、C、D 四个支承处的不平衡响应对突加不平衡量的灵敏度分别比不加装弹性阻尼支承时减少约为 51.2%、35.5%、45.7%和 45.8%。

表 4 - 1　不加 SFD 时灵敏度分析

对应点	A	B	C	D
灵敏度（%）	40.1	27.5	30.2	33.6

表 4 - 2　低压转子前支点加 SFD 时灵敏度分析

对应点	A	B	C	D
灵敏度（%）	23.4	22.8	26.7	29.3

表 4 - 3　低压转子前、后支点均加 SFD 时灵敏度分析

对应点	A	B	C	D
灵敏度（%）	19.4	17.7	16.4	18.2

4.4　采用有限元子结构模态综合法的动力特性分析程序

4.4.1　DARC 程序功能特点

DARC 程序（Dynamic Analysis of Rotor - case Systems with Curvic Coupling）是分析转子 - 支承 - 机匣系统动力特性的通用程序，除适用于一般常见转子结构外还考虑了加轴向预紧力的端齿连接转子 - 支承 - 机匣系统。DARC 程序根据第 3 章介绍的有限元子结构固定界面模态综合法原理编制而成。子结构（诸如转子、机匣等）分析采用有限元素法，总体结构求解采用模态综合技术。目前配备有解非轴对称问题的复模态综合法（CMS 法）及解轴对称问题的状态空间广义模态综合法（GMS 法）。该程序采用 FORTRAN 语言编制而成，对于 DARC 的微机版本还采用了部分 C 语言。源程序语句约 10000 条，子程序 99 个，可在大中型计算机及微机上运行。

(1) 程序功能

利用该程序，可对：

a. 由离散的叶片、盘、轴承及连续的具有弹性的变截面轴组成的普通转子系统。

b. 由离散的叶片、盘、轴承及连续的具有弹性的变截面轴组成并由加轴向预紧力的端齿相连接的转子系统。

c. 单、多转子系统及单、多机匣系统（包括轴向串联的多转子、多机匣及径向嵌套的多转子、多机匣等复杂结构形式）。

d. 转子 - 支承 - 机匣整机系统。

e. 刚性、弹性、阻尼多支承系统。

f. 带挤压油膜阻尼器的支承系统。

g. 轴对称、非轴对称系统等复杂结构，进行如下计算分析：

ⓐ 轴对称及非轴对称系统进动频率计算；

ⓑ 轴对称及非轴对称系统临界转速计算；

ⓒ 轴对称及非轴对称系统稳定性分析；

ⓓ 轴对称系统(可带挤压油膜阻尼器)及非轴对称系统的稳态不平衡响应计算分析；

ⓔ 轴对称系统(可带挤压油膜阻尼器)及非轴对称系统的瞬态不平衡响应计算分析；

ⓕ 轴对称系统的应变能分布计算分析。

(2) 程序特点

a. 功能较全、具有较大的工程实用价值。利用该程序已对各种简单的、复杂的不同计算模型及十几种发动机型号实际转子-机匣系统进行了计算分析，已成为发动机型号研制中的重要工具和手段。

b. 对内存分配与使用较合理。采用顺序文件传递中间结果，保存数据信息。

c. 在刚度矩阵、阻尼矩阵中引入轴承特性，并可计及轴承的动刚度、动阻尼。

d. 具有前处理功能。

e. 具有后处理功能。计算结果可以全部以表格形式或图形形式输出。这些图形曲线是振型曲线、瞬态轴心轨迹图、稳态不平衡响应曲线、频率随支承刚度及支承阻尼变化曲线等。

f. 对转子配备有普通梁元素、端齿梁元素等，对机匣配备有锥壳元素。对轴对称系统配备有 GMS 算法，对非轴对称系统配备有复模态 CMS 算法。用户可自由选择。

g. 子结构刚度矩阵、质量矩阵、陀螺矩阵采用二维等带宽存储。

4.4.2 DARC 程序元素库及运行环境

(1) 元素库

a. 离散的具有质量和回转惯性的刚性盘元素；

b. 连续的具有分布质量，考虑剪切变形、粘性阻尼、轴向力、陀螺力矩的弹性轴普通梁元素；

c. 变轴力端齿梁元素；

d. 具有弹性和阻尼的支承类元素；

e. 考虑轴向、径向、切向位移及转角的锥壳元素。

(2) 编辑运行环境

在大中型计算机上编辑运行环境为 FORTRAN-77，在微机上运行环境为 NDP-FORTRAN。

程序结构及输入输出信息等其他内容详见参考文献[4]、[5]。

参考文献

[1] 顾家柳等编著.转子动力学.北京:国防工业出版社,1985.

[2] 晏砺堂编著.航空燃气轮机振动和减振.北京:国防工业出版社,1991.

[3] 黄太平.多转子系统振动的子系统分析方法——阻抗耦合法与分振型综合法.南京:振动工程学报 Vol.1,No.3,1988.P.30~40

[4] 欧园霞等.采用有限元-模态综合法的 DARC 程序结构及功能特点.株洲航空动力机械研究所,1995.

[5] 欧园霞等.DARC 程序使用说明书.株洲航空动力机械研究所,1995.

[6] 燃气涡轮发动机结构设计准则的研究——最终报告.1985.

[7] 朱梓根主编.航空涡喷、涡扇发动机设计准则(研究报告)第六册.中国航空工业总公司发动机系统工程

局,1997.
[8] 晏励堂主编.结构系统动力特性分析.北京:北京航空航天大学出版社,1989.
[9] 晏励堂等.高速旋转机械振动.北京:国防工业出版社,1994.
[10] 李其汉等.带多孔环挤压油膜阻尼器刚性转子系统的瞬态动力特性.中国航空科技文献,HJZ930358
[11] 朱志亮.高速转子系统的动力特性分析——有限元模态综合法的应用.北京航空航天大学硕士论文,1995.
[12] 张铁源.复杂转子系统动力特性分析及应用程序开发.北京航空航天大学硕士论文,1996.
[13] Gunter E J. et al. Influence of Acceleration on the Critical Speed of a Jeffcott Rotor. J. of Eng. For Power, Trans. ASME, Jan. 1981.

第5章 弹性支承设计

5.1 概 述

现代航空发动机的工作转速一般均在10000r/min以上，一些小型发动机的工作转速则高达40000～50000r/min。对于这样的高转速发动机，其结构完整性和可靠性问题十分突出，而其转子－支承系统的振动和稳定性常常是问题的症结。我国大、小发动机型号研制和高性能发动机预研的实践表明，由于转子－支承系统引起的发动机整机振动故障已成为研制和预研中碰到的重大技术关键，因此，正确地设计和分析转子－支承系统的动力特性、采取必要的减振措施是至关重要的。

现代航空发动机高速转子系统大都采用“柔轴”设计，使发动机工作转速高于转子系统的临界转速。由单盘转子在临界转速时的挠度 $Y = me\omega_c/c$ 和传递率 $T \approx m\omega_c/c$ 知，该类转子工作在临界转速附近或通过临界转速时，其振幅(Y)正比于不平衡量(me)和转子的临界角速度(ω_c)，反比于阻尼系数(c)；传递率(T)亦正比于转子的临界角速度(ω_c)，反比于阻尼系数(c)。显然，对该类转子系统采取适当措施减小转子的不平衡量、降低临界转速和增大阻尼可以达到减小转子振动的目的。通过改变转子结构(轴的直径、支点距离等)调整临界转速往往十分困难，特别是在发动机总体结构设计已确定的情况下，而最有效和可行的方法是采用弹性支承。事实上，现代航空发动机不少机型均采用了高速精确平衡或本机(现场)平衡、弹性支承和挤压油膜阻尼器等手段或者兼而用之以减小发动机振动。

转子－支承系统采用弹性支承的目的主要在于：

(1) 通过改变弹性支承的刚性，调整和控制临界转速，满足转子系统临界转速设计准则的要求；

(2) 改变转子－机匣系统应变能的分布以符合设计准则的要求；

(3) 利用弹性支承本身的变形及其材料内阻作用，吸收转子－支承系统的振动能量，起到一定的减振作用。

通常，航空发动机转子系统中采用的弹性支承，其刚性相对于转子的刚性是很低的，即所谓低刚性弹性支承，旨在使转子系统的临界转速降低到要求的数值而不削弱转子本身的刚性，且通过临界转速时，转子的振幅和通过轴承座的外传载荷均很小。该类转子系统在工作转速范围内通过低阶(转子两支承之一用弹性支承时系一阶，两支承均为弹性支承时系一、二阶)临界转速时，变形主要发生在弹性支承上，而转轴基本上不发生弯曲变形，乃至其变形可以忽略不计。此种临界转速称为刚体振型临界转速(一阶为平动型、二阶为俯仰型)。作为满足转子系统临界转速设计准则的主要措施，是通过改变弹性支承刚性使转子弯曲临界转速调整到最大工作转速以上，刚体型临界转速置于慢车转速以下或在慢车转速到工作转速的过渡转速范围，转速调整的安全裕度不小于 ±20%。

转子系统采用弹性支承，支承的变形及其材料的内阻作用(转子系统在正同步进动情况下，转轴无材料内阻作用，而支承的应变是交变的，会产生内阻)对转子系统能起到一定减振作

用。然而，对于低刚性弹性支承设计，也会带来一些副作用，诸如在转子重力和飞机机动飞行时的惯性力和陀螺力矩作用下，支承处可能发生较大变形而导致发动机转静件（篦齿封严装置、叶片与机匣等）碰摩故障，弹性支承本身可能超过承载极限而产生疲劳损伤。因此，采用低刚性弹性支承时还需采取措施限制弹性支承的变形。最简单的方式是设置限幅环。现代航空发动机应用最广泛的是弹性支承和挤压油膜阻尼器并用。弹性支承主要用以调整转子系统的临界转速；阻尼器主要用以减振，同时可减小并限制弹性支承的变形，保证其工作可靠性。

5.2　弹性支承的结构类型

图 5－1 示出几种早期发动机采用的弹性支承结构外形图，其结构类型有笼条式和弹性（钢）环式两类，笼条式又分鼠笼式和拉杆式两种。图中，A 为弹性环式，B、C、D、E、G、H、I 为鼠笼式，F 为拉杆式。

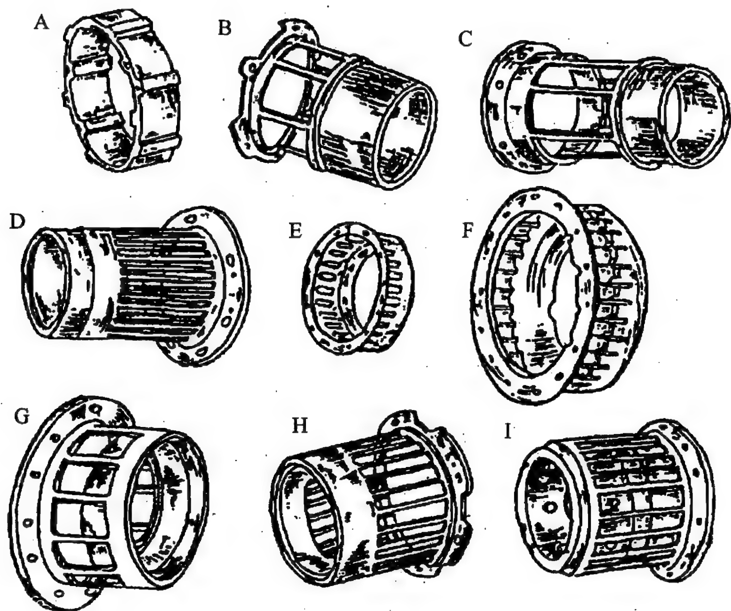


图 5－1　弹性支承结构外形图

A—АИ20 弹性支承；B—T72 弹性支承；C—T65 弹性支承；
D—J69 中弹性支承；E—斯贝高压涡轮弹性支承；
F—斯贝低压涡轮弹性支承；G—J100 前弹性支承；
H—J100 中弹性支承；I—J100 后弹性支承

5.2.1　笼条式弹性支承

此类弹性支承属悬臂式结构，一端有安装边固定于机匣轴承座上，另一端悬伸，其内部装置轴承以支承转子。

图 5－2 所示为 J69 发动机离心压气机前轴承采用的典型的鼠笼式弹性支承，其鼠笼套筒由铬钼合金钢制成，其上铣有 48 根笼条。在支承右端机匣内装有钢制圆环，该圆环与弹性支承间留有 0.2～0.25mm 的直径间隙，其间通滑油，起挤压油膜阻尼器作用，并对弹性支承起减

幅和限幅作用。弹性支承的刚性可通过改变笼条的数目、长度、宽度和厚度进行调整。鼠笼弹性支承的笼条大多在其套筒上铣加工而成，其笼条间的转接圆弧一般较小而可能产生较大的应力集中。设计时，应尽可能加大其圆弧半径并严格加工质量，以提高弹性支承的疲劳强度。

图5－3所示为J100发动机涡轮后轴承用的弹性支承。为了缩小发动机的长度，同时保证鼠笼条有足够的长度以形成低刚性支承，该弹性支承采用了双层套筒结构，其外套筒上铣出槽以形成鼠笼条，内套筒为一刚性较好的短套筒以安装轴承，内、外套筒分别加工后组合在一起，在其端部焊接而形成一个整体件。

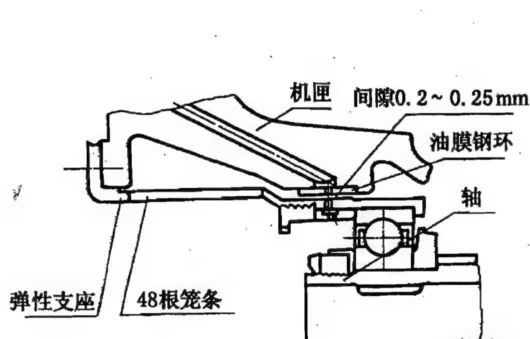


图5－2　J69发动机离心压气机前支点弹性支承

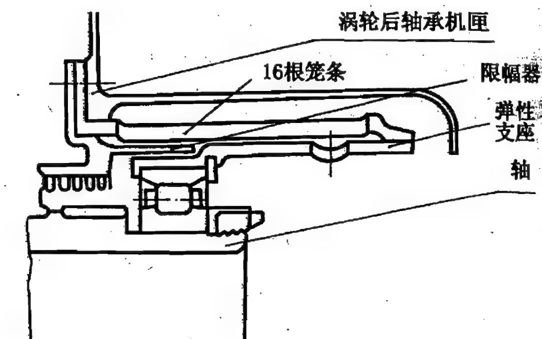


图5－3　J100发动机涡轮后支点弹性支承

图5－4示出斯贝发动机低压涡轮后轴承采用的典型的拉杆式弹性支承。其结构做成后端(右端)有一向内翻边的安装边，用以安装轴承；轴承的外环加长并带前、后安装边，其后安装边与支座的右侧安装边用螺钉连接，其前安装边用以固定封严件；支座的前安装边(左端)向外翻用以与机匣相连。在两个安装边之间均布有30根直径为3mm、长度为32.6mm的钢杆，杆两端分别插入弹性支承前、后安装边的孔内，并用钎焊焊接成一体。在滚棒轴承的外端设有限幅环。

为使采用弹性支承后不增加发动机的长度，在80年代发展的一些发动机中，广泛地采用了折返式的拉杆弹性支承。采用此种支承形式时，固定轴承的机匣(也即弹性支承安装边处)与轴承基本在同一轴向位置上。图5－5示出了V2500发动机高压压气机前支点采用的弹性支承示意图。这是一种典型的折返式结构，其弹性支承由向后伸的承力锥体5、多根长螺杆4与安装轴承的轴承座3组成。螺杆4在后端插焊于承力锥体中，前端用螺帽与轴承座3连接在一起，组成一整体的弹性支承。其承力锥体的前安装边固定于机匣上，机匣的内圈作为限幅环，中间通以滑油形成挤压油膜阻尼器，两端带端封。类似的结构已用于PW2037、PW4000、F100－PW－229等发动机中。该种折返式弹性支承不会增加发动机长度，特别便于对已投入使用的发动机在改型时增装弹性支承。PW2037发动机风扇后的滚珠轴承，在设计时采用了通常的刚性支承，长时间使用后发现低压转子的振动增大，希望采用带弹性支承的挤压油膜阻尼器。改型时，考虑到发动机各部件、组件沿轴线方向的位置不便改动，采用了折返拉杆式弹性支承，就较容易地实现了结构修改。

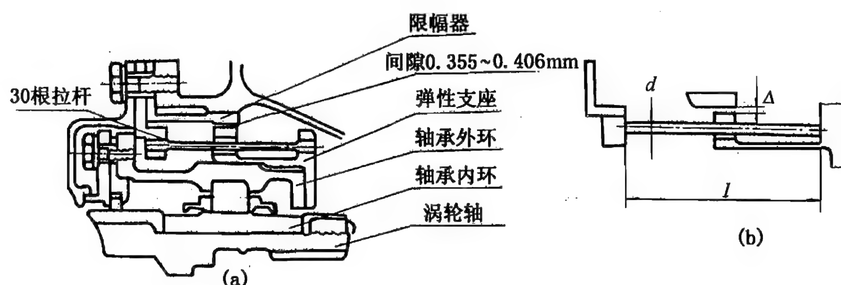


图5-4 斯贝发动机低压涡轮后支点弹性支承

发动机采用笼条式弹性支承，一般均需设置限幅环限制支承的变形。大多数发动机都在限幅环与支承间的间隙内通以滑油，形成挤压油膜阻尼器，即弹性支承与阻尼器并联使用。弹性支承主要用于调整转子-支承系统的刚性，从而调整系统的临界转速，挤压油膜阻尼器主要用于减小转子系统本身和通过支座外传的振动。由现有资料看，除R·R公司研制的斯贝发动机和Tay发动机中采用的弹性支承没有加挤压油膜阻尼器外，其他一些发动机和燃气发生器，如J69、J100、PW2037、PW4000、V2500、GE90、T65、T72等发动机和TM333、T700、TM319等燃气发生器的转子系统中均采用了带挤压油膜的弹性支承。

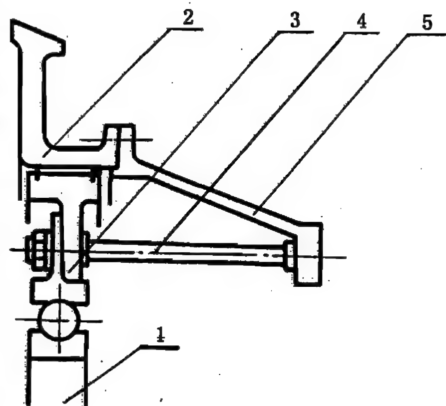


图5-5 V2500发动机高压压气机前支点弹性支承

1—轴承；2—机匣；3—轴承座；4—螺杆；5—承力锥体

5.2.2 弹性环式弹性支承

弹性环式弹性支承属径向式，由一个或多个弹性环构成。单环式的环内圆面有沿圆周均布的若干个径向向内的凸台，用以支承轴承外环；环外圆面有数目相同、沿圆周均布，但位置与环内圆面凸台错开的凸台，用以支承于机匣或支座的内壁上。

图5-6所示为早期的Viper(威派尔)发动机后支点所用的弹性环式弹性支承。环外部有A、B、C、D四个凸台，支于机匣上钢套的内孔壁，环内面有I、J、K、L四个凸台用以支承轴承外环，内、外凸台周向位置错开。环外部另有与环内圆面凸台周向位置相同的四个凸台E、F、G、H，用作限幅，其凸台的外表面与机匣钢套内孔壁有0.36~0.41mm的间隙。前苏联制АИ20发动机和国产WJ5发动机压气机的前支点也采用了单环式弹性支承，其环内、外各有6个凸台，周向位置错开。设计时，通过改变弹性环的厚度和内、外凸台的数目改变弹性支

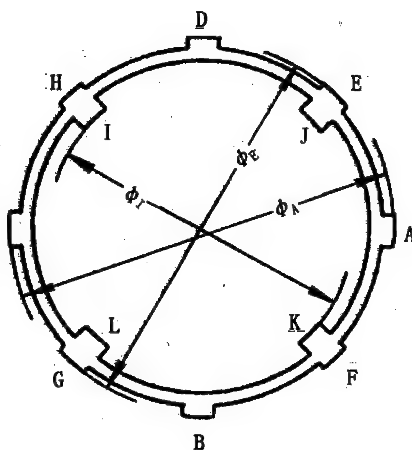


图5-6 Viper发动机后支点弹性支承

$\phi_A = 107.54^{-0.025}$ $\phi_E = 106.71^{-0.025}$ $\phi_I \cong 101.6$

承的刚性，从而调整转子-支承系统的临界转速。

多环式弹性支承除环的内、外圆面有若干凸台外，每两环之间均有相同数目且沿圆周均布的几个凸台将两环隔开，使每个环都成为弹性环，相邻两环上的凸台其周向位置是错开的。图5-7示出两种多环式弹性支承。图5-7(a)所示的是各环用机械加工方法形成凹槽和凸台，图5-7(b)所示的是用焊接法在薄环上焊上一些凸台。目前多采用线切割加工，可避免薄环加工中产生变形并保证弹性环的精度要求。

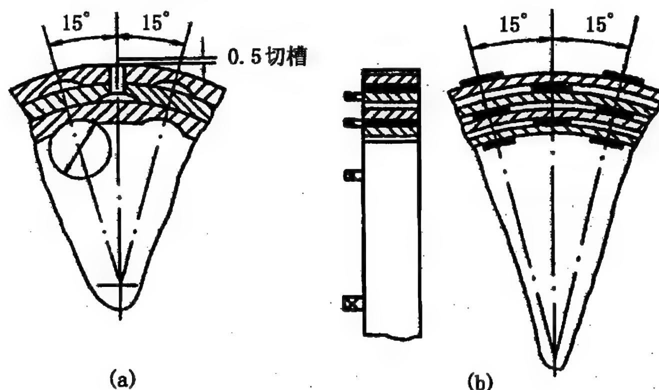


图5-7　多环式弹性支承结构示意图

早期发动机，如Viper、АИ20等采用的弹性环式弹性支承，在弹性环内、外圆凸台分别与轴承外环和机匣或支座接触面形成的间隙内，一般仅引入少量滑油起润滑作用，而未专门设置油路并供油。因此，该种弹性支承主要起调整转子-支承系统临界转速作用。同时，弹性环的变形和材料的内阻也可起到一定减振作用。现代较先进的俄式发动机，如РД33、АЛ31Ф等，则专门设置油路，给弹性环供给充分的滑油，弹性环内、外凸台将整个圆周分隔成几个分段的油膜区，参见图5-8。由于转子在不平衡力作用下的进动作用而对油膜形成挤压，产生周向剪切流动，从而产生油膜阻尼。其油膜压力的大小和分布既取决于流体动压作用，又取决于弹性环的变形，是复杂的流-固耦合作用的结果。该种结构称为弹性环式挤压油膜阻尼器。通过改变弹性环的刚性调整转子-支承系统的临界转速；通过油膜挤压和弹性环变形的耦合作用产生油膜阻尼以减小转子系统本身和通过支座外传的振动。

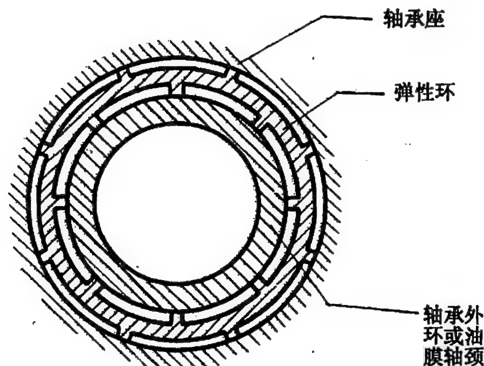


图5-8　弹性环式挤压油膜阻尼器

5.3 带弹性支承转子的临界转速特性

对于相同的转子系统,支点采用弹性支承时,其临界转速比采用刚性支承时要低。转子系统两端支点都用弹性支承比一端支点用弹性支承的临界转速要低得更多。支承刚性越低,转子系统的临界转速也越低。通过改变支承刚性调整转子系统的临界转速是最有效和可行的措施。

一个等截面轴(无盘转子),如果其一端支于刚性铰支点,另一端支于低刚性弹性支承上。在极端情况下,弹性支承的刚性为零时,轴的一阶临界转速为零,二阶是轴的弯曲临界转速,为两端刚性铰支时一阶弯曲临界转速的1.56倍。当弹性支承刚度提高时,一、二阶临界转速都有所提高。由此可知,一个两端刚性铰支的等截面轴,如将一个支点改用低刚性弹性支承,就可将振动较大、比较危险的弯曲临界转速(用一个弹性支承后的第二阶临界转速)提高到原两端刚性铰支轴弯曲临界转速(第一阶)的1.56倍以上。

该等截面轴,如果两端均用低刚性弹性支承,在极端情况下,弹性支承刚性均为零时,其第一、二两阶临界转速均等于零,第三阶临界转速是轴的弯曲临界转速,为两端刚性铰支轴一阶临界转速的2.27倍。弹性支承刚性提高时,其各阶临界转速都有程度不同的提高。所以,两端用低刚性弹性支承的等截面轴,其振动较小的一、二阶临界转速均较两端刚支时的一阶弯曲临界转速低很多,而其振动大的第三阶弯曲临界转速则为两端刚支的一阶弯曲临界转速的2.27倍。图5-9示出带低刚性弹性支承的双支点跨梁式等截面轴旋转时振幅随转速的变化曲线。由图可以看出,带弹性支承和两端刚性支承时轴的临界转速的变化关系。图5-10示出带低刚性弹性支承双支点跨梁式等截面轴在临界转速时的弹性线示意图。由图可以看出,采用低刚性弹性支承的轴在低阶临界转速时,轴本身基本上不发生弯曲变形,而变形主要发生在弹性支承上。

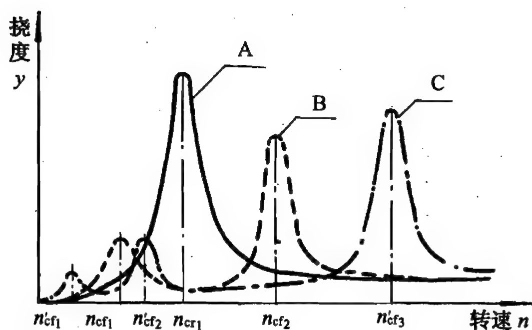


图5-9 带低刚性弹性支承转子的幅频特性

A—带刚性支承;B—带一个低刚性弹性支承;

C—带两个低刚性弹性支承

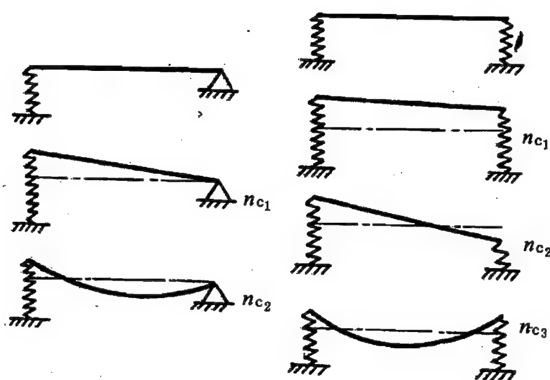


图5-10 带低刚性弹性支承转子的弹性线

实际上,对于常用的各种非等截面轴的转子,采用低刚性弹性支承与采用刚性铰支相比其临界转速和弹性线的变化关系也有上述类似性质,只是临界转速具体变化的倍数关系(1.56倍或2.27倍)会随着具体结构不同而不同。应特别注意的是,支承刚性的改变对转子各阶临

界转速的影响大小是不同的，它与转子和支承系统的具体结构密切相关。因此，当采用减小支承刚性的方法调整转子系统的临界转速时，要注意到几阶临界转速。应按照转子系统临界转速设计准则的要求，对转子－支承系统进行以调整临界转速为目的的支承刚度优化设计。还需指出，转子系统支点的总柔度是由轴承、弹性支承和安装弹性支承的轴承座、机匣的辐板及安装节等的柔度综合。对串联结构，支点总柔度是各部分的柔度之和。在选定弹性支承刚度时应将轴承、辐板和机匣系统等的柔度考虑在内。

弹性支承刚度的大小对转子系统通过临界转速时的挠度和外传力有显著影响。理论分析和实验结果均表明，弹性支承刚度越低，通过临界转速时转子的挠度越小、外传力也越小，但弹性支承本身的变形和应力越大，这种关系示于图 5－11。因此，从减小临界转速时转子的振幅和外传振动着眼，弹性支承的刚度应越低越好，但却带来了弹性支承的强度和寿命问题。设计弹性支承时还应妥善解决转子减振和弹性支承本身强度和寿命这一对矛盾。可采取诸如弹性支承刚度不要选得太小；从弹性支承结构、工艺和选材上提高弹性支承的疲劳强度；采用限幅环或弹性支承与挤压油膜阻尼器并联使用以限制弹性支承的变形等措施予以解决。

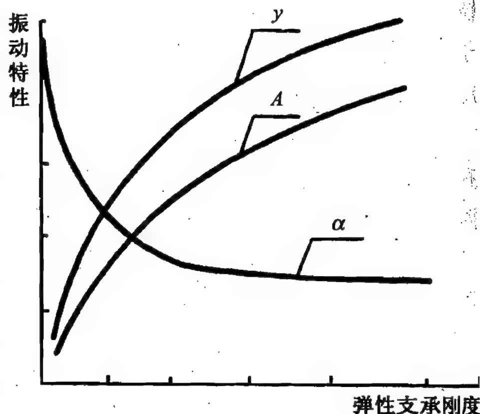


图 5－11 带低刚性弹性支承转子的动力特性

y—转子挠度；A—支承振幅；

σ—弹性支承应力

5.4 弹性支承的刚度和强度

在转子系统正常工作情况下，弹性支承承受转子的重力和不平衡力。前者方向恒向下，对弹性支承产生静载作用；后者与转子同步旋转，对弹性支承产生动(交变)载荷作用。弹性支承的刚度设计主要应满足转子－支承系统临界转速设计准则的要求。需要指出的是，应了解弹性支承本身的各阶模态和固有频率，避免弹性支承工作时发生共振(该种共振区别于转子系统各阶临界转速)。弹性支承的强度设计应满足在一定静载(除重力作用外，还应考虑飞机作机动飞行时，作用在支承上的惯性力和陀螺力矩)上叠加动载荷的强度要求，即满足疲劳强度设计要求。同时，弹性支承的变形还应满足转子－支承－机匣系统间隙设计的要求。

下面分别介绍拉杆式弹性支承、鼠笼式弹性支承和弹性环式弹性支承的刚度和强度计算方法。

5.4.1 拉杆式弹性支承

由于拉杆的刚性远较与拉杆两端分别相连的环的刚性小，故可认为两端的环是刚性的。靠安装边的一端拉杆与环固接，既不能发生线位移也不能转动；另一端的连接环是自由的，里面装有轴承，环可以发生线位移，但在径向力作用下不发生角位移。计算弹性支承刚度时可以假定拉杆一端固接，另一端仅能作径向位移而不能转动，如图 5－12 所示。这相当于悬臂杆自由端有力 F 和弯矩 M 作用，而端处仅有线位移无角位移。

因拉杆的截面是圆形的，故沿周向刚性一致。当轴承上传递径向力 F 时，各杆受力均相

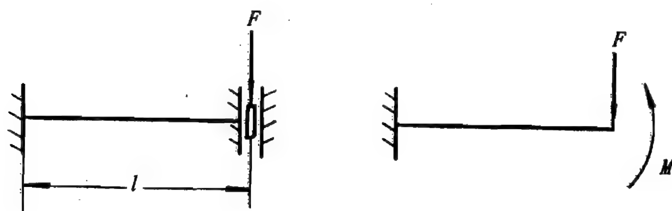


图5-12 拉杆式弹性支承受力模型

同,即为 F/Z,Z 为拉杆数。

根据上述假设条件,可方便地求出带有等圆截面拉杆的弹性支承的柔度系数 δ 和刚度系数 k 分别为

$$\delta = \frac{16l^3}{3Z\pi Ed^4} \tag{5-1}$$

$$k = \frac{3Z\pi Ed^4}{16l^3} \tag{5-2}$$

式中:Z——拉杆根数;

E——拉杆材料的弹性模数;

d——拉杆的直径;

l——拉杆的长度。

弹性支承自由端的径向位移(即挠度)Y 为

$$Y = \frac{16Fl^3}{3Z\pi Ed^4} \tag{5-3}$$

与安装边固接端的拉杆应力最大,其值 σ 为

$$\sigma = \frac{3Ed}{l^2}Y \tag{5-4}$$

5.4.2 鼠笼式弹性支承

鼠笼式弹性支承与拉杆式的不同之点仅在于笼条的截面不是圆形而接近于矩形。笼条的径向刚性和周向刚性不等。因此,在轴承传递的径向力 F 作用下,各笼条分配的载荷也不同。至于笼条两端的边界条件则认为与拉杆式相同,如图5-13所示。

取位于 φ 角处的任一笼条进行分析。当该笼条一端受到 F 力分配来的力 F_φ 时,因该端不能转动,这就相当于该端为自由端而附加了一弯矩,其值为

$$M_\varphi = \frac{F_\varphi l}{2} \tag{5-5}$$

求出笼条该端的位移为

$$Y = \frac{F_\varphi l^3}{12EJ} \tag{5-6}$$

因为此处笼条是长方形截面,力的方向不是截面的主轴方向,而应该按主轴方向计算分位移。按径向和周向计算笼条的位移分别为

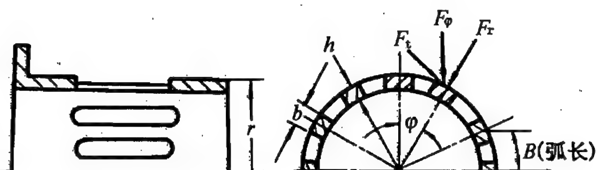


图5-13 鼠笼式弹性支承受力模型

$$径向位移\ Y_r = Y\cos\varphi,载荷\ F_r = F_\varphi\cos\varphi$$

$$周向位移\ Y_t = Y\sin\varphi,载荷\ F_t = F_\varphi\sin\varphi \tag{5-7}$$

径向和周向的截面惯性矩分别为

$$J_r = \frac{bh^3}{12} \qquad J_t = \frac{hb^3}{12} \tag{5-8}$$

所以,笼条在受力方向的总位移为

$$Y = Y_t\sin\varphi + Y_r\cos\varphi = \frac{F_\varphi l^3}{E}\left[\frac{\cos^2\varphi}{h^3 b} + \frac{\sin^2\varphi}{hb^3}\right] \tag{5-9}$$

在笼条 dφ 微元段上作用的力为 df,则

$$\mathrm{d}f = F_\varphi\frac{r\mathrm{d}\varphi}{B} \tag{5-10}$$

式中:r——套筒半径;

B——两笼条间的弧长。

由式(5-9)求出 F_φ 代入式(5-10)得

$$\mathrm{d}f = E\frac{b^3h^3}{l^3B}rY\frac{\mathrm{d}\varphi}{b^2\cos^2\varphi + h^2\sin^2\varphi} \tag{5-11}$$

因

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\varphi}{b^2\cos^2\varphi + h^2\sin^2\varphi} = \frac{2}{bh}(\pi + i2\pi) \qquad (i\ 为\ 0\ 和正数)$$

取 $i=0$ 得

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\varphi}{b^2\cos^2\varphi + h^2\sin^2\varphi} = \frac{2\pi}{bh} \tag{5-12}$$

整个弹性支承上作用的总力 F 为

$$F = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}f = \frac{2\pi rb^2h^2YE}{l^3B} \tag{5-13}$$

则整个弹性支承的刚度系数为

$$k = \frac{F}{Y} = \frac{2\pi rb^2h^2E}{l^3B} \tag{5-14}$$

因

$$z = \frac{2\pi r}{B}$$

故

$$k = \frac{zEb^2h^2}{l^3} \tag{5-15}$$

鼠笼式弹性支承笼条上载荷分配不同,截面惯性矩各向不同,所以当支承受有垂直方向载荷 F 时,笼条应力大小各不相同。位于 φ 角处笼条的应力为

$$\sigma_\varphi = \frac{M_\varphi}{W_\varphi} \tag{5-16}$$

由式(5-5)和式(5-6)知

$$M_\varphi = \frac{F_\varphi l}{2} \qquad F_\varphi = \frac{12EJ_\varphi Y}{l^3}$$

式中，J_φ 为绕垂直于 F_φ 方向的轴的惯性矩。
可以得到

$$\sigma_\varphi = \frac{6EY}{l^2}\frac{J_\varphi}{W_\varphi} \tag{5-17}$$

式中，J_φ/W_φ 的大小与笼条的方位有关。就上下方和左右两侧笼条的 J_φ/W_φ 值比较，可知

上下方笼条　　$J_\varphi/W_\varphi = h/2$

左右方笼条　　$J_\varphi/W_\varphi = b/2$

通常 $b > h$，故，一般情况下两侧笼条的应力最大，其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{3Eb}{l^2}Y \tag{5-18}$$

用上述鼠笼式弹性支承刚度计算式(5－15)计算了图 5－14 所示的多种不同刚度的鼠笼式弹性支承并与实验值比较(结果见表 5－1)。可以看出，当支承刚度很低时，计算值与实验值很接近；当支承刚度较高时，计算值偏高，支承刚度越高，计算值偏高越多。这是因为支承刚度高时，笼条为柔性，而其两端的套筒为绝对刚性的假设趋于不合理而会带来较大的误差。对于实际发动机采用的鼠笼式弹性支承，可根据具体结构，计算时予以修正。

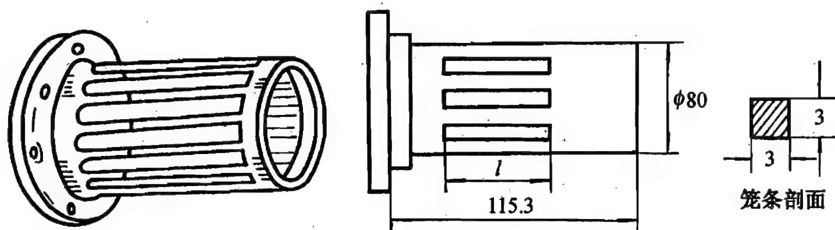


图 5－14　鼠笼式弹性支承刚度计算与实验示例

表 5－1　鼠笼式弹性支承刚度值

编　　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
笼条长度 (mm)	35	50	55	55	65	75	72.5	72.5	72.5
笼条数	24	24	24	16	16	12	6	4	3
计算值 ($\times 10^3$ N/m)	9720	3264	2450	1638	993	484	268	179	134
实验值 ($\times 10^3$N/m)	6555	2480	1824	1376	820	518	275	172	136

5.4.3　弹性环式弹性支承

弹性环式弹性支承的刚度计算可参阅本册第 2 章 2.9.3。

知道了弹性环的受力和柔度(刚度)，即可求得其应力大小。当 F 力正对环段中央截面时，该环段受力最大，其端部应力也最大。可导得(有关符号说明见 2.9.3)：

$$F_0 = F\left[1 - 2\frac{\delta}{\delta_0}\sum_{i=1}^{\frac{m}{4}-1}\cos^2 i\alpha\right] \tag{5-19}$$

环段端部截面的应力最大，由材料力学知

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{F_0 l}{8W} \tag{5-20}$$

式中，W 为环段截面的断面系数。

如环的厚度为 h、宽为 b，环段长为 l，则

$$W = bh^2/6$$

环段端部的最大应力

$$\sigma = \frac{3lF}{4bh^2}\left[1 - 2\frac{\delta}{\delta_0}\sum_{i=1}^{\frac{m}{4}-1}\cos^2 i\alpha\right] \tag{5-21}$$

5.5 弹性支承的变形限制和变刚度弹性支承

5.5.1 弹性支承的变形限制

航空发动机转子－支承系统采用弹性支承，除了要保证正常情况下通过临界转速时发动机振动小和支承本身强度足够外，还要考虑到飞机作机动飞行时转子上可能出现的大的惯性力和陀螺力矩。这种载荷作用在支承上可能超出弹性支承的承载极限造成弹性支承的损坏，或者使转子发生过大的位移，从而导致转静件碰摩故障。为此，必须采取措施限制弹性支承的变形。

限制弹性支承变形最简单的方法就是设置限幅环。图5－4示出的斯贝低压涡轮后支点即采用了拉杆式弹性支承带限幅环的结构。限幅环与支承间的间隙选取是很关键的。其选取原则是既要保证弹性支承有足够的强度(间隙不能太大)，又要保证在正常情况下转子系统通过临界转速时，限幅环不起作用(间隙不要太小)。前一要求可根据支承允许的应力加上适当强度储备和给定的转静件间隙来满足；后一要求主要取决于通过临界转速时支承的径向位移，而它与支承刚度、阻尼和转子的实际不平衡量有关，可以通过实验或计算来估计。限幅环结构设计时，还应特别注意保证限幅环与弹性支承间的间隙沿圆周均匀。通常将限幅环与弹性支承设计成在弹性支承受到转子重力作用时两者同心，而在发动机装配时两者是不同心的。这一点对于重量较大的转子尤为重要。

现代不少航空发动机采用了笼条式弹性支承和挤压油膜阻尼器并联方式，弹性支承通常作为阻尼器的轴颈。挤压油膜阻尼器的间隙按照同心型挤压油膜阻尼器的减振机理和要求来设计，通常控制其工作时的偏心率 $\varepsilon = e/c < 0.4$。此时，弹性支承自由端的位移即为 $e < 0.4c$，极端情况下，弹性支承的最大位移为阻尼器油膜半径间隙 c。在此情况下，应保证弹性支承有足够的强度而不致疲劳断裂。同样，在同心型挤压油膜阻尼器结构设计时，应设计成阻尼器外环和弹性支承轴颈在重力作用下保持同心，以保证转子系统工作时，阻尼器油膜间隙沿圆周均匀。

5.5.2　变刚度弹性支承

转子系统采用弹性支承和限幅环结构，如果限制的间隙选取过小或间隙沿周向不均，局部过小，则转子系统在正常工作过程中，特别是通过临界转速振幅较大时，就可能出现弹性支承与限幅环相接触，使转子系统的支承刚度发生变化，从而使转子系统变为非线性刚度系统。以一单盘跨梁式转子，一端支点采用弹性支承和限幅环，另一端采用刚性铰支结构为例进行定性分析。

设弹性支承与限幅环间的间隙为 r_1，两者不接触和接触时的支承刚度分别为 k_1 和 k_2 ($k_1 < k_2$)，其转子系统小阻尼时中央轮盘处的幅频特性如图5－15所示。图 5－15(a)是转子支承刚度分别为 k_1 和 k_2 时的幅频曲线，支承刚度 k_1 和 k_2 对应的转子系统的临界转速分别为 n_{cf}和 n_{cr}。转子系统由零转速稳态升速时，其挠度曲线按支承刚度 k_1 对应的幅频特性变化。如转轴中心处挠度达到 r_1 时，弹性支承与限幅环接触，则支承刚度会由 k_1 跃变到 k_2。由于变刚度支承的非线性，转子系统的幅频特性即呈现出典型的硬特性非线性性质(向右的“指状”曲线)，如图 5－15(b)所示。

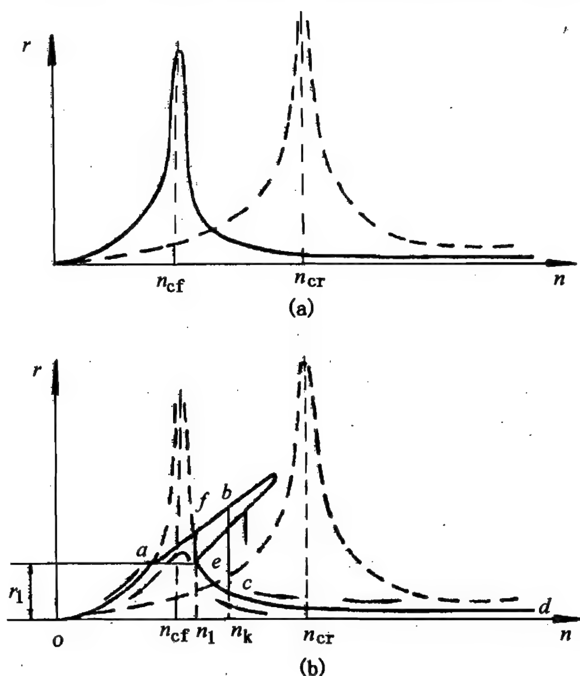


图 5－15　带变刚度弹性支承转子的幅频特性(之一)

转子由低转速稳态地增至高转速，各转速下转子的挠度按实线 *oafbcd* 规律变化，出现了所谓双稳态现象。在转速为 n_k 时，转子挠度由 b 点跳跃至 c 点，跳跃前后转子质心转向。转子由高转速稳态减速时，其挠度按 *dcefao* 变化，转速为 n_1 时，转子挠度由 e 点跳跃至 f 点。升速、减速时转子质心转向对应的跳跃转速 n_k 和 n_1 的大小主要与转子－支承系统的阻尼、不平衡量，以及加、减速度等因素有关。

如果转子系统升速过程支承刚度的变化仍由 k_1 变到 k_2，但 $k_1 > k_2$，则转子系统小阻尼时的幅频特性如图 5－16 所示。此种情况下，转子系统的幅频特性由于变刚度支承的非线性而呈现出典型的软特性非线性性质(向左的“指状”曲线)。

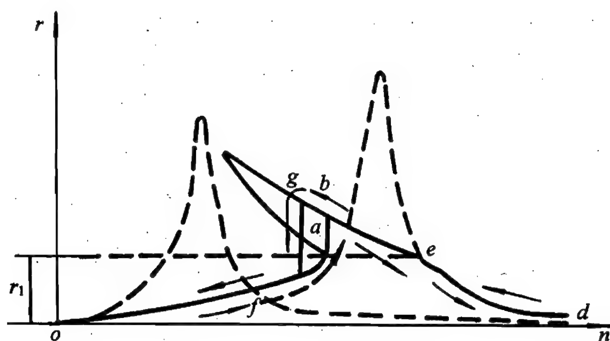


图 5－16　带变刚度弹性支承转子的幅频特性(之二)

由上述定性分析说明，如果弹性支承与限幅环间的间隙取得过小，则转子

系统在正常工作情况下通过刚体振型临界转速时，弹性支承即可能与限幅环接触，支承刚度由 k_1 变到 $k_2(k_1 < k_2)$，导致转子系统呈现上述特殊的非线性幅频特性。此时，转子系统可能在较大范围内挠度很大乃至无法通过临界转速，或者在一定转速下出现双稳态以及由于系统非线性引起的亚谐波和超谐波等非线性振动。因此，在带弹性支承和限幅环的转子系统设计时，应力求避免在正常工作情况下出现变刚度支承非线性引起系统非线性振动的可能性。

当然，从设计上采取主动控制的措施，也可以利用变刚度支承的非线性特性，控制转子系统的振动，如图 5－17 所示。理想的情况是，转子系统升速过程中，在转速 $n < n_s$ 时采用支承刚度 k_2，在 $n > n_s$ 时采用支承刚度 $k_1(k_2 > k_1)$，而在 $n = n_s$ 时既可用 k_1 支承，也可用 k_2 支承。这种情况下，理想的转子系统稳态幅频特性如图 5－17 所示带 * 号的响应曲线变化。此时，转子系统成为“无临界”转子，其振幅和外传振动都得到了最佳控制。

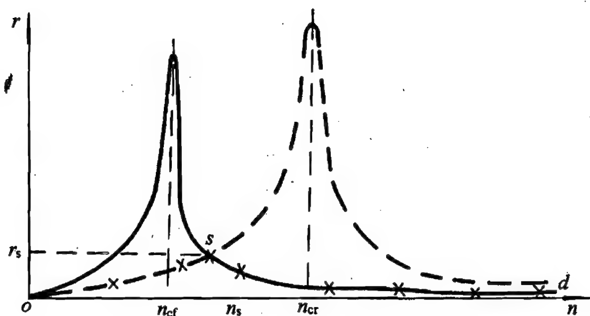


图 5－17　带变刚度弹性支承转子幅频特性的控制

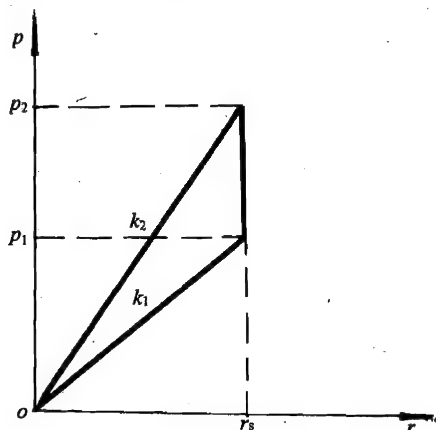


图 5－18　变刚度弹性支承载荷与变形关系

然而，要实现这样的变刚度支承的控制却是很困难的。其主要的难点在于支承刚度变化与支承载荷变化必须协调、同步。在 $n = n_s$ 时，支承处的刚度由 k_2 跃变到 k_1，这意味着此时支承处的载荷与变形的关系应如图 5－18 所示。转子系统由零转速增速时，支承刚度为 k_2，待转子挠度达到 y_s（支承处变形达到 r_s）时，支承刚度应变为 k_1。如要求支承刚度由 k_2 变小到 k_1，而支承变形不减小，则必须要求支承载荷由 $p_2 = k_2 r_s$ 减小到 $p_1 = k_1 r_s$。在转子旋转过程中，支承载荷要由 p_2 跃变到 p_1 并与支承刚度由 k_2 跃变到 k_1 同步。显然，要从支承结构和控制设计达到这一要求是很难的。

此外，数值仿真和实验研究均表明，转子系统在缓慢加速过程中，当 $n = n_s$ 时，由于支承刚度的突变，转子在该转速的幅频特性不会是图 5－17 响应曲线上的 s 点，而会存在一个瞬时的区域。在该区域的振幅是稳态响应和瞬态响应合成的结果，如图 5－19 所示。

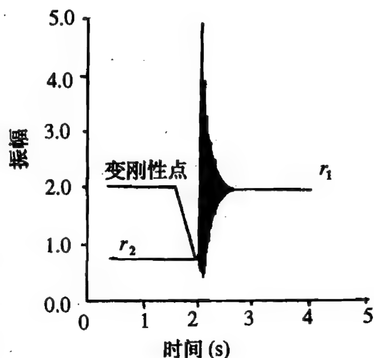


图 5－19　支承刚度变化时瞬态响应时间历程

取决于控制的效果，该合成振幅有可能是稳态振幅（y_s 点）的数倍。如采用加速通过该点，可使振幅减小。

尽管不可能达到图5-17所示理想的转子幅频特性，但利用变刚度支承的非线性特性，控制转子系统的振动，达到减小振幅和外传力的效果还是可能的。国内外一些学者一直致力于研究利用变刚度支承非线性特性，采用电磁式、智能材料结构等主动控制转子振动的方法和具体结构的实现方式。

5.6　弹性支承设计中的几个问题

5.6.1　弹性支承个数、安装位置和弹性支承刚度的确定

通过转子系统动力特性分析（临界转速、不平衡响应及其灵敏度和应变能分布等分析）和转子系统动力学优化设计，可以确定转子-支承系统是否需要采用弹性支承、采用几个弹性支承、弹性支承安装位置，并确定出弹性支承的刚度。

为满足临界转速和应变能分布设计准则的要求，通常，大、中型发动机转子因最大工作转速相对较低，一个转子上设置一个弹性支承或整个发动机（双转子或三转子）转子系统设置一个弹性支承即可。小型发动机最大工作转速相对较高，如要将转子系统的弯曲临界转速移到最大工作转速以上，则往往必须在一个转子上设置两个弹性支承。甚至个别小型涡轴发动机，即使转子系统安置两个弹性支承，仍不能将转子系统的弯曲临界转速调整到最大工作转速以上。此时，则必须对转子系统进行柔性转子平衡并采取有效的减振措施。必要时，也可在转子上添加支承。

根据已确定的弹性支承数目，可计算出转子系统前三阶临界转速各自随不同的弹性支承刚度的变化曲线。由此曲线和工作转速（工作转速、最大转速、慢车转速等）选定弹性支承的刚度。

5.6.2　弹性支承具体结构的选择

通常根据设计、生产、使用经验及条件和转子系统具体的结构特点选定弹性支承的具体结构类型。据统计，目前使用的发动机中，英、美发动机的转子系统大都采用笼条式弹性支承，而又以拉杆式弹性支承居多；俄国发动机的转子系统则大多采用弹性环式弹性支承。

笼条式弹性支承（包括鼠笼式和拉杆式）与弹性环式弹性支承相比，其结构较复杂，所占空间大一些，重量也大一些，但设计生产和使用经验较丰富。

鼠笼式比拉杆式结构简单，加工和装配亦较方便。其主要缺点是当笼条数目较多时，两端笼条间转接处圆弧半径小容易产生应力集中；当笼条数目过少时，则弹性支承沿圆周各向刚度不均，而易导致转子系统在同一阶临界转速附近出现多个振动峰值。

拉杆式弹性支承由多根单独的拉杆组成，其两端不易发生应力集中，但结构、加工、装配比鼠笼式支承复杂。如拉杆两端插入前后安装边孔内用钎焊连成一体，则要求保证高的焊接质量，使其工作时不致松动并不得影响焊接处及其附近的强度；如用螺栓连接，则除应注意螺纹加工不得产生应力集中外，还应保证各拉杆螺栓拧紧度一致，以使各拉杆刚度均匀。

有时，从发动机总体结构考虑，为使采用弹性支承后不增加发动机的长度，可采用折返的拉杆式弹性支承或折返的鼠笼式弹性支承。

弹性环式弹性支承结构简单、重量轻、占用空间小（只需在轴承外环和轴承座间有一定的径向空间）。然而，要在一个薄环上加工内外凸台，保证加工精度并不致使环变形，其难度相对

大一些。与笼条式弹性支承一样，如弹性环内、外凸台数目过少，也会使弹性支承沿圆周各向刚度不均。

如前所述，发动机转子系统采用笼条式弹性支承结构，一般均需设置限幅环限制弹性支承的变形。根据使用经验，建议采用弹性支承与挤压油膜阻尼器并联结构。这样既可充分发挥弹性阻尼支承调整临界转速、应变能分布和减振作用，还可保证弹性支承本身的寿命和可靠性。此时，应该进行弹性支承和阻尼器的综合设计，因为挤压油膜阻尼器的油膜间隙大小与弹性支承的刚度和变形密切相关。

同样，在发动机转子系统中采用弹性环式弹性支承时，建议按弹性环式挤压油膜阻尼器结构设计(需设置油路，给弹性环供充分的滑油)，这样也可兼有调整转子系统临界转速和阻尼减振的功能。用作弹性环式挤压油膜阻尼器时，弹性环结构中作限幅用的外凸台可以去掉。

5.6.3　弹性支承结构参数的确定

弹性支承的刚度和弹性支承结构类型确定后，即需进一步确定弹性支承的结构参数。其结构参数的选取应在满足弹性支承刚度(转子临界转速的调整)要求的同时，满足弹性支承强度的要求。一般是，先按刚度要求选取结构参数，再根据弹性支承允许的变形(间隙设计确定)进行强度校核。由于结构参数(如鼠笼式支承的笼条长度、横截面尺寸与笼条数目)对弹性支承的刚度和强度有一定的协调作用，需要时，可对结构参数进行优化选择，达到既保证支承刚度的要求，又保证支承的低应力水平。

影响鼠笼式弹性支承刚度的主要因素是笼条长度、笼条宽度和厚度，即横截面尺寸和笼条数目。通常，可按宽度和厚度相等设计，而主要通过改变笼条长度和笼条数目调整支承刚度。

影响拉杆式弹性支承刚度的主要因素是拉杆长度、拉杆数目和拉杆直径。拉杆直径选取要考虑本身的强度、刚度和加工等要求。通常，主要通过调整拉杆长度和数目调整支承刚度。

影响弹性环式弹性支承刚度的主要因素是内、外凸台的高度、宽度和凸台的数目以及弹性环的壁厚和宽度。通常主要通过改变弹性环的厚度和内、外凸台的数目和宽度调整支承刚度

5.6.4　弹性支承工作定心

保证弹性支承在工作时与限幅环或油膜阻尼器外环同心，是十分重要的。如果间隙不均则可能因为某一方向间隙过小而工作时发生支承与限幅环碰摩或因为某一方向间隙过大而导致工作时弹性支承应力过大，乃致发生疲劳损伤。对于弹性阻尼支承，则可能因为间隙不均而导致阻尼器在非设计状态下工作，影响减振效果。因此，在结构设计时即应计及弹性支承在转子重力作用下引起的变形，使弹性支承的中心线相对其安装定位面有一向上的“偏心距”，以保证在弹性支承受到转子重力作用，即在发动机工作时，弹性支承与限幅环或油膜阻尼器外环同心。对于重量轻的转子，如果转子重力引起的弹性支承变形很小，则可以在结构设计时不考虑此“偏心距”。

此外，对弹性支承的加工要求应予充分重视。除应注意各种连接圆弧不能过小，避免产生应力集中外，还应注意弹性支承的椭圆度、壁厚均匀的严格要求。椭圆度和壁厚不均，会导致弹性支承沿圆周的刚度不均、应力不均匀；如与挤压油膜阻尼器并用，还会造成油膜间隙不均影响阻尼器的性能。

5.7 设计实例

某涡轮风扇发动机核心机的转子 - 支承系统简化模型如图5-20所示。该核心机最大工作转速为16800r/min,慢车转速为10800r/min。

针对该核心机原转子 - 支承结构,进行了模态实验和地面台架试车实测振动数据的传递函数分析,得到系统前三阶临界转速分别为一阶8700r/min、二阶15200r/min、三阶60000r/min。用有限元素法计算出该核心机原转子 - 支承系统的前支承刚度为0.686×10^8N/m、后支点的支承刚度为1.57×10^8N/m。利用子结构传递矩阵法按图5-20的简化模型计算出该转子系统的前三阶临界转速分别为一阶8635r/min、二阶15440r/min、三阶64424r/min。结果表明,实验分析和计算分析有较好的一致性。

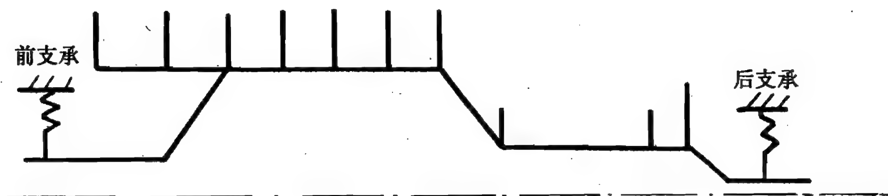


图5-20 某核心机转子系统简化模型

该核心机带原转子 - 支承系统在地面台架上进行了试车,最高转速为13000r/min左右。图5-21(a)~图5-21(d)分别示出其压气机机匣和涡轮机匣水平与垂直方向的振动加速度响应曲线。由图可见,在0~13000r/min范围内,转子系统出现了一阶临界转速,转速值为8700r/min左右;涡轮水平方向的振动最大值达到了8g左右。同时,试车过程中发现,转子过临界转速时的振动峰值对加速很敏感,必须很快通过,否则将出现很大振动。更关键的是,该核心机在高空台试车时,其最高转速为16000r/min,正好在转子系统二阶临界转速(15220r/min)附近。显然,该核心机若采用原转子 - 支承系统,则无论是临界转速安全裕度,还是振动响应均不能满足设计准则和可靠性的要求。

为了调整转子系统的临界转速并减小核心机的振动,将该核心机原后支点刚度较高的支承结构改装成带弹性支承和挤压油膜阻尼器结构。前支点保持原结构,其支承刚度为0.686×10^8N/m。选取后支点不同的支承刚度,用子结构传递矩阵法计算了转子系统的临界转速值,如表5-2所示。最后确定后支点支承刚度取在$0.098\times10^8\sim0.196\times10^8$N/m范围,控制转子系统的一阶临界转速在3070~4260r/min范围,二阶临界转速在11570~11750r/min范围,三阶临界转速大于60000r/min。

为了保持原核心机后支点的轴向位置基本不变,具体设计了折返鼠笼式弹性支承和不带密封的挤压油膜外环,其结构示意图如图5-22所示。弹性支承鼠笼条数$z=24$,笼条截面尺寸$b=h=2.5$mm,笼条长度$l=23.5$mm,可以通过改变笼条长度调整支承刚度;阻尼器油膜间隙半径比设计为$c/r=2‰\sim3‰$范围。

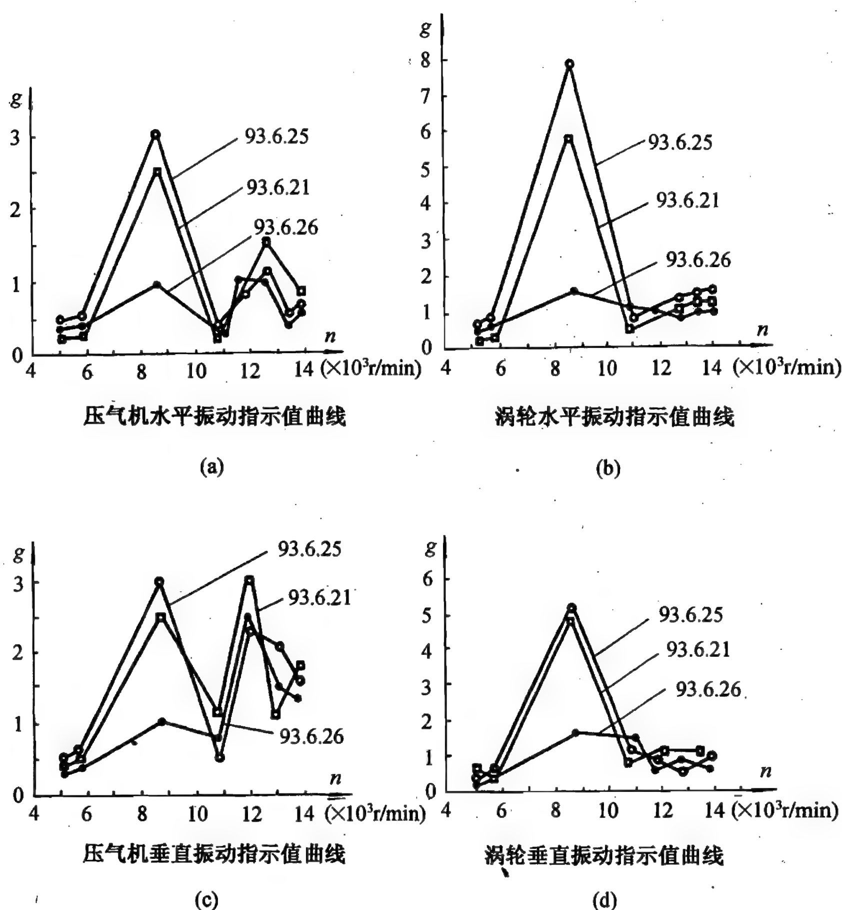


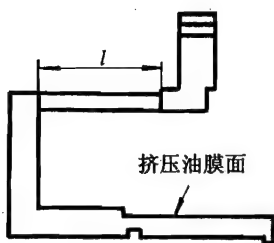
图 5-21 带原支承转子系统核心机的振动响应

表 5-2 某核心机转子系统临界转速

前支点刚度 ($\times 10^8$ N/m)	后支点刚度 ($\times 10^8$ N/m)	计算的临界转速值 (r/min)		
		一 阶	二 阶	三 阶
0.686	0.098	3072.6	11575.7	64365.7
	0.147	3727.1	11659.3	64367.8
	0.196	4261.8	11747.6	64369.8
	0.294	5110.9	11938.6	64373.8
	0.872	7636.3	13403.6	64397.3
	1.568	8634.8	15439.5	64424.4
	1.960	8888.8	16515.7	64439.3

将鼠笼式弹性支承(支承刚度为 0.098×10^8N/m)和挤压油膜阻尼器(油膜间隙半径比 3‰)安装于该核心机转子系统后支点,核心机在地面台上进行了试车。对实测的压气机与轮水平方向的振动响应作了传递函数分析,可以看出在 0~300Hz 内有两个峰值点,分别位 3000r/min 和 11200r/min,且在两峰值点处相位均发生了很大变化。这表明,该核心机转子

统后支点加了弹性支承后，有效地调整了转子系统的临界转速，其一阶由原来的8700r/min调整到3000r/min左右，二阶由原来的15200r/min调到11200r/min左右。实测结果与计算分析值（一阶3072r/min，二阶11575.3r/min）非常一致。



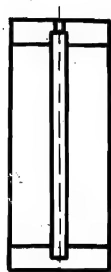
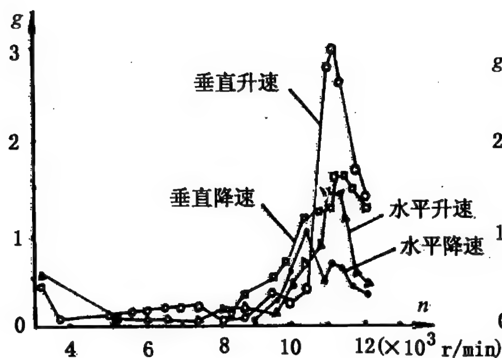
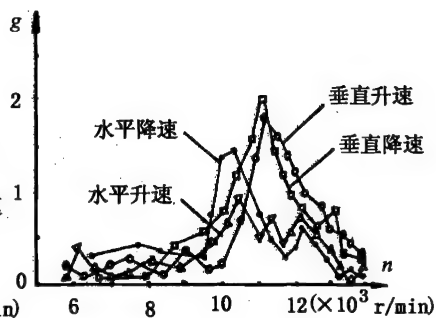


图5-22　弹性支承和油膜环结构示意

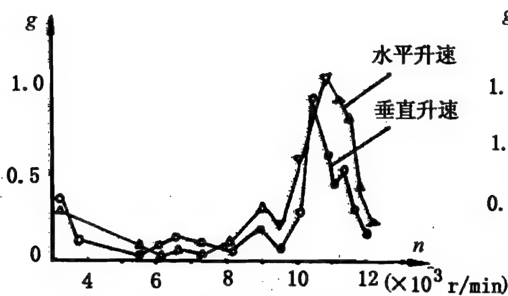
图5-23示出台架两次试车中压气机机匣及涡轮机匣水平和垂直方向的振动响应曲线。由试车结果明显看出，核心机转子系统通过临界转速时振动峰值很小。通过一阶临界转速（3000r/min）时，由于转速低，不平衡力小，没有出现明显的振动峰值；即使缓慢地通过二阶临界转速（11200r/min）时，最大的振动峰值也未超过3g。这表明，弹性支承和挤压油膜阻尼器结构对该核心机起到了很好的减振作用。



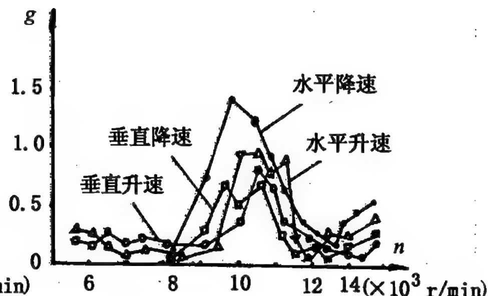
第一次试验压气机振动分析值曲线



第二次试验压气机振动分析值曲线



第一次试验涡轮振动分析值曲线



第二次试验涡轮振动分析值曲线

图5-23　带弹性支承转子系统核心机的振动响应

参 考 文 献

[1] 晏励堂编著.航空燃气轮机振动和减振.北京:国防工业出版社,1991.
[2] 张哲文,刘启州.航空发动机强度设计、试验手册.第三机械工业部第六研究院,1985.
[3] 朱梓根等.航空涡喷、涡扇发动机结构设计准则(研究报告),第六册.中国航空工业总公司发动机系统工程局,1998.
[4] 弹性支点和弹性支点加油膜环减振特性实验研究.北京航空学院科研报告 BH-B289,1983.
[5] 刘宝江.利用智能材料主动控制转子振动的研究.北京航空航天大学博士后研究报告,1993.
[6] 周明等.弹性支承和 PSFD 在某核心机上的应用.燃气涡轮试验与研究,江油:中国航空工业总公司燃气涡轮研究院,1994.
[7] 周明等.弹性环式挤压油膜阻尼器机理研究.航空动力学报,Vol.13,No.4,1998.

第 6 章　挤压油膜阻尼器设计

6.1　概　述

挤压油膜阻尼器的主要作用在于减小转子通过共振时的振幅和支承外传力。对挤压油膜阻尼器研究的内容可分为两个方面：一是挤压油膜的力学性能，即研究各种计算油膜反力的方法，从而导出影响油膜刚度和油膜阻尼的因素；二是在引出油膜刚度和油膜阻尼这一概念的基础上，研究转子的动力特性。研究挤压油膜机理的最终目的是研究带这种油膜阻尼器的转子的动力特性。

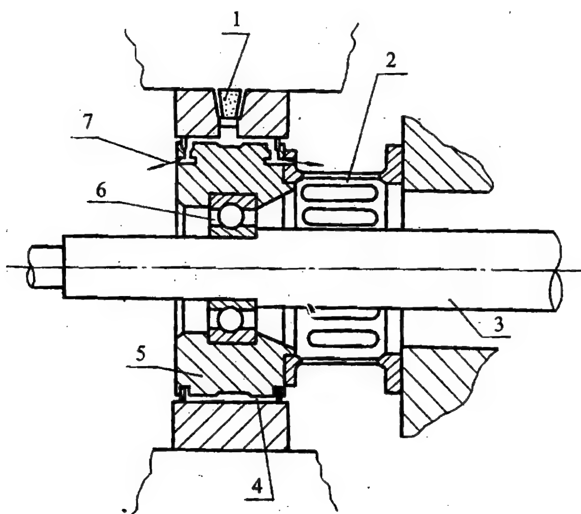


图 6-1　同心型挤压油膜阻尼器结构

1—滑油进口；2—定心弹簧；3—轴；4—挤压油膜；
5—轴颈；6—球轴承；7—泄油口

实际使用的挤压油膜阻尼器结构有两种典型形式：一种是带有定心弹性支承的所谓同心型，如图 6-1，在稳态工作时轴颈作圆进动。另一种是不带定心弹性支承的所谓非同心型，如图 6-2。非同心型挤压油膜阻尼器在转子的不平衡力作用下，油膜轴颈作非圆进动，这与前一种的运动是不相同的。

挤压油膜阻尼器如果设计得好，减振效果非常明显，对减小转子通过临界转速时的振动和经由轴承外传的载荷，效果尤其显著，一般可以减小振动 60% 以上，并能抑制动力不稳定性和具有一定的承受突加不平衡负荷的能力。然而，有关挤压油膜阻尼器的一些机理至今仍未完全弄清楚，还不能根据设计参数来精确计算阻尼器的性能。试验证明，那些设计得不合理的或远离设计状态工作的挤压油膜阻尼器实际上可能增大动力负荷。故目前对该类阻尼器的设计，是采用经验、理论和试验相结合的试凑法。

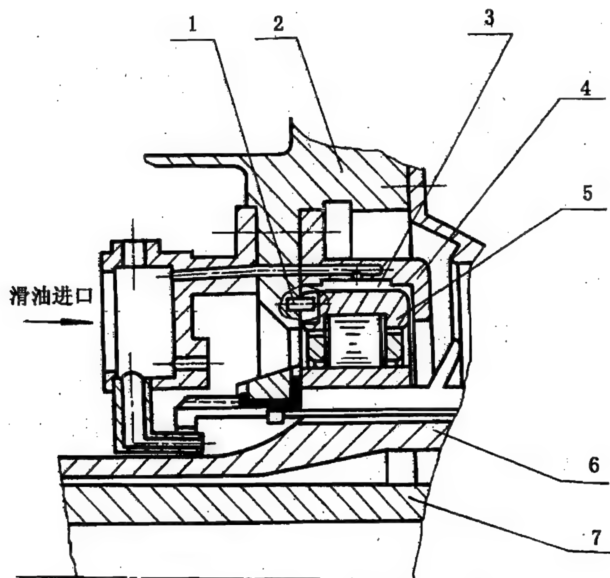


图6－2　非同心型挤压油膜阻尼器结构
1—限转销;2—后机匣;3—油膜腔;4—轴承座;
5—轴承;6—外轴;7—内轴

6.2　挤压油膜阻尼器工作原理及构造

带挤压油膜阻尼器的转子－支承系统,在一般情况下,轴承是不转动的。轴颈相对于轴承的运动可分解为:轴颈的自转、轴颈中心绕轴承中心的进动和轴颈的径向运动(图6－3)。

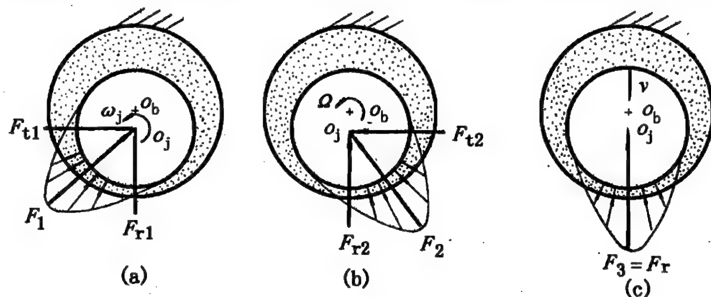


图6－3　挤压油膜阻尼器轴颈运动和油膜力分析

图6－3(a)为轴颈在偏离轴承中心某一位置以ω_j作自转。轴颈与轴承之间的间隙腔内充满滑油,由于滑油的粘性,滑油被轴颈带动旋转,左边的油由大间隙进入小间隙,使油压增高,右边的油由小间隙流向大间隙,使油压降低。因油为液体不可能承受负压,故右边腔室的油压近于零,油压分布情况大致如图所示。滑油作用于轴颈的油膜合力设为F_1,分解为垂直向上的径向分力F_{r1}和自左向右的水平分力F_{t1}。前者将轴颈举起,这是由于轴颈受有向下的力(如重力)时,由于轴颈的自转,油膜有一定弹力将其举起,后者则推动轴颈作正进动,这是一种激振力。当转子重量很大,而不平衡力又很小时,则在重力作用下的轴颈运动接近此种情况。

图6－3(b)示出了轴颈中心绕轴承中心作无自转的圆进动。图示瞬间轴颈速度为水平向右,

故在右边间隙中的滑油被挤压而油压增高,又因上部间隙大,下部间隙小,故油膜压力分布大致如图所示。左半部油压约为零,右半部油膜对轴颈作用力的合力 F_2 指向左上方,其分力 F_{r2} 也将轴颈推向轴承中心,是油膜弹力,周向分力 F_{t2} 则与转子进动速度方向相反力图阻止轴颈的正进动,这是一种阻尼力。当转子重量很小而不平衡力又很大时,则无自转的轴颈运动接近此种情况。

图6-3(c)所示为轴颈作向下的径向运动,油腔中下部滑油被挤压而压力升高。油膜作用于轴颈的合力向上,正好与轴颈运动方向相反,故油膜力既是弹力又是阻尼力。

由上述分析可见,唯独 F_{t1} 与轴颈进动的方向相一致,此力将推动转子正进动,故轴颈的自转运动所引起的油膜力是不利的,应力求避免。避免的方法是不直接用转轴的轴颈作为阻尼器中的轴颈,而是用一种与转子轴颈作同样进动和径向运动但不会自转的零件,诸如滚动轴承的外环或与外环连接的衬套这样的构件作为阻尼器的轴颈。这就是挤压油膜阻尼器与一般轴颈轴承的主要区别。

挤压油膜阻尼器按照其轴颈中心与轴承中心在转子未旋转时是否同心而分类为:带定心弹性支承和不带定心弹性支承的挤压油膜阻尼器。弹性支承可以是鼠笼式、弹性环,也可以用弹簧等弹性元件。

图6-1所示为带鼠笼式弹性支承的挤压油膜阻尼器。它是利用连接于弹性支承左端的加工较准确的圆柱面段作为阻尼器的轴颈。转子轴的一端支在装于弹性支承左端内的滚动轴承上。转子静止时,阻尼器轴颈与装于机匣内的阻尼器轴承(油膜环)同心。转子工作时,其振动可传到弹性支承,使阻尼器轴颈与转子轴颈作同步进动和径向运动,在稳态转速下,轴颈中心轨迹是与轴承同心的圆。转子的自转不能通过滚动轴承传给弹性支承,故阻尼器轴颈无自转运动。滑油从外环上的孔供入阻尼器内环形槽,再流向两边的油腔。阻尼器如两端无封严装置,油可自阻尼器两端流出,也可用封油圈封油以减少泄漏量。

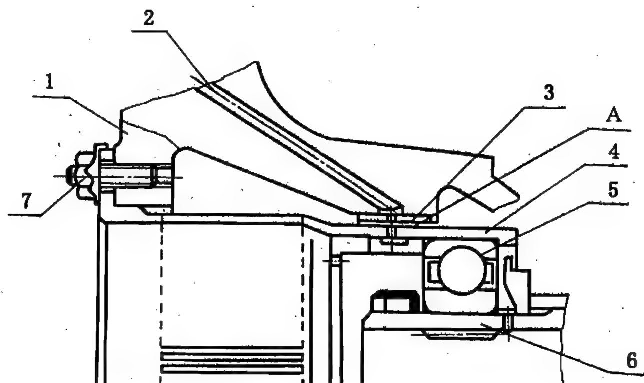


图6-4　J69发动机弹支-挤压油膜阻尼器支承结构

1—机匣;2—阻尼器供油孔;3—油膜环;4—弹性支承;
5—球轴承;6—转子轴颈;7—螺栓

图6-4为一种已经成功地使用在一航空发动机上的挤压油膜阻尼器结构。阻尼器的主要部分为油膜环3和作在弹性支承4上的油膜轴颈表面A。在油膜环3和表面A间形成油膜间隙,由供油孔2供入滑油。转子的振动负荷由轴颈6经轴承5传到弹性支承4上。弹性支承用螺栓7固定在机匣1上,悬臂地支承着转子。弹性支承为鼠笼式,有48根肋条。在转子横向载荷作用下,表面A(油膜轴颈)产生径向位移,挤压油膜。油膜轴颈是不旋转的,表面A系通过绕油膜

环中心线的进动去挤压油膜。

在图6－4的结构中，油膜轴颈的直径为78.3mm，阻尼器有效工作长度为15mm，油膜半径间隙为0.20～0.25mm。阻尼器用的滑油就是发动机润滑系统中的滑油，供油压力为390～490kPa。转子最大转速为22000 r/min，不平衡量为6g·cm，质量为37.62kg，弹性支承刚度为5.4×10^6N/m。

图6－2为不带定心弹簧的挤压油膜阻尼器。它直接利用滚柱轴承外环作为阻尼器的轴颈。图6－5为RB211发动机挤压油膜阻尼器支承结构。为防止轴颈自转，在左端挡板内圆上有几个向心的凸起或凹槽，轴承外环左端面上有相应数目的凹槽或凸起以便与挡板咬合。这种轴颈防转装置应只是防止轴承外环自转，但不妨碍其进动和径向运动。阻尼器两端的挡板与轴承外环间轴向间隙较小，这既防止轴承轴向串动，又可限制滑油过量泄漏。滑油是从阻尼器中部经环形槽向两边供入。

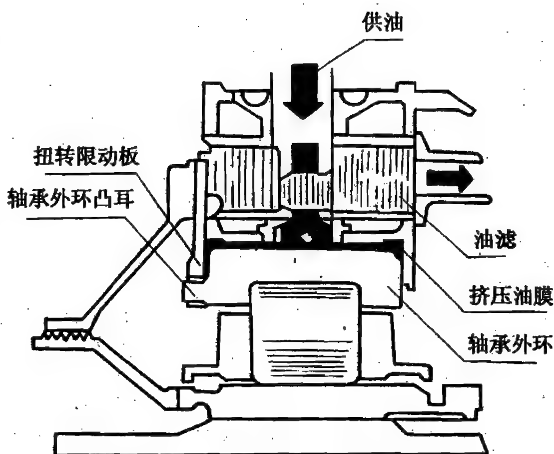


图6－5 RB211发动机挤压油膜阻尼器支承结构

6.3 油膜轴承和挤压油膜阻尼器的雷诺方程

在本节中定义下列符号：c（油膜半径间隙）；e（轴颈偏心距）；h（油膜厚度）；R（轴颈半径）；O_b（轴承中心）；O_j（轴颈中心）；p（油膜压力）；t（时间）；ε（偏心率）；φ（进动角）；ω_b（轴承角速度）；ω_j（轴颈角速度）；μ（滑油粘度）；Ω（轴颈进动角速度）。

挤压油膜阻尼器油膜力的基本算式就是轴颈轴承（或称油膜轴承）中依据的广义雷诺方程。再按照挤压油膜阻尼器中的具体情况（如$\omega_j=\omega_b=0$）和应用现代计算技术作进一步导算就可得出各种计算阻尼器中的油膜力的算式。

坐标系示于图6－6。

（1）油膜轴承可压缩流在直角坐标中的广义雷诺方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)\\&=6(\omega_b+\omega_j-2\Omega)\frac{\partial(\rho h)}{\partial\theta}+12\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}+12\Omega h\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\end{aligned}\tag{6-1}$$

（2）油膜轴承可压缩流在极坐标中的雷诺方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+R^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)\\&=6R^2(\omega_b+\omega_j-2\Omega)\frac{\partial(\rho h)}{\partial\theta}+12R^2\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}+12\Omega h\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\end{aligned}\tag{6-2}$$

式（6－2）是油膜轴承其轴承、轴颈分别以ω_b和ω_j自转，轴颈以Ω进动；且有径向运动速度$\dot{e}$情况下的可压缩流的瞬态雷诺方程。此式是通用式，以后各种特定条件下的阻尼器的油膜力的导算都将以此式为基础。

（3）油膜轴承不可压缩流（ρ＝常数）在极坐标中的雷诺方程

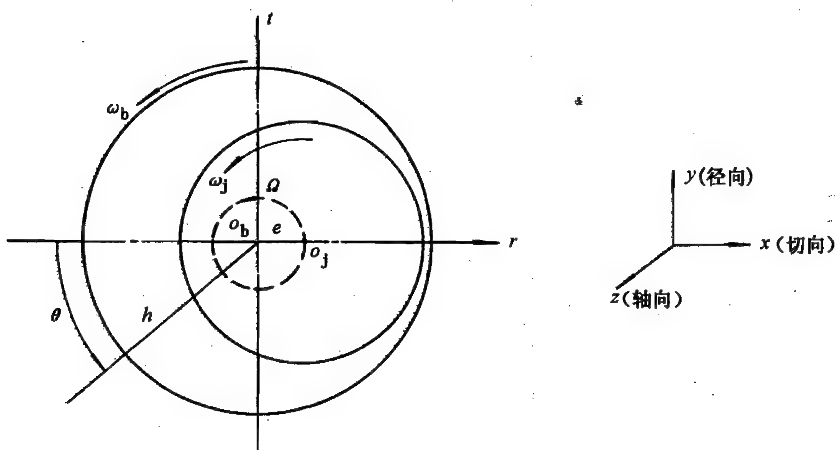


图6-6 坐标系

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+R^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6R^2(\omega_b+\omega_j-2\Omega)\frac{\partial h}{\partial\theta}+12R^2\frac{\partial h}{\partial t} \tag{6-3}$$

(4) 油膜轴承不可压缩流(ρ = 常数),在稳态进动情况($\dot{e}=0,\partial h/\partial t=\dot{e}\cos\theta=0$)时的雷诺方程

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+R^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6R^2(\omega_b+\omega_j-2\Omega)\frac{\partial h}{\partial\theta} \tag{6-4}$$

(5) 油膜轴承不可压缩流(ρ = 常数),且等粘度(μ = 常数),在稳态进动情况($\dot{e}=0$, $\partial h/\partial t=\dot{e}\cos\theta=0$)时的雷诺方程

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+R^2\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu R^2(\omega_b+\omega_j-2\Omega)\frac{\partial h}{\partial\theta} \tag{6-5}$$

(6) 挤压油膜阻尼器的瞬态雷诺方程

取 $\omega_b=\omega_j=0$,μ = 常数,ρ = 常数;并将 $h=c+e\cos\theta$,$\partial h/\partial\theta=-e\sin\theta$,$\partial h/\partial t=\dot{e}\cos\theta$,$\varepsilon=e/c$ 代入式(6-2)得

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+R^2\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=12\mu R^2(e\Omega\sin\theta+\dot{e}\cos\theta) \tag{6-6}$$

或写成

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(1+\varepsilon\cos\theta)^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right]+R^2\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+\varepsilon\cos\theta)^3\frac{\partial p}{\partial z}\right]=\frac{12\mu R^2}{c^2}(\varepsilon\Omega\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta) \tag{6-7}$$

一般阻尼器有效长度与直径之比较小,约为0.1 ~ 0.25。当阻尼器两端无封严装置时,阻尼器中两端压力与外界压力相同,较低,工作时因挤压作用阻尼器中部压力很高,相对来说沿圆周的压力梯度不大,即 $\partial p/\partial z \gg \partial p/\partial\theta$,在此情况下,计算油膜力时可忽略式(6-7)中等号左边第一项,便得出一维短轴承近似的雷诺方程

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+\varepsilon\cos\theta)^3\frac{\partial p}{\partial z}\right]=\frac{12\mu}{c^2}(\varepsilon\Omega\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta) \tag{6-8}$$

对于两端封严无端泄或端泄很小的阻尼器,不论其有效长度与直径之比为何值,均可近似地认为阻尼器轴向无压力流,即 $\partial p/\partial z=0$。此时,由式(6-7)略去等号左边第二项而得到一

维长轴承近似计算的雷诺方程

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(1+\varepsilon\cos\theta)^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right]=\frac{12\mu R^2}{c^2}(\varepsilon\Omega\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta) \tag{6-9}$$

(7) 油膜轴承和挤压油膜阻尼器在固定坐标系中的雷诺方程

前面分析所采用的是随转子旋转的动坐标，比较常用。但少数情况下仍需用固定坐标系分析才比较方便，如研究叶片突然丢失情况下阻尼器的瞬态运动轨迹和对于支承两向特性不同的非轴对称系统。

在固定直角坐标系下的油膜轴承(图 6 – 7) 的雷诺方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6(\omega_b+\omega_j)\frac{\partial(\rho h)}{\partial\theta}+12\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \tag{6-10}$$

当为不可压缩流时，得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6(\omega_b+\omega_j)\frac{\partial h}{\partial\theta}+12\frac{\partial h}{\partial t} \tag{6-11}$$

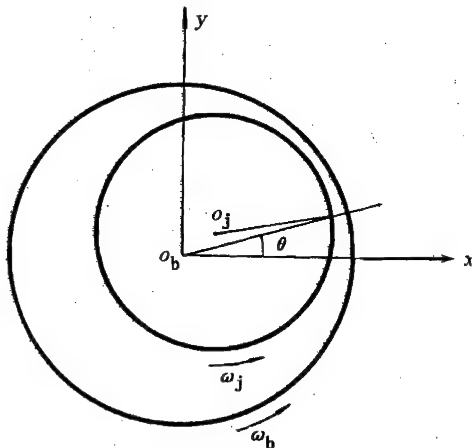


图 6 – 7　固定直角坐标系下的油膜轴承图

按短轴承近似，则得

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6(\omega_b+\omega_j)\frac{\partial h}{\partial\theta}+12\frac{\partial h}{\partial t} \tag{6-12}$$

在挤压油膜阻尼器中 $\omega_b=\omega_j=0$，则得一般挤压油膜阻尼器在固定坐标系内的短轴承近似雷诺方程为

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)=12\frac{\partial h}{\partial t} \tag{6-13}$$

简要分析：假设式(6 – 3) 等号右边第一项为零，考察第二项，当 $\partial h/\partial t<0$，表示随时间增长 h 减小，这表示轴颈作径向运动，其引起的作用于轴颈的油膜压力要升高，故式(6 – 3) 左边算出的必为正压力；假设式(6 – 3) 等号右边第二项为零，考察第一项，当 $(\omega_b+\omega_j-2\Omega)\partial h/\partial\theta<0$ 时，左边算出的也应为正压力。满足此不等式有两种情况，一是 $\partial h/\partial\theta<0$ 而 $(\omega_b+\omega_j-2\Omega)>0$。$\partial h/\partial\theta<0$ 表示随 θ 增加 h 减小，这是指阻尼器的间隙收敛区即图 6 – 3 所示阻尼器的左半部油腔区。$(\omega_b+\omega_j-2\Omega)>0$ 表示轴承和轴颈自转转速之和大于二倍轴颈进动转速。两自转转速将滑油由大间隙带入小间隙使该收敛区油压增高，轴颈进动则使该区油压减小。现 $(\omega_b+\omega_j-2\Omega)>0$，表示使该区油压增高的作用大于减低的作用，从而使得收敛区油压为正值，阻尼器产生负阻尼。其二是 $\partial h/\partial\theta>0$ 而 $(\omega_b+\omega_j-2\Omega)<0$，表示在阻尼器扩散区轴承和轴颈转速低于二倍轴颈进动转速，该区油压增高，此时阻尼器产生正阻尼。因此，阻尼器中若能做到 $(\omega_b+\omega_j-2\Omega)<0$ 即可起到阻尼作用。否则，其阻尼效果就相反。就是说要在阻尼器设计中做到要减小的振动其圆频率必须是 $\Omega>(\omega_b+\omega_j)/2$。如果 $\omega_b=0$，此时要使阻尼器满足 $\Omega>\omega_j/2$，否则就会出现半频振动，即激振频率 $\Omega=\omega_j/2$ 时，将会在转速为一阶临界转速的二倍附近出现大振动，这就是一般在使用轴颈轴承的转子中常碰到的油膜振荡现象。在高速旋转机械中经常出现的振动是由不平衡力激起的振动，振动频率 $\Omega=\omega_j$。满足 $\Omega>\omega_j/2$ 的阻尼器固然可以减小这种振动，但转子系统中还可能出现其他的非同步进动，如仅满足 $\Omega>\omega_j/2$

则对那些振动频率 $\Omega \leqslant \omega_j/2$ 的振动就无减振作用。好的阻尼器设计应对任何可能出现的振动都有阻尼作用。为做到这点，同时取 $\omega_j = 0$，则转子的任何频率的进动都将受到阻尼。因此，现用的挤压油膜阻尼器设计大都做成 $\omega_b = \omega_j = 0$。这里是仅就阻尼器轴承、轴颈和要阻尼的振动频率的关系分析得出的结果，而实际情况将要复杂得多。

6.4 "短"、"长"轴承理论的油膜压力分布和油膜力

6.4.1 短轴承近似解的油膜压力分布和油膜力

阻尼器长度 L 与直径 D 之比小于或等于0.25，两端不封严时，可用短轴承近似，误差不大。设轴颈在轴承内运动时始终保持两者的轴心线平行，因而 ε、$\dot{\varepsilon}$ 和 θ 等均不随 z 变化。通常将坐标轴取在阻尼器中央截面（图6－8）。积分限取为自 $-L/2$ 至 $L/2$。若取边界条件 $z=-L/2$ 时，$p=p_1$；$z=L/2$ 时，$p=p_2$。将式(6－8)对 z 积分两次后得油膜压力分布

$$p(\theta,z) = -\frac{6\mu}{c^2(1+\varepsilon\cos\theta)^3}(\varepsilon\Omega\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta)\left(\frac{L^2}{4}-z^2\right) + (p_2-p_1)\frac{z}{L}+\frac{1}{2}(p_2-p_1) \tag{6－14}$$

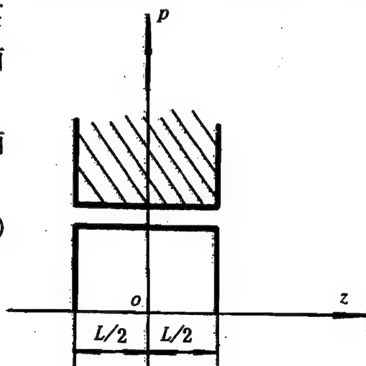


图6－8　短轴承近似计算用图

在无端封情况下，如两端的油压等于环境大气压力，并取表压，即以大气压力为计算起点，则 $p_1=p_2=0$，得短轴承近似油膜压力分布为

$$p(\theta,z) = -\frac{6\mu}{c^2(1+\varepsilon\cos\theta)^3}(\varepsilon\Omega\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta)\left(\frac{L^2}{4}-z^2\right) \tag{6－15}$$

阻尼器油膜压力作用于轴颈上的径向分力和周向分力（图6－9）由下式求出

$$\begin{Bmatrix}F_r\\F_t\end{Bmatrix} = \int_{-L/2}^{L/2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} -p(\theta,z)\begin{Bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{Bmatrix}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{6－16}$$

积分限 θ_1、θ_2 取决于阻尼器中正压力区范围，当有端压，且 $\dot{\varepsilon}$ 不为零有径向挤压时，则在 $\theta<\pi$ 的一部分区域也将产生正压，此时 $\theta_1 \neq \pi$。θ_1 可由式(6－15)为零求出

$$\mathrm{tg}\,\theta_1 = -\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon\Omega}$$

$\theta=\theta_2$ 处油压也为零，故 $\theta_2=\theta_1+\pi$。

将式(6－14)代入式(6－16)得

$$\begin{Bmatrix}F_r\\F_t\end{Bmatrix} = \frac{\mu RL^3\Omega}{c^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\varepsilon\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\begin{Bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{Bmatrix}\mathrm{d}\theta + \frac{\mu RL^3}{c^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\dot{\varepsilon}\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\begin{Bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{Bmatrix}\mathrm{d}\theta$$

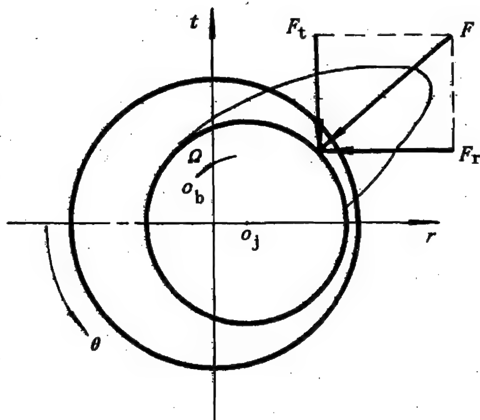


图6－9　阻尼器轴颈上油膜力计算用图

$$-\frac{p_1+p_2}{2}LR\int_{\theta_1}^{\theta_2}\begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{Bmatrix}d\theta \tag{6-}$$

式中右边三项分别为轴颈作圆进动、径向运动和两端部压力引起的油膜力。

在 $\varepsilon^2<1$ 情况下，式(6-17)中的积分公式如下：

$$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=\frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=\frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}}$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=0$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}+\frac{\cos^{-1}(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=\frac{3\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}+\frac{(1+2\varepsilon^2)\cos^{-1}(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}}$$

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=0$$

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=\frac{\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=\frac{(1+2\varepsilon^2)\pi}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}}$$

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=-\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=\frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\cos^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta=\frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}}$$

对于半油膜情况 $\theta_1=\pi,\theta_2=2\pi$，则径向和周向油膜分力为

$$\begin{cases}F_r=\dfrac{\mu RL^3}{c^2}\left[\dfrac{2\Omega\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}+\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\dot{\varepsilon}(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}}\right]\\ F_t=\dfrac{\mu RL^3}{c^2}\left[\dfrac{\pi\Omega\varepsilon}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}}+\dfrac{2\varepsilon\dot{\varepsilon}}{(1-\varepsilon^2)^2}\right]+(p_1+p_2)LR\end{cases} \tag{6-18}$$

对于全油膜情况 $\theta_1=0,\theta_2=2\pi$，则径向和周向油膜分力为

$$\begin{cases}F_r=\dfrac{\mu RL^3}{c^2}\left[0+\dfrac{\pi\dot{\varepsilon}(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}}\right]\\ F_t=\dfrac{\mu RL^3}{c^2}\left[\dfrac{\pi\Omega\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}+0\right]\end{cases} \tag{6-19}$$

上面得出的油膜作用于轴颈的力 F_r 和 F_t，均随轴颈一起旋转。油膜力中包含有轴颈进动频率 Ω、轴颈径向速度 $\dot{\varepsilon}$ 和阻尼器两端出口反压形成的油膜力。

6.4.2　长轴承近似解的油膜压力分布和油膜力

对于两端有很好封严的阻尼器，沿轴向油膜压力梯度很小，可近似地认为 $\partial p/\partial z=0$，看作

无限长轴承。则在 $\omega_b = \omega_j = 0$ 的不可压缩流体阻尼器中其雷诺方程为

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(1+\varepsilon\cos\theta)^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right] = \frac{12\mu R^2}{c^2}(\varepsilon\Omega\sin\theta + \dot{\varepsilon}\cos\theta) \tag{6-20}$$

经积分后得长轴承的一般油膜压力分布式

$$p(\theta) = \frac{-6\mu R^2}{c^2(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos\theta)^2}(4\varepsilon\Omega\sin\theta + \varepsilon^2\Omega\sin2\theta + 4\dot{\varepsilon}\cos\theta + \varepsilon\dot{\varepsilon}\cos2\theta) \tag{6-21}$$

从上式可见，油膜压力含有阻尼器轴颈作圆进动时引起的压力部分，其中含有进动频率 Ω；有轴颈作径向运动时引起的压力部分，其中含有轴颈径向运动速度 $\dot{\varepsilon}$。这两部分压力各自独立不相互耦合。如缺少其中某一部分，只需令其为零即可。

阻尼器总的油膜径向分力和周向分力为

$$\begin{cases} F_r = -LR\int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta)\cos\theta d\theta \\ F_t = -LR\int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta)\sin\theta d\theta \end{cases} \tag{6-22}$$

对于半油膜阻尼器 $\theta_1 = \pi, \theta_2 = 2\pi$，两油膜分力为

$$\begin{cases} F_r = \frac{6\mu R^3 L}{c^2}\left[\frac{4\Omega\varepsilon^2}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} + \frac{\pi\dot{\varepsilon}}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\right] \\ F_t = \frac{12\mu R^3 L}{c^2}\left[\frac{\pi\Omega\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{2\dot{\varepsilon}}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)}\right] \end{cases} \tag{6-23}$$

对于全油膜阻尼器 $\theta_1 = 0, \theta_2 = 2\pi$，两油膜分力为

$$\begin{cases} F_r = \frac{12\mu R^3 L}{c^2}\cdot\frac{\pi\dot{\varepsilon}}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \\ F_t = \frac{24\mu R^3 L}{c^2}\cdot\frac{\pi\Omega\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \end{cases} \tag{6-24}$$

6.4.3　在固定坐标系上的油膜力

固定坐标系如图6－7所示。若不计轴颈对轴承的微小倾斜，则 h 不是 z 的函数，按短轴承近似，边界条件为：$z = -L/2$ 时，$p = p_1$；$z = L/2$ 时，$p = p_2$。油膜压力分布为

$$p(\theta,z) = \frac{6\mu}{h^3}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}\left(z^2 - \frac{L^2}{4}\right) + \frac{(p_2-p_1)z}{L} + \frac{p_2-p_1}{2} \tag{6-25}$$

若 $p_1 = p_2 = 0$，并将 $h = c - x\cos\theta - y\sin\theta$ 和 $\partial h/\partial t = -\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta$ 代入上式得

$$p(\theta,z) = \frac{6\mu(-\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta)}{(c - x\cos\theta - y\sin\theta)^3}\left(z^2 - \frac{L^2}{4}\right) \tag{6-26}$$

油膜力 F_x 和 F_y 为

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\frac{\mu R L^3(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)}{(c - x\cos\theta - y\sin\theta)^3}\begin{Bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{Bmatrix}d\theta \tag{6-27}$$

对于半油膜短轴承近似，取积分限为 $\theta_1 = \theta_0, \theta_2 = \theta_0 + \pi$，得油膜力为

$$\begin{cases} F_x = -\mu RL^3\Big[\dfrac{\pi\dot{x}}{2(c^2-x^2-y^2)^{3/2}}+\dfrac{3\pi x(x\dot{x}-y\dot{y})}{2(c^2-x^2-y^2)^{5/2}} \\ \qquad +\dfrac{2\dot{y}(x^2+y^2)^{1/2}}{(c^2-x^2-y^2)^2}-\dfrac{4y(x\dot{x}+y\dot{y})}{(c^2-x^2-y^2)^2(x^2+y^2)^{1/2}}\Big] \\ F_y = -\mu RL^3\Big[\dfrac{\pi\dot{y}}{2(c^2-x^2-y^2)^{3/2}}+\dfrac{3\pi y(x\dot{x}-y\dot{y})}{2(c^2-x^2-y^2)^{5/2}} \\ \qquad -\dfrac{2\dot{x}(x^2+y^2)^{1/2}}{(c^2-x^2-y^2)^2}+\dfrac{4x(x\dot{x}-y\dot{y})}{(c^2-x^2-y^2)^2(x^2+y^2)^{1/2}}\Big] \end{cases} \quad (6-28)$$

对于全油膜短轴承近似,积分限为 $\theta_1=\theta_0,\theta_2=\theta_0+2\pi$,得油膜力为

$$\begin{cases} F_x = -\mu RL^3\Big[\dfrac{\pi\dot{x}}{(c^2-x^2-y^2)^{3/2}}+\dfrac{3\pi x(x\dot{x}+y\dot{y})}{(c^2-x^2-y^2)^{5/2}}\Big] \\ F_y = -\mu RL^3\Big[\dfrac{\pi\dot{y}}{(c^2-x^2-y^2)^{3/2}}+\dfrac{3\pi y(x\dot{x}+y\dot{y})}{(c^2-x^2-y^2)^{5/2}}\Big] \end{cases} \quad (6-29)$$

6.5　挤压油膜的刚度系数和阻尼系数

刚度系数和阻尼系数是分析转子–支承系统动力特性的重要参数。系统采用挤压膜阻尼器后,便会出现油膜刚度和油膜阻尼,在分析其动力特性时,除转子–支承系统自身的刚度外,还要计及油膜刚度。油膜阻尼远远大于转子–支承系统其他阻尼,存在油膜阻尼时,其他阻尼甚至可以略而不计。

6.5.1　短轴承近似解的油膜等效刚度系数和等效阻尼系数

按定义,油膜刚度系数 K_0 和油膜阻尼系数 C_0 分别为

$$K_0 = -\frac{F_r}{e} \qquad C_0 = -\frac{F_t}{e\Omega}$$

上两式中右端的负号,表示油膜径向弹性恢复力 F_r 和周向阻尼力 F_t 分别与偏心距 e、进动速度 $e\Omega$ 的方向相反。

当轴颈中心绕轴承中心作稳态同步圆进动($\Omega=\omega,\dot{\varepsilon}=0$)时,则按短轴承近似理论求得油膜的等效刚度系数和等效阻尼系数。

对于半油膜情况:

$$\begin{cases} K_0 = \dfrac{\mu RL^3}{c^3}\cdot\dfrac{2\Omega\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \\ C_0 = \dfrac{\mu RL^3}{c^3}\cdot\dfrac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (6-30)$$

对于全油膜情况:

$$\begin{cases} K_0 = 0 \\ C_0 = \dfrac{\mu RL^3}{c^3}\cdot\dfrac{\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (6-31)$$

由式(6–30)可知,当 ε 增大时,K_0 的增长比 C_0 的增长快,这表明转子–支承系统在大的不平衡响应下,由于油膜刚度非线性地过分增大,导致系统的响应在较大转速范围内一直很大而不降,从而使转子不能很快冲过临界状态,较长时间处于大振动状态,还会导致振动的不稳

定现象。

当供油压力足够高,以致消除了负压,不产生气穴,实现了全油膜工作,由式(6－31)可知,这时 $K_0=0$,而 C_0 却倍增。可见阻尼器的供油压力足够高时,对通过临界转速、减振和消除油膜非线性不稳定现象,都很有助益,但因油膜刚度为零不能将转子托起,故必须另有将轴颈托起的力。因需有另外的高压供油装置,这将增加重量和维修工作,故航空发动机中都不愿采用。

计算表明,由短轴承近似半油膜阻尼器在 $\varepsilon\leqslant0.4$ 情况下阻尼系数变化不大,可近似地认为是线性阻尼,在 ε 较高时则阻尼为非线性,ε 越大非线性程度越高。油膜刚度则不论 ε 为何范围均属非线性,在 $\varepsilon\geqslant0.75$ 以后为高度的非线性,在 $\varepsilon\leqslant0.4$ 时近似为直线。所以挤压油膜阻尼器是一种非线性阻尼器,具有非线性性质,在 ε 较大时非线性性质尤为明显。

6.5.2　长轴承近似解的油膜等效刚度系数和等效阻尼系数

当轴颈中心绕轴承中心作稳态同步圆进动($\Omega=\omega,\dot{\varepsilon}=0$)时,则按长轴承近似理论求得油膜的等效刚度系数和等效阻尼系数。

对于半油膜情况:

$$\begin{cases}K_0=6\mu L(\dfrac{R}{c})^3\cdot\dfrac{4\Omega\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}\\C_0=12\mu L(\dfrac{R}{c})^3\cdot\dfrac{\pi}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}}\end{cases}\tag{6－32}$$

对于全油膜情况:

$$\begin{cases}K_0=0\\C_0=24\mu L(\dfrac{R}{c})^3\cdot\dfrac{\pi}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}}\end{cases}\tag{6－33}$$

6.5.3　四个刚度系数和四个阻尼系数

四个油膜刚度系数和四个油膜阻尼系数总称为八个油膜动力特性系数。

在挤压油膜阻尼器和轴颈轴承中,有两种平衡状态:一种是在一定运转条件下,轴颈中心相对于轴承中心具有确定的位置,不因时间变化而变化。转子－支承系统的这种稳定工作状态称之为静态平衡。在恒定载荷作用下的轴颈轴承,常具此状。另一种是在某种特定运转条件下,轴颈中心以一定的偏心距恒速地绕轴承中心作圆轨迹进动,称这种稳定工作状态为动态平衡,挤压油膜阻尼器常具此状。在这些状态下,轴颈可能因外界的某一干扰而使轴颈中心相对于平衡状态产生一微小的初位移或初速度,在一定条件下将造成油膜自激失稳,特别危险的是可能导致剧烈的油膜振荡,所以要对转子－支承系统作稳定性分析。为了分析转子－支承系统的不平衡响应和稳定性,要用到八个油膜动力特性系数。

由于油膜分力 F_r、F_t 都是径向 r 和周向 t 的位移和速度的函数,即

$$\begin{cases}F_r=F_r(r,t,\dot{r},\dot{t})\\F_t=F_t(r,t,\dot{r},\dot{t})\end{cases}\tag{6－34}$$

一个方向的位移变化不仅引起该方向的油膜力变化,而且会引起另一方向油膜力的变化,这就相当于除有位移与力同方向的刚度系数之外还有交叉的刚度系数;同样,一个方向的速度变化也会引起与速度同方向的油膜力和与之垂直的方向的油膜力变化,因而也具有四个阻尼系数。

刚度系数 K_{rr}、K_{rt}、K_{tr}、K_{tt}和阻尼系数 C_{rr}、C_{rt}、C_{tr}、C_{tt}分别定义为

$$\begin{cases} K_{rr} = \left.\dfrac{\partial F_r}{\partial r}\right|_0 & K_{rt} = \left.\dfrac{\partial F_r}{\partial t}\right|_0 \\ K_{tr} = \left.\dfrac{\partial F_t}{\partial r}\right|_0 & K_{tt} = \left.\dfrac{\partial F_t}{\partial t}\right|_0 \\ C_{rr} = \left.\dfrac{\partial F_r}{\partial \dot{r}}\right|_0 & C_{rt} = \left.\dfrac{\partial F_r}{\partial \dot{t}}\right|_0 \\ C_{tr} = \left.\dfrac{\partial F_t}{\partial \dot{r}}\right|_0 & C_{tt} = \left.\dfrac{\partial F_t}{\partial \dot{t}}\right|_0 \end{cases} \tag{6-35}$$

式中,“$|_0$”代表在瞬态平衡位置之值。

对于同心圆进动短轴承近似半油膜情况:

$$\begin{cases} K_{rr} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{4\Omega\varepsilon_0(1+\varepsilon_0^2)}{(1-\varepsilon_0^2)^3} \\ K_{rt} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{\pi\Omega}{2(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}} \\ K_{tr} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{\pi\Omega(1+2\varepsilon_0^2)}{(1-\varepsilon_0^2)^{5/2}} \\ K_{tt} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{2\Omega\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0^2)^2} \\ C_{rr} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{\pi(1+2\varepsilon_0^2)}{2(1-\varepsilon_0^2)^{5/2}} \\ C_{rt} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{2\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0^2)^2} \\ C_{tr} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{2\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0^2)^2} \\ C_{tt} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{\pi}{2(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}} \end{cases} \tag{6-36}$$

对于同心圆进动短轴承近似全油膜情况:

$$\begin{cases} K_{rr} = 0 \\ K_{rt} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{\pi\Omega}{(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}} \\ K_{tr} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{\pi\Omega(1+2\varepsilon_0^2)}{(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}} \\ K_{tt} = 0 \\ C_{rr} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{\pi(1+2\varepsilon_0^2)}{(1-\varepsilon_0^2)^{5/2}} \\ C_{rt} = 0 \\ C_{tr} = 0 \\ C_{tt} = \dfrac{\mu RL^3}{c^3} \cdot \dfrac{\pi}{(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}} \end{cases} \tag{6-37}$$

式(6－36)和式(6－37)中的 $\varepsilon_0 = e_0/c$，称稳态偏心率，e_0 为稳态偏心距。

6.6　带挤压油膜阻尼器的刚性转子的稳态特性计算方法

设有刚性转子系统如图6－10(a)所示。一端带弹性支承加阻尼器，另一端为刚性支承，其计算模型为一个带非线性阻尼器与弹簧并联的单质量系统(图6－10(b))。

图6－10　带挤压油膜阻尼器的刚性转子

根据振动时作用于弹簧和阻尼器上的载荷相等条件求出计算模型上的质量 m。

$$m = \int_0^l \frac{m(x)}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)x\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{k} \frac{m_k}{l}\left(1 - \frac{x_k}{l}\right)x_k - \sum_{i=1}^{i} \frac{J_{\mathrm{d}i}}{l^2} \tag{6-38}$$

式中：$m(x)$—— 轴单位长度的质量；

m_k—— 第 k 个集中质量；

$J_{\mathrm{d}i}$—— 第 i 个盘的赤道转动惯量。

用同样分解的方法求出转子分配在B点上的不平衡量 q。则在阻尼器轴颈处振动时的各种载荷如图6－11所示。

根据力的平衡得如下运动方程：

$$\begin{cases} mUc\Omega^2\cos\varphi + m\Omega^2 e - (k - K_0)e = 0 \\ mUc\Omega^2\sin\varphi - C_0\Omega e = 0 \end{cases} \tag{6-39}$$

则振幅比为

$$\frac{\varepsilon}{U} = \frac{\delta^2}{\sqrt{\left(\dfrac{K_0}{k} + 1 - \delta^2\right)^2 + \left(2\dfrac{C_0}{c_k}\delta\right)^2}} \tag{6-40}$$

外传力为

$$F_1 = e\sqrt{(k + K_0)^2 + (C_0\Omega)^2} \tag{6-41}$$

传递率为

图6－11　阻尼器轴颈的运动和载荷

$$T = \frac{\sqrt{(1 + \frac{K_0}{k})^2 + (\frac{2C_0}{c_k}\delta)^2}}{\sqrt{(\frac{K_0}{k} + 1 - \delta)^2 + (\frac{2C_0}{c_k}\delta)^2}} \tag{6-42}$$

相位角为

$$\varphi = \frac{2\frac{C_0}{c_k}\delta}{\frac{K_0}{k} + 1 - \delta^2} \tag{6-43}$$

式中：$\varepsilon = e/c$—— 轴颈偏心率；

$U = e_m/c$—— 不平衡质量偏心率；

c—— 油膜半径间隙；

$c_k = 2m\omega_n$—— 临界阻尼系数；

$\omega_n = (k/m)^{1/2}$—— 无阻尼临界角速度；

$\delta = \Omega/\omega_n$；

Ω—— 进动角速度；

k—— 弹簧刚度系数；

K_0—— 油膜等效刚度系数；

C_0—— 油膜等效阻尼系数。

由于 K_0 和 C_0 是偏心率 ε 的函数，因此需要用逐步渐近的方法求解 ε/U、T 和 φ。方法如下：先假定 ε 值算出 K_0、C_0。或先取定一系列 ε 值（$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$）算出 K_0、C_0 随 ε 变化的关系备用然后计算 ε/U—δ 曲线。计算时取定 δ 值，并先假定一 ε 值，取出相应的 K_0 和 C_0，代入式(6-40)算出 ε/U，因 U 是已知的，故得 ε。比较算出的与假定的 ε，如相等或相差在控制精度范围内，则即得出该 δ 值时的 ε/U。如两个 ε 相差较大，将算出的 ε 作为重新假设的 ε 再算，直到假设的和算得的两个 ε 值相差甚微为止。此时的 ε/U 便是该 δ 时的振幅比。于是相应的 K_0、C_0 也就确定了，进而可计算出传递率 T 和相位角 φ。改换 δ 值，同法再算出 ε/U、T 和 φ。用一系列 δ 值按同法算出该转子－支承系统的动力特性曲线。

6.7 挤压油膜阻尼器突加不平衡响应计算方法

一个带挤压油膜阻尼支承的转子系统在应用到发动机上去之前，需要知道转子在正常和非正常工况下的动力特性。几乎对所有转子来讲，最危险的载荷莫过于不平衡载荷的突加（诸如叶片折断或丢失一部分旋转质量）。这种强烈的突加载荷可引起转子的大位移和对支承轴承的冲击载荷，从而使旋转件产生很大的内应力。因过大位移造成转静子间的磨擦甚至使发动机损坏。损坏的时间通常发生在叶片丢失后的一秒钟之内，因此，必须要考虑在突加载荷下转子－支承系统的瞬态响应。在突加载荷下的瞬态响应计算就是要确定系统再度得到稳定工作的能力，以便在设计中能选取最佳参数。对于一个复杂的转子－支承系统，这种计算比较复杂。下面以 Jeffcott 型转子为例叙述其计算方法。

图 6－12 为一等截面轴中间带单盘的柔性转子，其左右为相同的两个带有挤压油膜阻尼器的支承，在中间轮盘上施加突加不平衡载荷。

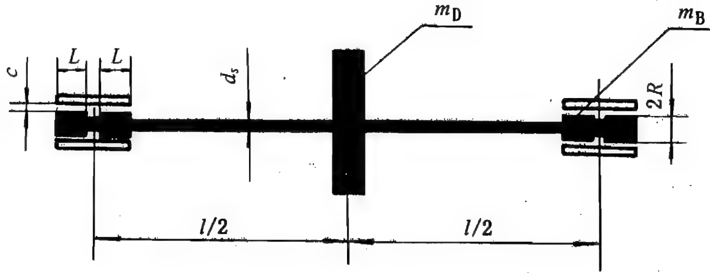


图 6－12　计算模型

（1）轴颈和轮盘的运动方程

图 6－13 和图 6－14 分别为轴颈和轮盘的受力图。

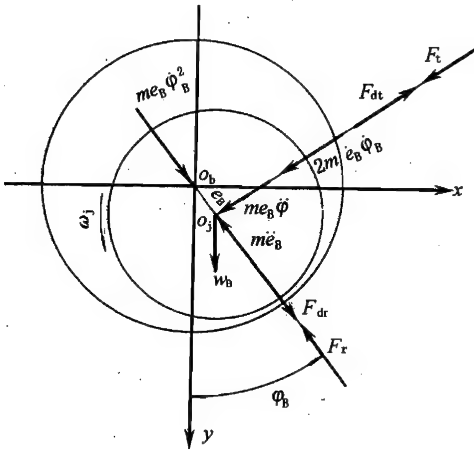


图 6－13　轴颈受力图

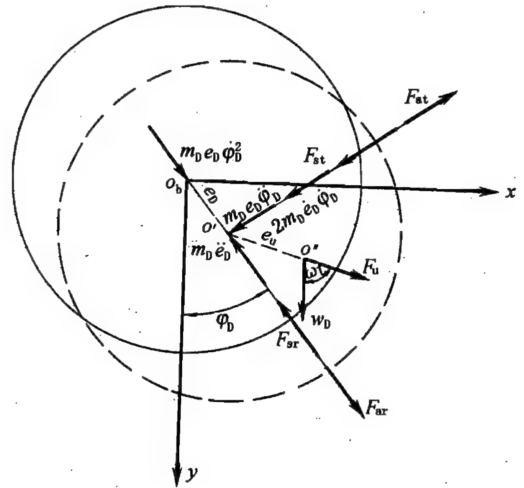


图 6－14　轮盘受力图

由力的平衡可求得轴颈和轮盘的运动方程为

$$
\begin{cases}
m_B(\ddot{e}_B - e_B\dot{\varphi}_B^2) = w_B\cos\varphi_B + F_{dr} - F_r \\
m_B(e_B\ddot{\varphi}_B + 2\dot{e}_B\dot{\varphi}_B) = -w_B\sin\varphi_B + F_{dt} - F_t \\
m_D(\ddot{e}_D - e_D\dot{\varphi}_D^2) = w_D\cos\varphi_D + F_{ar} - F_{sr} + F_u\cos(\omega t - \varphi_D) \\
m_D(e_D\ddot{\varphi}_D + 2\dot{e}_D\dot{\varphi}_D) = -w_D\sin\varphi_D + F_{at} - F_{st} + F_u\sin(\omega t - \varphi_D)
\end{cases}
\tag{6-44}
$$

式中：m_B——集中在轴颈处的参振质量；

m_D——集中在轮盘处的参振质量；

w_B——集中在轴颈处的重力；

w_D——集中在轮盘处的重力；

F_r——轴颈处油膜径向分力；

F_t——轴颈处油膜切向分力；

F_{dr}——作用在轴颈上的弹性力的径向分力；

F_{dt}——作用在轴颈上的弹性力的切向分力；

F_{sr}——作用在轮盘上的弹性力的径向分力；

F_{st}——作用在轮盘上的弹性力的切向分力；

F_{ar}——作用在轮盘上的外阻尼力的径向分力；

F_{at}——作用在轮盘上的外阻尼力的切向分力；

F_u——集中在轮盘上的不平衡力。

(2) 油膜力

用短轴承理论，π 油膜范围，端部无封严，并设定 $\omega_b = \omega_j = 0$，轴颈具有中间沟槽(图 6 - 12)。其油膜力的计算式为

$$\begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} = -2\frac{\mu RL^3}{c^3}\int_{\theta}^{\theta+\pi}\frac{e_B\dot{\varphi}_B\sin\theta + \dot{e}_B\cos\theta}{(1+\varepsilon_B\cos\theta)^3}\begin{Bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{Bmatrix}d\theta \qquad (6-45)$$

式中：$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{\dot{\varepsilon}_B}{\varepsilon_B\dot{\varphi}_B}\right)$

式(6 - 45) 右端负号表示力指向轴颈中心 O_j。

(3) 作用在轴颈和轮盘上的弹性力

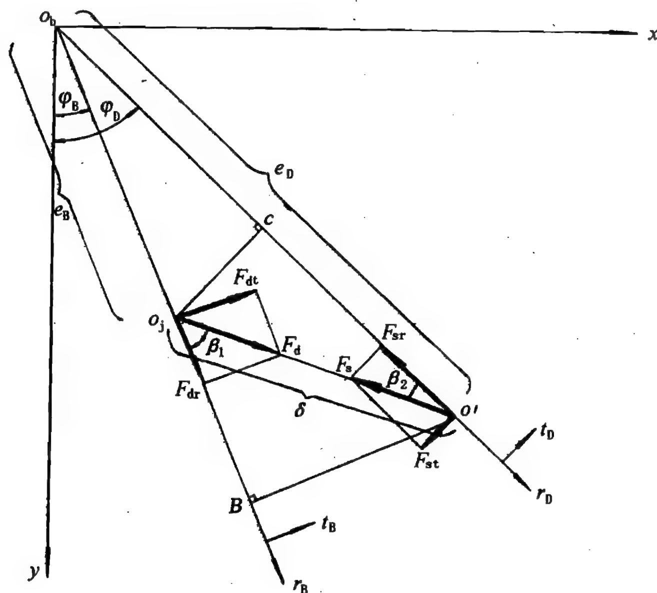


图 6 - 15 弹性力分析图

由弹性力分析图 6 - 15 得

$$\begin{cases} F_{dr} = 0.5k_s[e_D\cos(\varphi_D - \varphi_B) - e_B] \\ F_{dt} = 0.5k_s[e_D\sin(\varphi_D - \varphi_B)] \\ F_{sr} = k_s[e_D - e_B\cos(\varphi_D - \varphi_B)] \\ F_{st} = k_s[e_B\sin(\varphi_D - \varphi_B)] \\ k_s = m_D\omega_c^2 \end{cases} \qquad (6-46)$$

(4) 作用在轮盘上的外阻尼力

$$\begin{cases} F_{ar} = -2\zeta m_D \omega_c \dot{e}_D \\ F_{at} = -2\zeta m_D \omega_c \varepsilon_D \dot{\varphi}_D \end{cases} \tag{6-47}$$

式中：ω_c—— 转子系统的临界频率；

ζ—— 外阻尼系数 C_d 与临界阻尼系数 C_c 之比。

(5) 转子 - 支承系统无因次运动方程

将油膜力和弹性力等表达式代入式(6 - 44)，并令 $T = \omega t$，取微分符号 d/dT = “′”，d^2/dT^2 = “″”，得转子 - 支承系统突加不平衡力作用下的无因次运动方程。

$$\begin{cases} \varepsilon''_B = \varepsilon_B \varphi'^2_B + \dfrac{\overline{w}}{\Omega^2}\cos\varphi_B + \dfrac{1}{2\alpha\Omega^2}[\varepsilon_D \cos(\varphi_D - \varphi_B) - \varepsilon_B] - \dfrac{2B}{\Omega}[\varepsilon_B \varphi'_B I_1 + \varepsilon'_B I_2] \\ \varphi''_B = \dfrac{1}{\varepsilon_B}\left\{-2\varepsilon'_B \varphi'_B - \dfrac{\overline{w}}{\Omega^2}\sin\varphi_B + \dfrac{1}{2\alpha\Omega^2}\varepsilon_D \sin(\varphi_D - \varphi_B) - \dfrac{2B}{\Omega}[\varepsilon_B \varphi'_B I_3 + \varepsilon'_B I_1]\right\} \\ \varepsilon''_D = \varepsilon_D \varphi'^2_D + \dfrac{\overline{w}}{\Omega^2}\cos\varphi_D - \dfrac{1}{\Omega^2}[\varepsilon_D - \varepsilon_B \cos(\varphi_D - \varphi_B)] - \dfrac{2\zeta}{\Omega}\varepsilon'_D + U(t)\cos(\omega t - \varphi_D) \\ \varphi''_D = \dfrac{1}{\varepsilon_D}\left\{-2\varepsilon'_D \varphi'_D - \dfrac{\overline{w}}{\Omega^2}\sin\varphi_D - \dfrac{1}{\Omega^2}\varepsilon_B \sin(\varphi_D - \varphi_B) - \dfrac{2\zeta}{\Omega}\varepsilon_D \varphi'_D + U(t)\sin(\omega t - \varphi_D)\right\} \end{cases} \tag{6-48}$$

式中：$\alpha = \dfrac{m_B}{m_D}$；

$\varepsilon_B = \dfrac{e_B}{c}$；

$\varepsilon_D = \dfrac{e_D}{c}$；

$\zeta = \dfrac{C_d}{C_c}$；

$\overline{w} = \dfrac{w_B}{m_B c \omega_c^2} = \dfrac{w_D}{m_D c \omega_c^2}$；

$B = \dfrac{\mu R L^3}{m_B \omega_c c^3}$；

$I_1 = \displaystyle\int_\theta^{\theta+\pi} \frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\varepsilon_B\cos\theta)^3} d\theta$；

$I_2 = \displaystyle\int_\theta^{\theta+\pi} \frac{\cos^2\theta}{(1+\varepsilon_B\cos\theta)^3} d\theta$；

$I_3 = \displaystyle\int_\theta^{\theta+\pi} \frac{\sin^2\theta}{(1+\varepsilon_B\cos\theta)^3} d\theta$；

$$U(t) = \frac{Fu(t)}{m_D c \omega^2} = \begin{cases} U_0 & \text{当 } t < t_d \\ \vec{U_0} + \dot{U}_d & \text{当 } t \geqslant t_d \end{cases}$$

U_0—— 初始不平衡量(无因次)；

U_d—— 突加不平衡量(无因次)；

t_d—— 突加点时间；

c—— 油膜半径间隙。

(6) 方程组(6 - 48) 的求解

引入新的变量：

$s_1 = \varepsilon_B$; $v_1 = \varphi_B$; $p_1 = \varepsilon_D$; $q_1 = \varphi_D$;

$s_2 = \varepsilon'_B$; $v_2 = \varphi'_B$; $p_2 = \varepsilon'_D$; $q_2 = \varphi'_D$;

$s'_2 = \varepsilon''_B$; $v'_2 = \varphi''_B$; $p'_2 = \varepsilon''_D$; $q'_2 = \varphi''_D$;

代入方程组(6-46)得

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dT} = 1.0 \\ \dfrac{ds_1}{dT} = s_2 \\ \dfrac{dv_1}{dT} = v_2 \\ \dfrac{dp_1}{dT} = p_2 \\ \dfrac{dq_1}{dT} = q_2 \\ \dfrac{ds_2}{dT} = s_1 v_2^2 + \dfrac{\bar{w}}{\Omega^2}\cos v_1 + \dfrac{1}{2\alpha\Omega^2}[p_1\cos(q_1 - v_1) - s_1] - \dfrac{2B}{\Omega}(s_1 v_2 I_1 + s_2 I_2) \\ \dfrac{dv_2}{dT} = \dfrac{1}{s_1}[-2s_2 v_2 - \dfrac{\bar{w}}{\Omega^2}\sin v_1 + \dfrac{1}{2\alpha\Omega^2}p_1\sin(q_1 - v_1) - \dfrac{2B}{\Omega}(s_1 v_2 I_3 + s_2 I_1)] \\ \dfrac{dp_2}{dT} = p_1 q_2^2 + \dfrac{\bar{w}}{\Omega^2}\cos q_1 - \dfrac{1}{\Omega^2}[p_1 - s_1\cos(q_1 - v_1)] - \dfrac{2\zeta}{\Omega}p_2 + U(t)\cos(T - q_1) \\ \dfrac{dq_2}{dT} = \dfrac{1}{p_1}[-2p_2 q_2 - \dfrac{\bar{w}}{\Omega^2}\sin q_1 - \dfrac{1}{\Omega^2}s_1\sin(q_1 - v_1) - \dfrac{2\zeta}{\Omega}p_1 q_2 + U(t)\sin(T - q_1)] \end{cases} \tag{6-49}$$

可用Runge-Kutta法数值积分求解常微分方程组(6-49)，它具有足够的工程精度和良好的数值稳定性。

(7) 算例

计算模型如图6-12所示。

原始数据为：轴长 $l = 56\text{cm}$，轴直径 $d_s = 3.2\text{cm}$，轴颈长度 $L = 1.2\text{cm}$，轴颈半径 $R = 5.0\text{cm}$，轴材料弹性模量 $E = 1.94 \times 10^{11}\text{N/m}^2$，油膜半径间隙 $c = 0.01\text{cm}$，集中在轮盘处的参振质量 $m_D = 11.51\text{kg}$，集中在轴颈处的参振质量 $m_B = 3.10\text{kg}$，无因次初始不平衡量 $U_0 = 0.342$，无因次突加不平衡量 $U_d = 0.595$，转子系统的临界频率 $\omega_c = 532.5\ \text{rad/s}$，外阻尼系数与临界阻尼系数之比 $\zeta = 0.10$，润滑油粘度 $\mu = 0.69 \times 10^{-7}\text{kgf}\cdot\text{s/cm}^2$，初始不平衡量与突加不平衡量之间的夹角 $\alpha = 30°$，工作转速 $n = 5233\text{r/min}$。

计算结果示于图6-16～图6-21。

计算与试验均表明，不平衡突加后的瞬态过程非常短暂，一般只有几周的时间，很快在新的振动水平上稳定下来。突加点位置不同，其瞬态轨迹也将不同，但其最终的稳态轨迹是唯一的(图6-16和图6-17)。因而，只有在需要研究瞬态过程时才去考虑突加点在一周中的位置

合适的油膜间隙 c，可使转子系统在不平衡突加后的短时间内以不很大的新的轨迹上稳定运转，此时虽然振动较大，但尚能继续生存下去；当 c 取得不合适时，则可能使轴颈偏心率 $\varepsilon \approx 1$ 发生轴颈与轴承碰摩而使转子失去生存能力。图6-18和图6-19分别是在 $c = 0.015\text{cm}$ 和 0.05cm 时的轴心轨迹图；一定的油膜间隙只能承受一定的突加不平衡量 U_d，当 U_d 过大时，最后

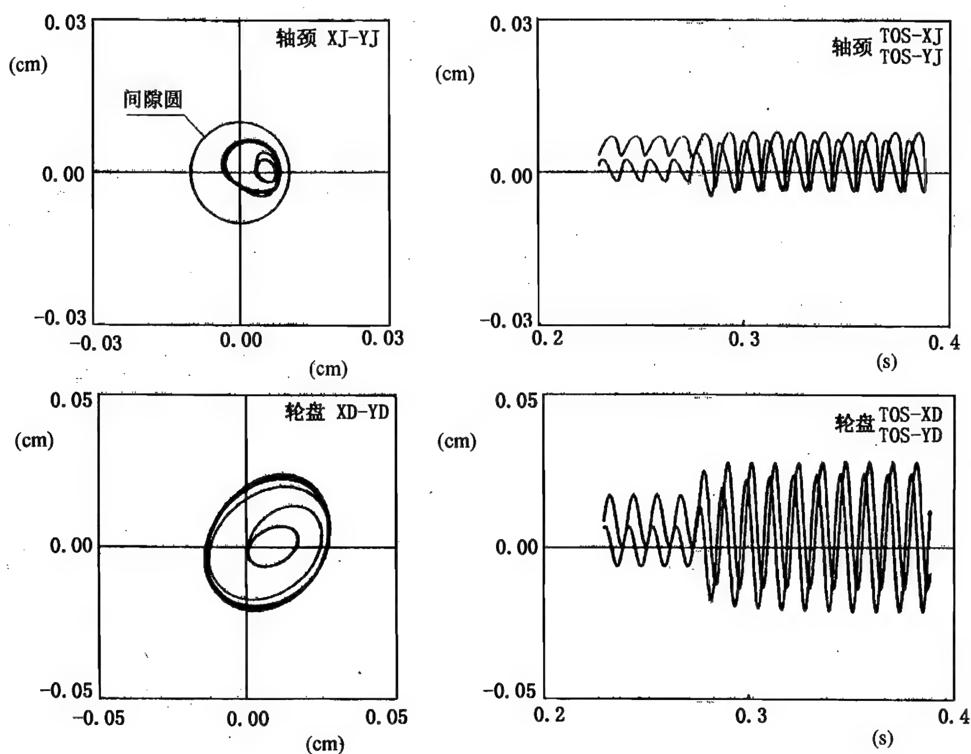


图 6－16　轴心轨迹和时域图(在一周第 500 点处突加)

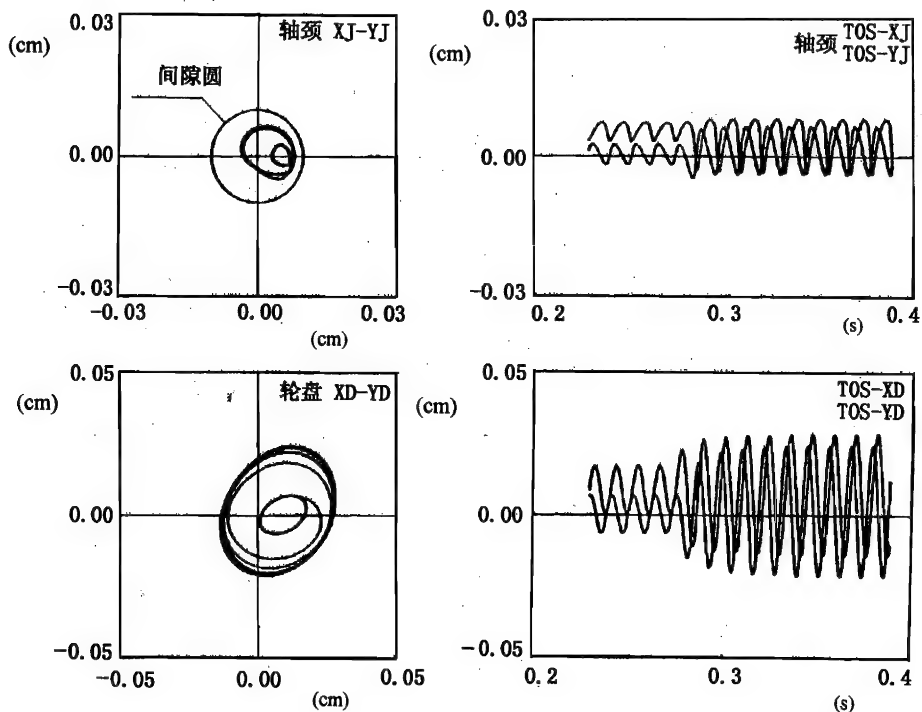


图 6－17　轴心轨迹和时域图(在一周第 700 点处突加)

的稳定轨迹将很大，转子就持续地在很大的振动状态下运转。图6－20是 $U_d = 1.5$（即175g·cm时的轴心轨迹图；外阻尼较小，轴心轨迹自然就较大，图6－21是在 $\zeta = 0.05$ 时的轴心轨迹图。

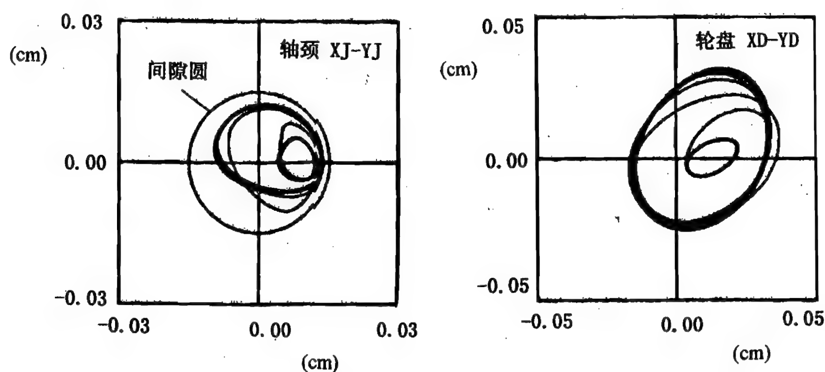


图6－18　轴心轨迹($c = 0.015$cm)

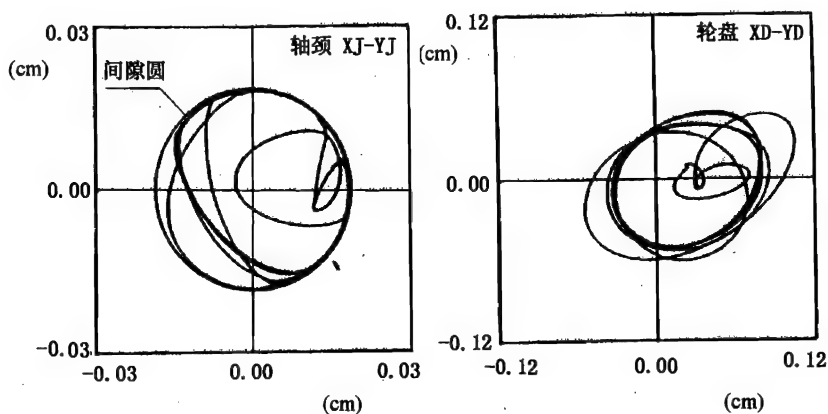


图6－19　轴心轨迹($c = 0.05$cm)

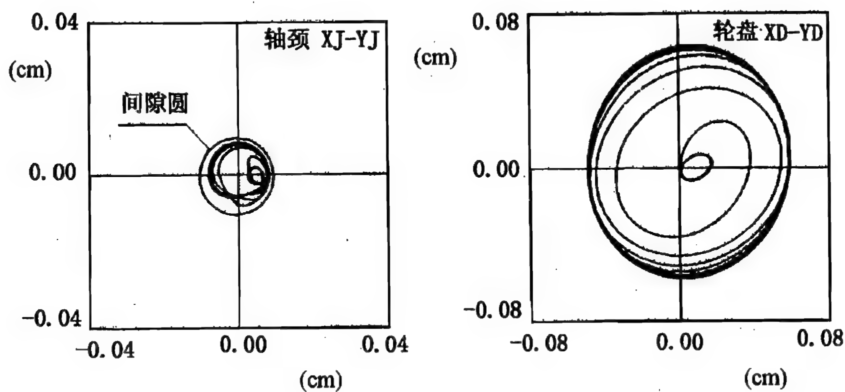


图6－20　轴心轨迹($U_d = 1.5$)

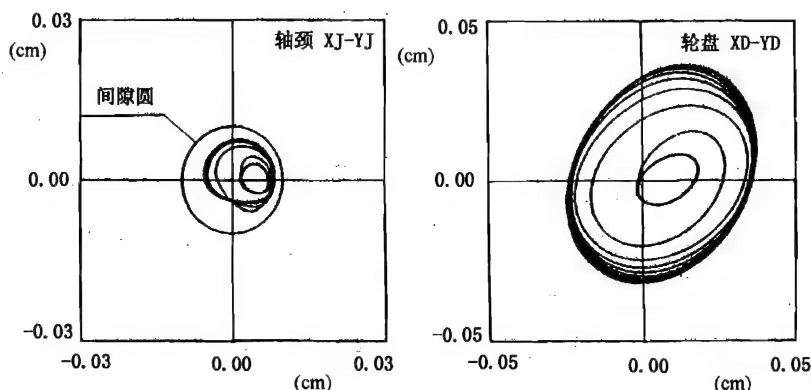


图 6-21　轴心轨迹($\zeta = 0.05$)

6.8　油膜主要参数的选择

油膜主要参数有:油膜半径间隙 c、油膜承载长度 L、油膜侧向间隙 δ、滑油流量 G 和粘度 μ 等。

(1) 油膜半径间隙 c

c 是阻尼器最重要的参数,这是由于油膜刚度和阻尼均与 c^3 成反比而决定的。实验已证明:对一定的不平衡量分布的转子,其阻尼器的 c 值有一个合适的范围,约在 $2c / D = 1.0‰ \sim 5.0‰$(D 为轴颈直径),且有一个明显的下限值,当 $2c / D$ 的取值低于此下限值时,运动系统往往是不稳定的,但过大的 $2c / D$ 值也会使振动变大。同时也应注意到一定的 $2c / D$ 值,有一个允许的最大不平衡量与其对应,即当不平衡量小于这个定值时,均能起到良好的减振作用。因此,在选取油膜间隙时,需要估计到实际转子可能存在的不平衡量大小,当不平衡量较大时,c 应放大。c 值的取定还需顾及到发动机转静子间的封严间隙,这就要求能比较准确地计算或实测出在最大可能的不平衡量下的转子弹性线、轴心轨迹和热变形等引起各部位的间隙损失,最终要保证不发生转静子的碰摩现象。上述要求往往很难做到或不能做得很充分,这个现实情况决定了必须要有多种间隙值的油膜衬套,以适应发动机调试之用。

根据经验,$2c / D = 3.0‰$ 的值,普遍能起到良好的减振作用。因此,在初次可取用此值,但最佳油膜间隙还应在实机调试中获得。

(2) 油膜承载长度 L

L 系指油膜在轴向的有效长度。L 与转子的不平衡量有直接的关系,L 的取值正比于不平衡量的大小。但实验表明,在已选取了合适的油膜间隙 c 后,L 在一定范围内的变化,对减振效果不会带来重大影响。因而对 L 的取定不必很严,有时可直接取用轴承宽度。

(3) 油膜侧向间隙 δ

δ 系指在油膜承载段两端的轴向间隙(或称端封)。该间隙的主要功用为:控制滑油流量和泄油;限制因转子弯曲变形而造成在轴颈处的倾斜;防止转子在轴向的过量窜动。若 δ 过大,会造成油膜腔内的油压下降,影响阻尼效应,因此,在实际使用中,δ 都取得比较小。实验表明,一旦油膜间隙取得合适后,即使没有端封(敞开),也不会影响减振效果。

(4) 滑油流量 G 和粘度 μ

一些试验研究表明，供给阻尼器的滑油压力在一定的范围内变化，对阻尼器的特性影响
微；若供油压力足够大时，油膜腔中的空穴区将消失，成全油膜状态，阻尼器就失去径向油膜
度而无径向承载能力，这是无定心弹簧的非同心型挤压油膜阻尼器（图 6－2）所不希望的。
常，对供油压力不提出特殊要求，多数是直接从发动机润滑系统中引来。

通到阻尼器的滑油流量的变化，能产生较大的阻尼变化，通常中等流量能产生最佳阻尼。

滑油粘度 μ 是油膜的一个重要参数，μ 越大，油膜的阻尼系数和刚度系数也越大。滑油
品质和工作温度决定了滑油的粘度。由于滑油取自发动机的润滑系统，故一般不再提出特别
求。

6.9　某些发动机的挤压油膜阻尼器参数实例

表 6－1 示出了国外某些发动机上的挤压油膜阻尼器主要参数的数据。

表 6－1　国外某些发动机的挤压油膜阻尼器主要参数的数据

发动机	轴承型式	最大转速 (r/min)	轴承直径 D(mm)	阻尼器承载长度 L(mm)	L/D	阻尼器间隙 (mm)		
						直径间隙 $2c$	相对间隙 $2c$ / D(‰)	侧向间隙 δ
A	低压前滚棒轴承	6500	132	2×14	0.212	0.218～0.294	1.65～2.23	0.0763～0.102
	低压止推轴承	6500	216	2×3.18	0.0294	0.303～0.355	1.40～1.64	0.0508～0.0762
	高压止推轴承	8850	216	2×3.18	0.0294	0.303～0.355	1.40～1.65	0.0508～0.0762
	高压后滚棒轴承	8850	222	2×7.22	0.065	0.484～0.519	2.18～2.34	0.0127～0.0381
	低压后滚棒轴承	6500	168	2×6.1	0.0762	0.137～0.198	0.816～1.18	0.0127～0.0381
B	低压前滚棒轴承	33600	80	14.5	0.181	0.152～0.178	1.90～2.22	0.0254～0.102
	高压后滚棒轴承	43000	86.4	17.3	0.20	0.076～0.102	0.884～0.190	0.0254～0.102
C	前滚棒轴承	8050	142	2×12.1	0.17	0.152～0.128	1.07～1.25	0.127～0.0381
D	高压后滚棒轴承	10000	193	2×8.6	0.089	0.152～0.195	0.788～1.01	0.0254～0.0508
E	低压后滚棒轴承	15250	101.5	2×3.81	0.075	0.191～0.216	1.885～2.13	0.127～0.0305
F	前止推轴承	13750	140	2×2.1	0.03	0.195～0.216	1.395～1.540	0.0482～0.130
G	后滚棒轴承	8750	140	25.4	0.181	0.178～0.203	1.27～1.45	0.0508～0.0762

6.10　挤压油膜阻尼器的应用范围

挤压油膜阻尼器的主要作用在于减小转子通过共振时的振幅和支承外传力。由于其结构简单、占用空间小和重量轻等优点，故最适宜于航空发动机上使用。但是，并不是所有发动机都必须用它来减振才是合适的。例如，假若可以通过本机平衡来有效地限制发动机的振动水平；利用改变转子结构形式适当调配转子质量、支承刚度和阻尼等方法来避开临界转速。在这样一些情况下，就不必再采用挤压油膜阻尼器。

挤压油膜阻尼器一般应用于下列情况：

a. 在用质量和刚性等参数调整临界转速时，会导致重量加大或其他性能下降；

b. 解决已有发动机的振动故障和延长发动机的使用寿命；

c. 新研制的发动机，在研制一开始就采用，这样可正确地设计临界转速范围，或可以较小的振动顺利地通过临界转速区。

参 考 文 献

[1] 晏砺堂编著.航空燃气轮机振动和减振.北京:国防工业出版社,1991.
[2] 顾家柳等编著.转子动力学.北京:国防工业出版社,1985.
[3] 屈维德主编.机械振动手册.北京:机械工业出版社,1992.
[4] 吕文林主编.航空发动机强度计算.北京:国防工业出版社,1988.
[5] [苏]克利宗 A C等著.转子动力学弹性支承.北京:科学出版社,1987.
[6] 张文著.转子动力学理论基础.北京:科学出版社,1990.
[7] 付才高.挤压油膜阻尼器突加不平衡响应分析计算方法.燃气涡轮试验与研究,1988,Vol.1 No.4
[8] Barrett L E and Gunter E J.Steady - state and Transient Analysis of A Squeeze Film Damper Bearing for Rotor Stability.NASA CR - 2548 ,1975.
[9] Booker J F.Dynamically Loaded Jounal Bearings Mobility Method of Solution.ASME Series D,Jounal of Basic Engineering,Vol.87,No.3,1965.
[10] Cookson R A.Theoretical and Experimental Investigation into The effectiveness of Squeeze – Film Damper Bearings Without a Centralising spring. Cranfield Institute of Technology,1980.

第7章 转子系统的稳定性

7.1 概 述

随着航空事业的发展，航空发动机的推重(功重)比越来越大，发动机变得越来越轻巧，转速越来越高，使发动机转子往往必须在几阶临界转速以上工作，却要求叶尖间隙更小。悬臂转子的广泛采用，以及前传动的动力涡轮转子，使转子系统更易于导致失稳，产生碰摩。所以，从转子动力学的观点，一台成功设计的发动机，除应满足其他一系列性能、强度、振动等要求以外，还应能避免涡轮或压气机叶尖或密封处碰摩，同时保持尽可能小的间隙，以提高效率；能避免转子动力不稳定(参考文献[1])。

转子与静子发生碰摩，曾在多种研制发动机上遇到；国外曾有过航空发动机因篦齿密封力导致转子失稳的报导(参考文献[2])；因螺旋桨转子失稳(颤振涡动)而致涡桨飞机失事的事故也曾一再发生(参考文献[3])。美国航天飞机主发动机涡轮泵转子动力不稳定，曾严重阻碍了航天飞机的发展(参考文献[4])。至于地面涡轮发电机组因油击或内摩擦导致失稳，以致造成严重事故的实例，更是屡见不鲜(参考文献[5])。

碰摩的现象极为复杂，即使对简单的模型转子，理论分析与计算也十分繁杂(参考文献[6]、[7])。即令如此，这些研究也十分有益，所展示出的碰摩以后的转子振动特征，对人们分析事故，进行诊断有很大的参考价值。当然，从避免碰摩的角度说，只要能准确预计转子与静子的响应，保留足够的间隙，就能满足要求。

涡轮机转子动力不稳定现象的特征，是转子系统发生非同步涡动，若这种运动会不断增大，以致振动很大甚至造成机器损坏，称为失稳。但是，涡轮机中的非同步转子涡动也可能是有界的，非破坏性的，因而也是允许的(参考文献[1]、[8])。

转子动力失稳的原因，通常与某种流体动压的变化，例如，流体动力轴承(参考文献[9]、[10])、密封装置(参考文献[11]、[12]、[13])、因叶尖间隙偏心产生的气动力(参考文献[12])、离心叶轮气动力(参考文献[14])、螺旋桨转子颤振涡动(参考文献[15])、空心轴或转子内积液(参考文献[18])，以及内摩擦(参考文献[16]、[17])有关。

转子失稳的物理意义，可以用图7-1来描述。

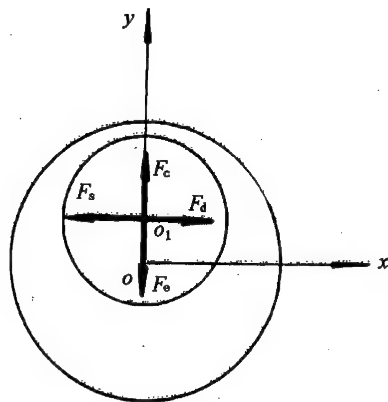


图7-1 转子失稳的物理意义

参见图7-1，若当转子在y方向产生一个偏移e时，不仅将产生一个相应的弹性恢复力，而且将产生一个$-x$方向的使转子作正进动的力，则在一定条件下，这一进动将维持与发展，以致失稳。

以最简单的Jeffcott转子为例，设圆盘上受到某种失稳因素产生的互耦合刚度力的作用，则圆盘的运动方程

为

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_{xy}y = 0 \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky - k_{xy}x = 0 \end{cases} \tag{7-1}$$

令

$$z = x + \mathrm{i}y$$

则式(7 - 1)可改写为

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz - \mathrm{i}k_{xy}z = 0 \tag{7-2}$$

它的解为

$$z = Z_0\mathrm{e}^{\lambda t}$$

代入式(7 - 2)后可得

$$m\lambda^2 + c\lambda + (k - \mathrm{i}k_{xy}) = 0 \tag{7-3}$$

其中 $\lambda = \gamma + \mathrm{i}\Omega$，将它代入式(7 - 3)，将虚部、实部分开后可得

$$\begin{cases} m(\gamma^2 - \Omega^2) + c\gamma + k = 0 \\ 2m\gamma\Omega + c\Omega - k_{xy} = 0 \end{cases} \tag{7-4}$$

由式(7 - 4)第 2 式可得

$$\gamma = \frac{k_{xy} - c\Omega}{2m\Omega} \tag{7-5}$$

可见，当 $k_{xy} = 0$，即无失稳因素时，γ 恒为负，即转子总是稳定的。

当

$$k_{xy} > c\Omega \tag{7-6}$$

时，γ 将为正值，即转子系统将失去稳定。通常，因某种失稳因素产生的互耦合刚度随转速 ω 的增大而增大，故使

$$k_{xy} = c\Omega \tag{7-7}$$

的转速，即为转子系统开始失稳的门坎转速(失稳阈速)。

从式(7 - 4)可见，当转子开始失稳时，$\gamma \approx 0$，

$$\Omega \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7-8}$$

即失稳时的转子涡动频率为转子的固有频率。

从上述分析可见，转子失稳与不平衡响应无直接的关系。

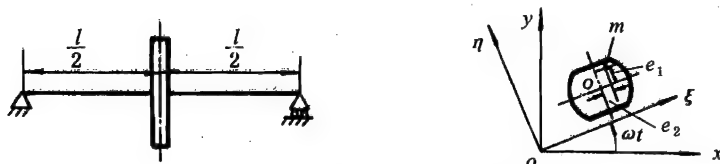
实际发动机转子远比 Jeffcott 转子复杂，一台涡轮机转子的失稳，通常是在多种失稳因素下产生的，研究稳定性的最终目的，自然是在于准确预计与防止发动机转子系统的失稳。遗憾的是，虽经近 70 年的努力，除了油膜振荡以外，其他一些失稳因素仍在不断研究之中，以求能准确地预计它们各自产生的起不稳定作用的力和避免失稳的方法，本章的内容当然也局限于当前已取得的成果。

对起不稳定作用的力预计越准确，转子系统的模型参数越准确，设计时取的失稳裕度也就可以取得越小，反之亦然。

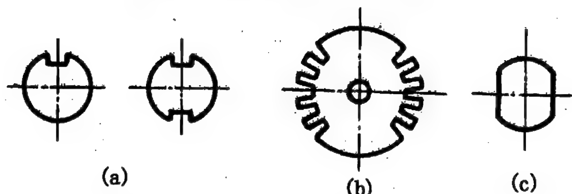
7.2　转轴各向异性引起的失稳

设有轴是具有非对称刚性的 Jeffcott 转子，如图 7 - 2 所示，它的动能、位能分别为

$$\begin{cases} T = \dfrac{m}{2}[(\dot{\eta} - \omega\xi)^2 + (\dot{\xi} + \omega\eta)^2] \\ V = \dfrac{1}{2}[\eta\xi]\begin{bmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \end{cases} \tag{7-9}$$



非轴对称刚性Jeffcott转子的振动



典型双刚度轴(转子)的截面

图 7-2 非对称刚性转子

则由拉格朗日方程可得转子的运动方程

$$\begin{cases} m\ddot{\eta} - 2m\omega\dot{\xi} + (k_1 - m\omega^2)\eta = 0 \\ m\ddot{\xi} + 2m\omega\dot{\eta} + (k_2 - m\omega^2)\xi = 0 \end{cases} \tag{7-10}$$

它的解为

$$\begin{cases} \eta = \eta_0 e^{\lambda t} \\ \xi = \xi_0 e^{\lambda t} \end{cases}$$

将其代入式(7-10)可得

$$\begin{cases} (m\lambda^2 + k_1 - m\omega^2)\eta_0 - 2m\omega\lambda\xi_0 = 0 \\ 2m\omega\lambda\eta_0 + (m\lambda^2 + k_2 - m\omega^2)\xi_0 = 0 \end{cases} \tag{7-11}$$

由 η_0、ξ_0 有非零解的条件,式(7-11)的系数行列式之值应等于零,可得特征方程

$$\lambda^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega^2)\lambda^2 + (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = 0 \tag{7-12}$$

式中,$\omega_1^2 = k_1/m$,$\omega_2^2 = k_2/m$,ω_1、ω_2 分别是转子沿 ξ 和 η 方向的横向振动固有频率。若将式(7-12)简写为

$$\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0$$

则

$$\lambda^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

故 λ^2 不为正数,即转子系统稳定的条件是

$$c > 0$$

即

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) > 0 \tag{7-13}$$

即

$$\omega < \omega_1, \omega < \omega_2$$

或

$$\omega > \omega_1, \omega > \omega_2$$

也就是说，若转子在 ω_1 与 ω_2 间的转速内运行，系统将失去稳定。

通常，航空发动机转子不会有显著的非对称刚性，这种失稳不大会发生。然而，若因某种事故，例如一圈拉紧螺栓中发生断裂，则也有发生此种类型失稳的可能性。在设计中，应采取相应措施，以确保转子刚性的对称性，如规定拉紧螺栓拧紧范围、拧紧次序等。

7.3　转子内阻尼引起的振动与失稳

当转轴作非协调进动时，轴纤维受到交变应力的作用，因材料的迟滞作用(参见图 7 – 3)，将产生内部的能量耗散，故称内阻尼。它使轴截面上的应力中性线和应变中性线不再重合，转轴除挠曲面内的弹性恢复力以外，还将产生一个切向力。在一定条件下，这个切向力可使因扰动产生的非协调进动维持与发展，造成失稳。这一现象首先被 Newkirk 和 Kimball 所发现(参考文献[19]、[20])。

许多研究者采用了不同的本构模型，以研究转轴的内阻尼(参考文献[16]、[21]、[22])。但是，在实际中，各种结构产生的阻尼，比材料内耗要大得多(参考文献[23])，例如转子中的紧配合、联轴器等。因此，这里将采用简单的 Jeffcott 转子及 Kelvin – Voight 模型，以阐明转子内阻尼引起失稳的机理，而对如何较准确地预计材料内阻尼不作更多的讨论。

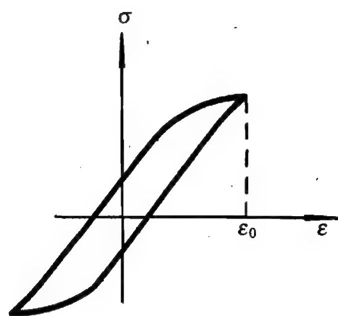


图 7 – 3　材料的迟滞回线

所谓 Kelvin – Voight 粘弹模型，其一维本构关系为

$$\sigma = E(\varepsilon + \mu \frac{d\varepsilon}{dt}) \tag{7 – 14}$$

式中：E—— 材料弹性模量；

μ—— 阻尼系数。

若

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \Omega t \tag{7 – 15}$$

则

$$\sigma = \sigma_0 \cos(\Omega t + \alpha) \tag{7 – 16}$$

式中：

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0 \sqrt{1 + \mu^2 \Omega^2} \tag{7 – 17}$$

$$\alpha = \mathrm{tg}^{-1} \mu\Omega \tag{7 – 18}$$

将式(7 – 15)、(7 – 16) 消去 t，得 σ—ε 的关系曲线，即迟滞回线的近似描述为

$$\frac{(\sigma - E\varepsilon)^2}{(E\mu\Omega)^2 \varepsilon_0^2} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2} = 1 \tag{7 – 19}$$

这是一个椭圆方程，可见它与实际迟滞回线基本相似。

7.3.1　单盘 Voight 粘弹转子的运动方程及判稳

设有一两端简支的单盘 Voight 粘弹转子，其旋转角速度为 ω，若涡动运动的角速度为 Ω，且 $\Omega \neq \omega$，则由于轴材料的粘弹性质，作用于盘上的弹性力将稍稍偏离挠曲的方向。这一性质

可以用实验证明(参考文献[23]),而其数学描述可导出如下:

取坐标系如图7-4所示。

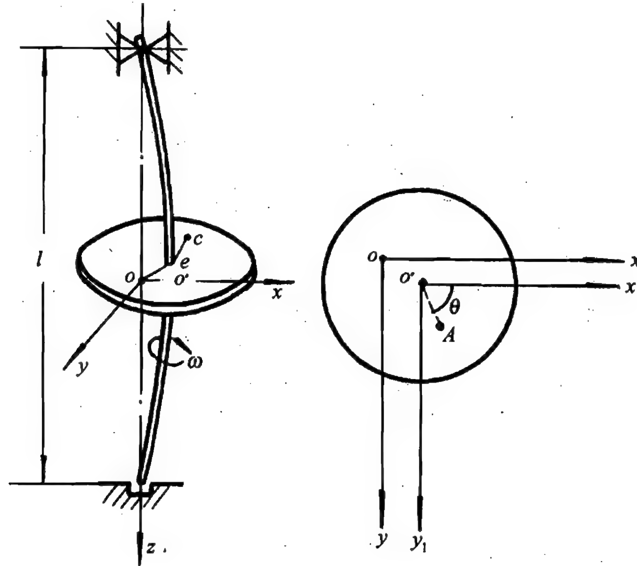


图7-4　单盘粘弹转子

显然,盘上作用的力为惯性力及恢复力,惯性力为

$$p_x = -m\ddot{x}, p_y = -m\ddot{y} \tag{7-20}$$

恢复力来自盘安装处轴截面上的剪力,即

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial z}, Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial z} \tag{7-21}$$

轴截面上任一点 A 的轴向位移,按平截面假设,为

$$u = -r\cos\theta \frac{\partial x}{\partial z} - r\sin\theta \frac{\partial y}{\partial z} \tag{7-22}$$

故应变为

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} = -r\cos\theta \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - r\sin\theta \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \tag{7-23}$$

按 Kelvin - Voigt 粘弹模型,应力为

$$\begin{aligned}\sigma_z = E\Big\{ & -x_1 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - y_1 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \mu\Big[y_1(\omega - \Omega)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - x_1(\omega - \Omega)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\Big] \\ & + \mu\Big[-x_1 \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} - y_1 \frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{7-24}$$

故弯矩为

$$\begin{cases} M_x = \int \sigma_z x_1 \mathrm{d}s = -EI\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \mu EI\Big[\frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} + (\omega - \Omega)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\Big] \\ M_y = \int \sigma_z y_1 \mathrm{d}s = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \mu EI\Big[\frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t} - (\omega - \Omega)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\Big] \end{cases} \tag{7-25}$$

盘安装处轴截面上的剪力为

$$m\ddot{\zeta} + (c_i + c_0)\dot{\zeta} + k\zeta - \mathrm{i}c_i(\omega - \Omega)\zeta = 0 \tag{7-44}$$

它的解是

$$\zeta = \zeta_0 e^{\lambda t} = \zeta_0 e^{(\lambda_0 + \mathrm{i}\Omega)t}$$

代入式(7－44)，按实部、虚部分开后可得

$$\begin{cases} m(\lambda_0^2 - \Omega^2) + (c_i + c_0)\lambda_0 + k = 0 \\ 2m\lambda_0\Omega + (c_i + c_0)\Omega - c_i(\omega - \Omega) = 0 \end{cases} \tag{7-45}$$

由此可得开始失稳的门坎转速为

$$\begin{cases} \omega = \left(1 + \dfrac{c_0 + c_i}{c_i}\right)\Omega_0 \\ \Omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases} \tag{7-46}$$

在式(7－31)、(7－46)分子中的 $c + \mu k$ 和 $c_0 + c_i$ 都代表外阻尼系数，其中 μk、c_i 代表由于内阻尼产生的正阻尼；只有分母中的 μk 及 c_i 才代表起不稳定作用的内阻尼，它是由于非协调进动(即 $\Omega \neq \omega$)而产生的。从式(7－31)、(7－46)可见，转子因内阻尼而开始失稳的门坎转速，恒大于 $2\Omega_0$。

从上述简例可见，对复杂的实际转子要导出内阻尼的确切表达式是比较困难的。由于制造及装配上的要求，发动机转子常由轴、盘、叶片、联轴器等组成，各组件之间的界面是转子内摩擦或阻尼的来源，可能引起转子动力不稳定。所以，从转子动力学的观点，建议尽可能使这些分界面数目减少；并在应力允许的情况下使配合尽可能紧，配合面尽可能小；整体式转子无疑是最好的。

7.4　流体封严装置引起的自激振动与失稳

篦齿密封是航空发动机中应用很广的封严装置，它所产生的气弹力可导致转子系统失稳(参考文献[4]、[24])。怎样准确地预计篦齿密封的气弹力，一直是转子动力学中的热门研究课题(参考文献[25]、[26])。

7.4.1　基本方程的建立

试验结果一再表明，密封气流由两个流区组成(参考文献[28]、[29])，如图7－8、图7－9所示。

假设流体是理想气体，压差主要发生在流过齿隙时，密封腔内回逆环流的速度是不变的，流动过程是绝热的，并略去质量力，则在上述基本假设及所取模型的情况下，可以导得基本方程。

连续方程：

$$\frac{1}{RT}\cdot\frac{\partial(p_i\delta_i)}{\partial t} + c_1\frac{hl}{RT}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{l}{RT}\cdot\frac{\partial(p_i w_{1i}\delta_i)}{r\partial\theta} + \frac{hl}{RT}\cdot\frac{\partial(p_i w_{2i})}{r\partial\theta} + \dot{m}_{i+1} - \dot{m}_i = 0 \tag{7-47}$$

式中，$c_1 = (r - 0.5h)/r$；h、l 分别为齿高及齿距；δ 为齿隙；R 为气体常数；T 为绝对温度；t 代表时间；$\dot{m}$ 为单位周长上的质量流率；角标 i 为序号。

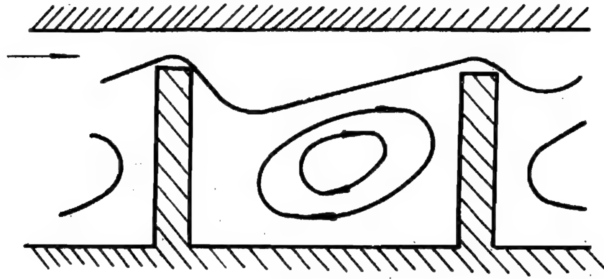


图 7－8　篦齿密封中的气流模式

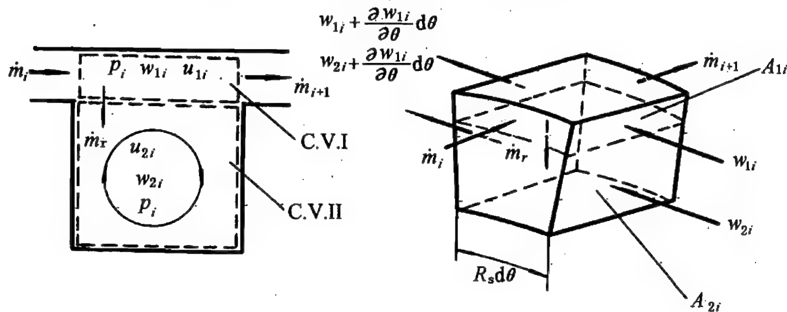


图 7－9　双控制体模型

动量矩方程：

$$-\frac{l\partial(p_i\delta_i)}{r\partial\theta}+\tau_{bt,i}l-\tau_{st,i}l$$
$$=\frac{l}{RT}\cdot\frac{\partial(p_i\delta_i w_{1i})}{r\partial t}+\frac{l}{RT}\cdot\frac{\partial(p_i w_{1i}^2\delta_i)}{r\partial\theta}+\dot{m}_{i+1}w_{1i}$$
$$-\dot{m}_i w_{1,i-1}+w_{0i}\left[c_1\frac{hl}{RT}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial t}+\frac{hl}{RT}\cdot\frac{\partial(p_i w_{2i})}{r\partial t}\right] \tag{7-48}$$

$$\tau_{rt,i}c_2^2 l-\tau_{bt,i}l-c_1 lh\frac{\partial p_i}{r\partial\theta}=c_1^2\frac{hl}{RT}\cdot\frac{\partial(p_i w_{2i})}{\partial t}+\frac{c_1 hl}{RT}\cdot\frac{\partial(p_i w_{2i}^2)}{r\partial\theta}$$
$$-w_{0i}\left[c_1\frac{hl}{RT}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial t}+\frac{hl}{RT}\cdot\frac{\partial(p_i w_{2i})}{r\partial\theta}\right] \tag{7-49}$$

式中：$c_2=r_e/r$

$$r_e=\sqrt{[(r-h)^2 l+2(r-0.5h)^2 h]/l}$$

漏气量方程：
$$\dot{m}_i=k_{1i}k_{2i}\delta_i\sqrt{\frac{p_{i-1}^2-p_i^2}{RT}} \tag{7-50}$$

式中，k_{1i} 为齿形修正系数，它接近于1；k_{2i} 是流量参数。参见参考文献[29]。

当末齿达临界流动时，如介质为空气

$$\dot{m}_N=k_{1N}\frac{0.510}{\sqrt{RT}}\cdot p_{N-1}\cdot\delta_N \tag{7-51}$$

据参考文献[29]研究，控制体Ⅰ、Ⅱ分界面处气体的切向流速为

$$w_{0i}=0.58w_{1i}+0.42w_{2i} \tag{7-52}$$

静子对气流的摩擦力的切向分力为

$$\tau_{st,i} = \frac{1}{2}\rho_i\sqrt{U_{1i}^2 + w_{1i}^2} \cdot w_{1i}n_s\left(\frac{u_{r1,i}D_{k1,i}}{\gamma}\right)^{m_s} \tag{7-53}$$

转子对气流的摩擦力的切向分力为

$$\tau_{rt,i} = \frac{1}{2}\rho_i u_{r2,i}(r_e\omega - w_{2i})n_r\left(\frac{u_{r2,i}D_{k2,i}}{\gamma}\right)^{m_r} \tag{7-54}$$

控制体Ⅰ、Ⅱ间的切向摩擦力为

$$\tau_{bt,i} = 0.142\rho_i\sqrt{(w_{1i} - w_{2i})^2 + (U_{1i} - U_{2i})^2} \cdot (w_{2i} - w_{1i}) \tag{7-55}$$

式中：$u_{r1,i} = \sqrt{U_{1i}^2 + w_{1i}^2}$；$u_{r2,i} = \sqrt{(r_e\omega - w_{2i})^2 + U_{2i}^2}$

$$\begin{cases} U_{1i} = \dot{m}_i/(\delta_i\rho_i) \\ U_{2i} = 0.206U_{1i} \end{cases} \tag{7-56}$$

流体动力学直径

$$D_{k1,i} = 2\delta_i l/(\delta_i + l) \qquad D_{k2,i} = 2hl/(h + l)$$

n_s、m_s、n_r、m_r 的值取决于雷诺数

$$Re = \frac{u_r D_k}{\gamma}$$

	n_s、n_r	m_s、m_r
$Re \leqslant 10^3$	0.104	−0.357
$10^3 < Re \leqslant 10^5$	0.0425	−0.288
$Re > 10^5$	0.0145	−0.135

7.4.2 方程的求解

7.4.2.1 零阶解

当转子无偏心时的解，就是零阶解。从式(7－47)可得

$$\dot{m} = 常数 = \dot{m}_0 (i = 1,2,3,\cdots,N) \tag{7-57}$$

从式(7－48)可得

$$\dot{m}_0(w_{10,i} - w_{10,i-1}) = (\tau_{bt0,i} - \tau_{st0,i})l \tag{7-58}$$

从式(7－49)可得

$$\tau_{rt0,i}c_2^2 = \tau_{bt0,i} \tag{7-59}$$

由式(7－50)及(7－57)，对于具有 N 个齿、$N-1$ 个密封腔的密封装置，可以导得

$$\begin{bmatrix} \sum_1^2 k_{1i}^2k_{2i}^2\delta_{0,i}^2 & -k_{12}^2k_{22}^2\delta_{0,2}^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -k_{12}^2k_{22}^2\delta_{0,2}^2 & \sum_2^3 k_{1i}^2k_{2i}^2\delta_{0,i}^2 & -k_{13}^2k_{23}^2\delta_{0,3}^2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & -k_{13}^2k_{23}^2\delta_{0,3}^2 & \sum_3^4 k_{1i}^2k_{2i}^2\delta_{0,i}^2 & -k_{14}^2k_{24}^2\delta_{0,4}^2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -k_{1,N-1}^2k_{2,N-1}^2\delta_{0,N-1}^2 & \sum_{N-1}^N k_{1i}^2k_{2i}^2\delta_{0,i}^2 \end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{Bmatrix} p_{0,1}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{0,N-1}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11}^2 k_{21}^2 \delta_{0,1}^2 p_0^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{1,N}^2 k_{2,N}^2 \delta_{0,N}^2 p_N^2 \end{Bmatrix} \tag{7-60}$$

从式(7 - 60)可求得 $p_{0,i}$，然后由式(7 - 50)求得 $\dot{m}_0$，就可以由式(7 - 56)求得 U_{1i}，U_{2i}。

式(7 - 60)适用于末齿未达临界流动时的情况。若末齿达临界流动($p_{0,N-1}/p_N >$ 临界压力比)，则式(7 - 60)等号左边矩阵中 $N-1$、$N-1$ 元素(右下角元素)应改为

$$k_{1,N-1}^2 k_{2,N-1}^2 \delta_{0,N-1}^2 + 0.26 k_{1,N}^2 \delta_{0,N}^2$$

等号右边第 $N-1$ 个元素应改为

$$0.26 k_{1,N}^2 \delta_{0,N}^2 p_N^2$$

其余均不变。

这样，若进口预旋给定以后，就可以由式(7 - 58)、(7 - 59)依次逐齿地算出 $w_{10,i}$、$w_{20,i}$，例如可用搜索法或迭代法。

7.4.2.2　一阶解

若转子有小偏移，即

$$\delta_i = \delta_{0,i} + \tilde{\delta}_i$$

且 $\tilde{\delta}_i << \delta_{0,i}$，因此可略去 $\tilde{\delta}_i$ 的二次以上微量。相应地其解将为

$$p_i = p_{0,i} + \tilde{p}_i$$

$$w_{1i} = w_{10,i} + \tilde{w}_{1i}$$

$$w_{2i} = w_{20,i} + \tilde{w}_{2i}$$

将它们代入式(7 - 47) ~ (7 - 49)，并设 k_{1i}、k_{2i}、$\tau_{bt,i}$、$\tau_{st,i}$、$\tau_{rt,i}$ 保持不变(这一微小变化比它们本身的误差要小得多)，并略去二次以上微量后可得

$$\begin{aligned}&\frac{l}{RT}(\delta_{0,i}+c_1h)\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial t}+\frac{lp_{0,i}}{RT}\frac{\partial\tilde{\delta}_i}{\partial t}+\frac{l}{rRT}(hw_{20,i}+\delta_{0,i}w_{10,i})\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial\theta}\\&+\frac{p_{0,i}\delta_{1,i}l}{rRT}\frac{\partial\tilde{w}_{1i}}{\partial\theta}+\frac{lp_{0,i}w_{10,i}}{rRT}\frac{\partial\tilde{\delta}_i}{\partial\theta}+\frac{hlp_{0,i}}{rRT}\frac{\partial\tilde{w}_{2i}}{\partial\theta}+\dot{m}_0\left(\frac{\tilde{\delta}_{i+1}}{\delta_{0,i+1}}-\frac{\tilde{\delta}_i}{\delta_{0,i}}\right)\\&+\dot{m}_0\left(\frac{p_{0,i}\tilde{p}_i-p_{0,i+1}\tilde{p}_{i+1}}{p_{0,i}^2-p_{0,i+1}^2}\right)-\dot{m}_0\left(\frac{p_{0,i-1}\tilde{p}_{i-1}-p_{0,i}\tilde{p}_i}{p_{0,i-1}^2-p_{0,i}^2}\right)=0\end{aligned}\tag{7-61}$$

$$\begin{aligned}&\frac{l}{RT}(\delta_{0i}w_{10,i}+c_1hw_{0i})\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial t}+\frac{l}{RT}p_{0,i}w_{10,i}\frac{\partial\tilde{\delta}_i}{\partial t}+\frac{l}{RT}p_{0,i}\delta_{0i}\frac{\partial\tilde{w}_{1i}}{\partial t}\\&+\frac{l}{r}\left[\delta_{0i}+\frac{l}{RT}(w_{10,i}^2\delta_{0i}+hw_{0i}w_{20,i})\right]\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial\theta}+\frac{2l}{rRT}p_{0,i}\delta_{0i}w_{10,i}\frac{\partial\tilde{w}_{1i}}{\partial\theta}\\&+\frac{lp_{0,i}w_{10,i}^2}{rRT}\frac{\partial\tilde{\delta}_i}{\partial\theta}+\dot{m}_0(\tilde{w}_{1i}-\tilde{w}_{1,i-1})+\dot{m}_0\left(\frac{w_{10,i}\tilde{\delta}_{i+1}}{\delta_{0,i+1}}-\frac{w_{10,i-1}\tilde{\delta}_i}{\delta_{0,i}}\right)\\&+\dot{m}_0w_{10,i}\left(\frac{p_{0,i}\tilde{p}_i-p_{0,i+1}\tilde{p}_{i+1}}{p_{0,i}^2-p_{0,i+1}^2}\right)-\dot{m}_0w_{10,i-1}\left(\frac{p_{0,i-1}\tilde{p}_{i-1}-p_{0,i}\tilde{p}_i}{p_{0,i-1}^2-p_{0,i}^2}\right)=0\end{aligned}\tag{7-62}$$

$$\frac{hl}{RT}(c_1^2 w_{20,i} - c_1 w_{0i})\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial t} + c_1^2\frac{hl}{RT}p_{0,i}\frac{\partial \tilde{w}_{2i}}{\partial t} + \frac{hl}{r}\left(c_1 + \frac{c_1 w_{20,i}^2}{RT} - \frac{w_{0i}w_{20,i}}{RT}\right)\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \theta} + \frac{hlp_{0,i}}{rRT}(2c_1 w_{20,i} - w_{0i})\frac{\partial \tilde{w}_{2i}}{\partial t} = 0 \tag{7-63}$$

当转子因不平衡力的作用而同步进动时，摄动为

$$x = a\cos\omega t \qquad y = b\sin\omega t$$

参见图 7－10，可以导得

$$\delta_i = \delta_{0,i} - (x\cos\theta + y\sin\theta)$$

即

$$\tilde{\delta}_i = -a\cos\theta\cos\omega t - b\sin\theta\sin\omega t$$

故可设

$$\tilde{p}_i = p_{ci}\cos\omega t + p_{si}\sin\omega t$$

$$\tilde{w}_{1i} = w_{1ci}\cos\omega t + w_{1si}\sin\omega t$$

$$\tilde{w}_{2i} = w_{2ci}\cos\omega t + w_{2si}\sin\omega t$$

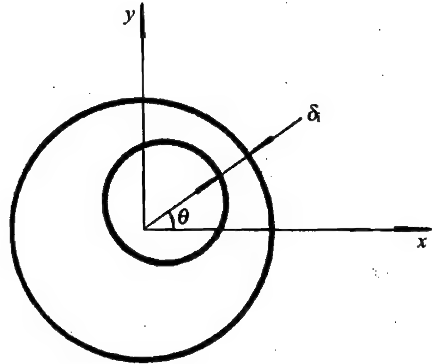


图 7－10 δ_i 的确定

将它们代入式(7－61) ~ (7－63)，并将 $\sin\omega t$、$\cos\omega t$ 项分开后可得到六个常微分方程，它们可合写为：

$$\boldsymbol{A}_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_i}{\mathrm{d}\theta} + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}_{i-1} + \boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_{i+1} = \boldsymbol{E}_i \tag{7-64}$$

式中：$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}} = [p_c, p_s, w_{1c}, w_{1s}, w_{2c}, w_{2s}]_i^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_{si}\sin\theta + \boldsymbol{E}_{ci}\cos\theta$

各个系数矩阵的表达式如下：

$$\boldsymbol{A}_i = \begin{bmatrix} a_3 & 0 & a_4 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 & a_6 \\ b_4 & 0 & b_5 & 0 & b_7 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & b_5 & 0 & b_7 \\ d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} a_9 + a_{12} & a_1\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1\omega & a_9 + a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} + b_{14} & b_1\omega & b_8 & b_3\omega & 0 & 0 \\ -b_1\omega & b_{11} + b_{14} & -b_3\omega & b_8 & 0 & 0 \\ 0 & d_1\omega & 0 & 0 & 0 & (d_2 + d_4)\omega \\ -d_1\omega & 0 & 0 & 0 & -(d_2 + d_4)\omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{13} & 0 & -b_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & 0 & -b_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{D}_i = \begin{bmatrix} a_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{10} & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{E}_{si} = \begin{Bmatrix} a_2 b\omega - a_5 a \\ (a_7 + a_8) b \\ b_2 b\omega - b_6 a \\ (b_9 + b_{10}) b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{E}_{sai} \cdot a + \boldsymbol{E}_{sbi} \cdot b
$$

$$
\boldsymbol{E}_{ci} = \begin{Bmatrix} (a_7 + a_8) a \\ a_5 b - a_2 a\omega \\ (b_9 + b_{10}) a \\ b_6 b - b_2 a\omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{E}_{cai} \cdot a + \boldsymbol{E}_{cbi} \cdot b
$$

式中，$a_1\cdots, b_1\cdots, d_1\cdots$ 分别是方程式(7－61)～(7－63)中各项的系数。

由于密封装置的进出口条件是固定的，其摄动项为零，故对于第 1 腔有

$$
\boldsymbol{C}_1 = 0
$$

对于末腔($N-1$ 腔)，有

$$
\boldsymbol{D}_{N-1}\boldsymbol{X}_N = 0
$$

对于 N 个齿，可以建立 $N-1$ 个方程，它们可合写为

$$
\boldsymbol{AX}' + \boldsymbol{BX} = \boldsymbol{E}_s \sin\theta + \boldsymbol{E}_c \cos\theta \tag{7－65}
$$

式中：$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}, \cdots \boldsymbol{X}_{N-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$

$$
\boldsymbol{X}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\theta}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{A}_i]
$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{D}_1 & & & \\ \boldsymbol{C}_2 & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \boldsymbol{D}_{N-2} \\ & & & \boldsymbol{C}_{N-1} & \boldsymbol{B}_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_s = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{E}_{s1} \\ \boldsymbol{E}_{s2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_{s,N-1} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_c = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{E}_{c1} \\ \boldsymbol{E}_{c2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_{c,N-1} \end{Bmatrix}$$

式(7－65)的解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_c\cos\theta + \boldsymbol{X}_s\sin\theta \tag{7－66}$$

代入式(7－65)后可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_s \\ \boldsymbol{X}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{E}_c \\ \boldsymbol{E}_s \end{Bmatrix}$$

故可解得

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_s \\ \boldsymbol{X}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{E}_c \\ \boldsymbol{E}_s \end{Bmatrix} \tag{7－67}$$

以上讨论适用于末齿未达临界流动的情况。

如果末齿达临界流动：则对于末腔($N-1$腔)

$$\tilde{\dot{m}}_N = k_{1N}\frac{0.510}{\sqrt{RT}}(p_{0,N-1}\cdot\tilde{\delta}_N + \delta_{0,N}\cdot\tilde{p}_{N-1})$$

故有

$$\begin{aligned} a_{10} &= 0 & a_9 &= \dot{m}_0/p_{0,N-1} \\ b_{12} &= 0 & b_{11} &= \dot{m}_0 w_{10,N-1}/p_{0,N-1} \end{aligned} \tag{7－68}$$

其余系数均不变，求解过程同前。

7.4.3 动力特性系数

密封力可表示为如下形式

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \tag{7－69}$$

F_x、F_y 可由对分布压力之积分得出，即

$$\begin{cases} F_x = -\sum\limits_1^{N-1}\int_0^{2\pi}\tilde{p}_i\cos\theta(r-h)l_i\mathrm{d}\theta \\ F_y = -\sum\limits_1^{N-1}\int_0^{2\pi}\tilde{p}_i\sin\theta(r-h)l_i\mathrm{d}\theta \end{cases} \tag{7－70}$$

式中：

$$\tilde{p}_i = p_{ci}\cos\omega t + p_{si}\sin\omega t = (p_{cci}\cos\theta + p_{csi}\sin\theta)\cos\omega t + (p_{sci}\cos\theta + p_{ssi}\sin\theta)\sin\omega t \tag{7－71}$$

式中的 p_{cs}、p_{cc}、p_{sc}、p_{ss} 由式(7－67)求得。

从 $\boldsymbol{E}_{si}$、$\boldsymbol{E}_{ci}$ 的表达式可见，可以将 $\boldsymbol{E}_c$、$\boldsymbol{E}_s$ 改记为

$$\boldsymbol{E}_c = \boldsymbol{E}_{ca} \cdot a + \boldsymbol{E}_{cb} \cdot b$$

$$\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{E}_{sa} \cdot a + \boldsymbol{E}_{sb} \cdot b$$

故由式(7－67)可解得

$$\begin{cases} p_{cci} = F^a_{cci} \cdot a + F^b_{cci} \cdot b \\ p_{csi} = F^a_{csi} \cdot a + F^b_{csi} \cdot b \\ p_{sci} = F^a_{sci} \cdot a + F^b_{sci} \cdot b \\ p_{ssi} = F^a_{ssi} \cdot a + F^b_{ssi} \cdot b \end{cases} \tag{7-72}$$

将式(7－72)代入式(7－70)，可以导得

$$F_x = -\sum_1^{N-1} \pi(r-h) l_i \left[F^a_{cci} x + \frac{1}{\omega} F^b_{cci} \dot{y} - \frac{1}{\omega} F^a_{sci} \dot{x} + F^b_{sci} y \right]$$

$$F_y = \cdots\cdots \tag{7-73}$$

故得篦齿密封的八个动力特性系数为

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \sum_1^{N-1} \pi(r-h) l_i F^a_{cci} \\ k_{xy} &= \sum_1^{N-1} \pi(r-h) l_i F^b_{sci} \\ c_{xx} &= -\frac{1}{\omega} \sum_1^{N-1} \pi(r-h) l_i F^a_{sci} \\ c_{xy} &= \frac{1}{\omega} \sum_1^{N-1} \pi(r-h) l_i F^b_{cci} \\ k_{yy} &= k_{xx} \qquad c_{yy} = c_{xx} \\ k_{yx} &= -k_{xy} \qquad c_{yx} = -c_{xy} \end{aligned} \tag{7-74}$$

由上述求解过程可见，密封之动力特性系数决定于气动参数(工况)及结构参数，而与具体的摄动值 a、b 无关。

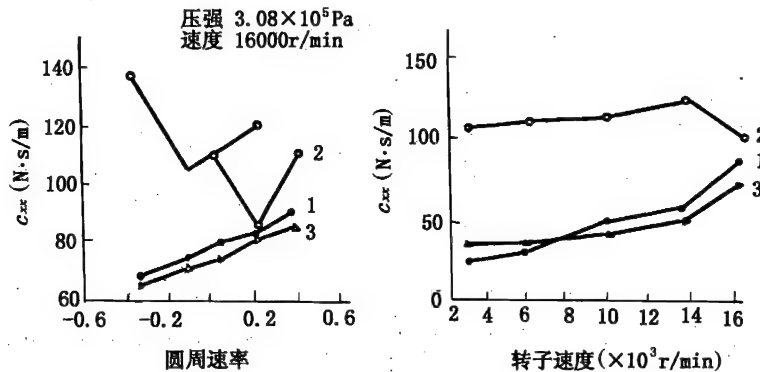


图7－11　c_{xx} 与预旋速度的关系

用上述方法对参考文献[29]中的16齿密封装置算例进行了计算，本方法所得计算结果、参考文献[29]中的计算结果及试验结果(分别用曲线1,2,3表示)绘如图7－11～图7－13。

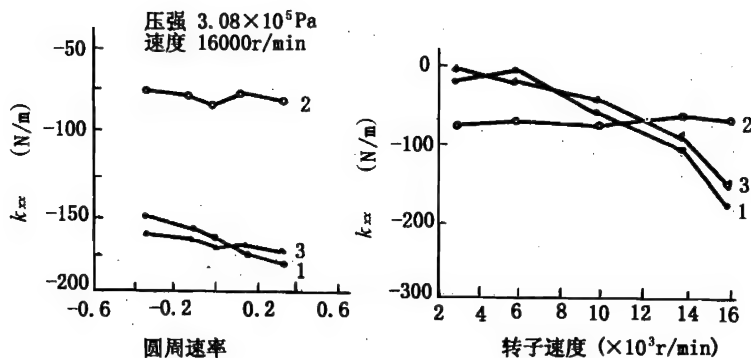


图 7-12 k_{xx} 与预旋速度的关系

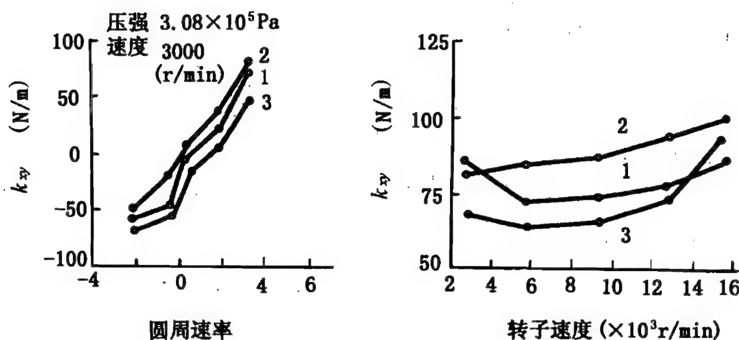


图 7-13 k_{xy} 与预旋速度的关系

7.4.4 讨论

转子的失稳,从数学上讲实际是常微分方程周期解(不平衡响应)的失稳,失稳前篦齿密封的轴心轨迹近似为

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$
$$y = A\sin(\omega t - \delta)$$

故有

$$\dot{x} = -\omega y \qquad \dot{y} = \omega x$$

代入式(7-69)后可得

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{xx} + \omega c_{xy} & k_{xy} - \omega c_{xx} \\ k_{yx} + \omega c_{yy} & k_{yy} - \omega c_{yx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{exx} & k_{exy} \\ k_{eyx} & k_{eyy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{7-75}$$

从稳定性分析的角度看,最关心的是等效互耦合刚度

$$k_{exy} = k_{xy} - \omega c_{xx} \tag{7-76}$$

若密封装置所产生的等效互耦合刚度 k_{exy} 为正,在一定条件下就可能使转子系统失稳。

从图 7-11 可见,c_{xx} 恒为正,可见只有在 k_{xy} 为正的条件下,k_{exy} 才可能为正。从图 7-11 ~ 图 7-13 还可见,c_{xx} 的计算结果与试验结果相差较大,然计算值普遍偏小,故偏于安全。k_{xy} 的计算结果与试验结果比较接近,然而仍有 20% 的误差。

更近的试验结果(参考文献[30])见图 7-14 ~ 图 7-16,从图 7-14、图 7-15 可见齿数

对密封动力特性系数的影响，由图 7－16 可见 k_{exy} 与预旋速度的关系。

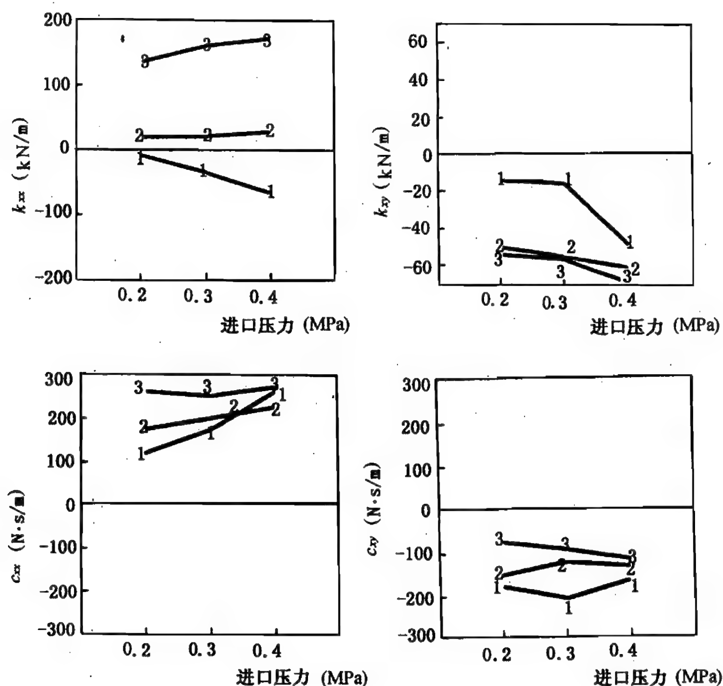


图 7－14　动力特性系数与进口压力的关系

1—21 齿；2—11 齿；3—5 齿；ω = 2000 r/min；w_{in} = －34.0 m/s

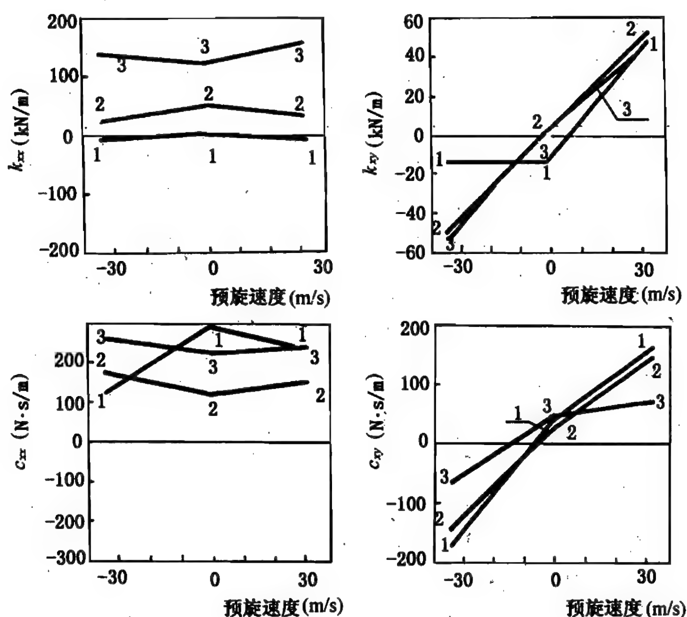


图 7－15　动力特性系数与预旋速度的关系

1—21 齿；2—11 齿；3—5 齿；ω = 2000 r/min；P_{in} = 0.2 MPa

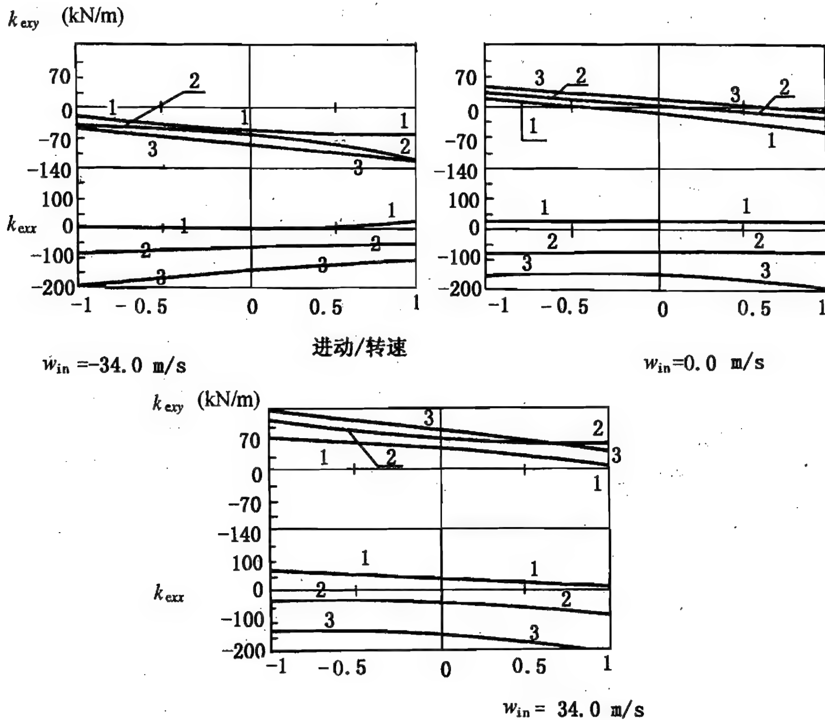


图 7-16 k_{exy} 与预旋速度的关系

ω = 1000 r/min; P_{in} = 0.3 MPa

7.5 叶轮偏心进动时周向气体力引起的自激振动

间隙流引起的涡轮机转子自激进动，最早是由 Thomas 于 1958 年提出的(参考文献[31])，Alford 随后于 1965 年再次论述了它(参考文献[12])。所谓间隙，是指封严篦齿间隙与叶尖间隙。当涡轮机转子偏心运行时，间隙流将产生一个气弹力，俗称 Thomas - Alford 力，它可能导致转子的失稳。

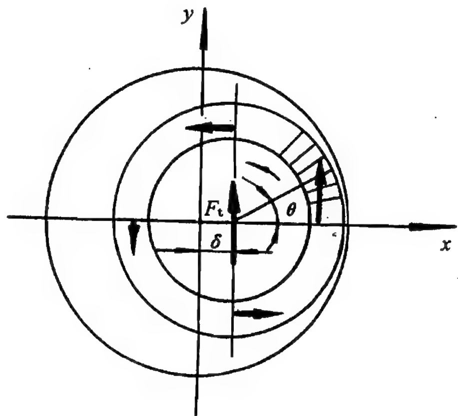


图 7-17 叶尖间隙气弹效应

叶尖间隙的气弹效应，可以用图 7-17 来说明。如果因初始扰动使涡轮产生了偏移及正进动，则叶尖的径向间隙沿周向就不再是均匀分布的。若假定工作轮前后轴向间隙内的流场沿周向是不变的，且叶尖间隙增大或减小 $0.01h$(h 是叶片高度)，轮叶效率相应地降低或提高 $\beta\%$，则叶尖间隙周向变化，使各个叶片上受到的气体切向力也互不相同。叶尖间隙越小，则叶片上受到的气体力也就越大。故燃气作用在整圈工作叶片上的合力，除了扭矩以外，还产生一个促使涡轮作正进动的

刀向合力 F_t。如果 F_t 大于阻尼力，则转子正进动就加快，因此离心力增大，又使涡轮的偏移增大，F_t 又随之增大，如此发展，产生自激。

根据上述假设，叶尖间隙因偏心而产生的切向力 F_t 近似为

$$F_t = \int_0^{2\pi} \frac{M_t}{r \cdot 2\pi r}\beta\left(\frac{\delta\cos\theta}{h}\right)\cos\theta r\mathrm{d}\theta = \frac{\beta M_t}{2rh}\delta \tag{7-77}$$

式中，r 是平均半径；M_t 是涡轮扭矩；δ 是盘心偏移。

从图 7－17 及式(7－77) 可见，F_t 比 δ 超前 90°，当 δ 为 x 方向时，F_t 为 y 方向。这相当于一个横向互耦合力，可以用一个互耦合刚度来表示：

$$-k_{yx} = k_{xy} = \frac{\beta M_t}{2rh} \tag{7-78}$$

自从参考文献[12]、[31]的先驱性研究以来，迄今为止，这一项目相对地研究较少。在慕尼黑技术大学，Thomas 的同事们获得了最详尽的试验数据，Urlichs 用一较小功率的设备(参考文献[32])，在叶片雷诺数小于 10^5 的条件下，主要测量了带冠叶片涡轮的横向互耦合力。他发现，冠上的密封是互耦合力的主要贡献者。Wohlrab 用了一较大的加压的空气涡轮(参考文献[33])，使静子出口雷诺数达到 5×10^5，但他也是仅试验了带冠叶片涡轮。

Vance 和 Laudadio(参考文献[34])在一台风扇上作了一些非常小功率的试验，测量了交叉力，但是没有气动数据。Ehrich 从压气机效率试验数据推出了 Alford 力，并且发现，当增压比高于额定值时，这一互耦合力是反进动方向的(参考文献[35])。国内洪杰也用一小型航空发动机压气机叶轮，做过试验研究，但数据较少(参考文献[36])。

近 10 年来，始终在研究并获得了较多试验数据的当数 Martinez－Sanchez 和他的同事们在 MIT 所做的工作(参考文献[37]、[38])。

他们用的试验设备是一闭环的、加压的，内充氟里昂 12 气体，平均进口压力为 200kPa，流量约 4.5 kg/s，静子出口雷诺数达 1.4×10^6，涡轮叶片不带冠，平均半径为 12.88cm，叶片高约 .19cm，转速约 3440r/min，效率 0.8。所得到的主要结果如下：

(1) β 的值在 2.43 ~ 4.04 范围内；

(2) 除了 k_{xy}、k_{yx} 以外，叶尖间隙力还将产生一个恢复力，相应的刚度也可相仿地描述为

$$k_{xx} = \frac{\alpha M_t}{2rh} \tag{7-79}$$

α 的值在 1.47 ~ 3.65 范围内；

(3) 实际的流场沿周向是不均布的，压力不均布对 β 的影响(贡献) 几乎与作功不均布的贡献一样大；

(4) β 随着流量系数 $\varphi = V_z/(\omega r)$ 的增大而减小；

(5) 当平均径向间隙减小时，α 及 β 都显著地增大，δ/h 减小 1%，β 约增大 19%，轴向间隙减小 1%，β 约增大 21%；

(6) α，即恢复力则主要是压力不均布作用的结果。

对于带冠叶片涡轮的主要研究结果为：

(1) β 的值在 5.94 ~ 6.37 范围内，主要贡献者是压力不均布；

(2) 尚无完善的理论，可用来分析密封与叶片流场的交互作用；

(3) α 的值在 4.06 ~ 6 范围内。

理论分析方法见参考文献[38]，然尚待完善。

7.6 转子内腔积液引起的自激振动

航空发动机转子的鼓筒段及轴的内腔，由于设计不当或工作失常，可能积液。只要有少的内腔积液，就会显著地影响系统的振动特性。当转子以 $\omega > \Omega$ 的高速旋转时，由于液体的粘性，液体将被旋转的内腔壁所带动而使其质心略超前于挠度，如图 7－18 所示，积液的离心力便将有一个促使转子正进动的分力，在一定条件下，转子便将产生自激的非协调进动。在另一方面，积液还将影响临界转速与同步进动。

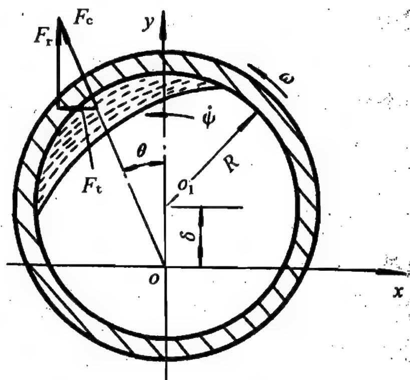


图 7－18 部分充液转子

迄今为止，对这一课题的研究主要是针对刚性转子、部分充液的情况，且都限于简单的转子模型（参考文献[39]、[40]）。

设有转子如图 7－18 所示，假定积液较少，沿转子内腔周边分布成一层薄的不等厚的膜，并正在作自激的非协调进动，频率为 Ω。若取随转子一起进动的坐标系，则在此坐标系内，积液的流型是不变的，液体在腔壁 R 处的速度是 u_1，

$$u_1 = R(\omega - \Omega) \tag{7-80}$$

自由表面的速度为 u_0。由于液膜厚度 t 很小，可假定液膜内沿径向的速度变化是线性的，即

$$u(r) = [u_1(r - R + t) - u_0(r - R)]/t \tag{7-81}$$

考虑一微扇形段液膜，连续性要求：

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2}(u_0 + u_1)t\right] = 0 \tag{7-82}$$

$$u_0 = u_1[(c/t) - 1] \tag{7-83}$$

式中，c 是待定系数。由液膜微扇形段周向的力平衡条件，且只考虑主要的力，离心力及粘性力，略去$\dfrac{\partial p}{\partial\theta}$，可以导得

$$\rho\Omega^2 tx\sin\theta = \mu[(\omega - \Omega)(R - t) - u_0]/t \tag{7-84}$$

式中，μ 为粘度；x 为挠度。

若 $t << R$，由式(7－83)、(7－84)可导得

$$c = 2t_0 \tag{7-85}$$

t_0 是 $\theta = 0$ 时的液膜厚度。

将式(7－85)代入式(7－83)，再将所得的 u_0 表达式代入式(7－84)，可以导出

$$h\sin\theta(t/t_0)^3 - (t/t_0) + 1 = 0 \tag{7-86}$$

式中：$h = (t_0^2\rho\Omega^2 x)/[2\mu(\omega - \Omega)R]$

对式(7－86)的研究表明，只在下述条件下，方程的解才有意义

$$\begin{cases} 0 \leqslant h \leqslant 4/27 \\ 1 \leqslant (t_{max}/t_0) \leqslant 1.5 \end{cases} \tag{7-87}$$

h 更大时，整圈液膜将被破坏。由式(7－86)还可知，当 $\theta = 90°$ 时，$t = t_{max}$。

由液膜微扇形段的径向力平衡条件可得

$$\rho\Omega^2(R + x\cos\theta)tR\mathrm{d}\theta + \left[\int_{R-t}^{R}\rho u^2\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta - pR\mathrm{d}\theta - \left(\frac{pt}{2}\right)\mathrm{d}\theta = 0$$

因此可解得

$$p = \frac{\rho t}{[R - (t/2)]}\left\{\Omega^2 R(R + x\cos\theta) + \frac{1}{3}(\omega - \Omega)^2 R^2\left[4\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 - 2\left(\frac{t_0}{t}\right) + 1\right]\right\} \tag{7-88}$$

液膜作用在转子上的力的 x 方向分力为

$$F_x = \int_0^{2\pi} p\cos\theta R\mathrm{d}\theta \approx \frac{1}{2}m\Omega^2 x \tag{7-89}$$

式中：$m = \int_0^{2\pi}\rho tR\mathrm{d}\theta$ 是液膜的总质量。

由转子径向力平衡条件，可得

$$F_x + M\Omega^2 x = kx \tag{7-90}$$

因此可解得

$$\Omega = \frac{\omega_\mathrm{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{m}{2M}}} \tag{7-91}$$

即转子因部分积液而产生的自激进动频率 Ω 接近(略低于)转子的横向固有频率。

液液膜作用在转子上的力的切向分力

$$F_y = \int_0^{2\pi} p\sin\theta \cdot R\mathrm{d}\theta = \rho t_0\Omega^2 R^2 I_1 + \frac{1}{3}\rho t_0(\omega - \Omega)^2 R^2 I_2 \tag{7-92}$$

式中：$I_1 = \int_0^{2\pi}(t/t_0)\sin\theta\mathrm{d}\theta$

$I_2 = \int_0^{2\pi}4(t_0/t)\sin\theta\mathrm{d}\theta + I_1$

由转子的切向力平衡条件可得

$$F_y = c\Omega x \tag{7-93}$$

此处 c 是阻尼系数。

将式(7－92)代入式(7－93)可得

$$a_2\left(\frac{\omega - \Omega}{\omega_\mathrm{n}}\right)^2 + a_1\left(\frac{\omega - \Omega}{\omega_\mathrm{n}}\right) + a_0 = 0 \tag{7-94}$$

式中：$a_2 = I_2/[3(\Omega/\omega_\mathrm{n})^2]$

$a_1 = -4dhI_3^3/[\pi^2(\Omega/\omega_\mathrm{n})^3]$

$a_0 = I_1$

式中，d 是确定系统稳定性的参数：

$$d = \zeta / [Re(m/M)(v/\pi R^2)^2]$$

液体的雷诺数取为

$$Re = \rho\omega_\mathrm{n}R^2/\mu$$

阻尼比

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kM}}$$

$$I_3 = v/(Rt_0)$$

$$v = m/\rho$$

开始产生自激进动的转速，可借使方程的系数取极限值，即相应于 $x \to 0$ 的条件确定。可以导得，当 $x \to 0$ 时，$h \to 0, I_1 = h\pi, I_2 = -3h\pi, I_3 = 2\pi$，代入式(7-94)可得

$$-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left[2\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2 - 32d\right]\frac{\omega}{\omega_n} + 32d\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right) = 0 \tag{7-95}$$

由此可得阈速 ω_0

$$\frac{\omega_0}{\omega_n} = \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)\left\{1 - \frac{16d}{(\Omega/\omega_n)^2} + \left[1 + \frac{(16d)^2}{(\Omega/\omega_n)^4}\right]^{1/2}\right\} \tag{7-96}$$

由式(7-91)、(7-96)可知，自激进动频率取决于 ω_n 及 $\frac{m}{M}$，开始产生部分积液自激进动的转速 ω_0 取决于 ω_n、$\frac{m}{M}$ 及系统参数 d。当 d 很小时，ω_0 接近于 2Ω，即略小于 $2\omega_n$。

随着转速的增大，进动幅值急剧增大，ω 达到 $1.06\omega_0$ 时，液膜破坏，自激进动消失。

在参考文献[40]中，研究了部分积液较多的两端简支的刚性转子，由于液膜较厚，故在分析中考虑了 $\frac{\partial p}{\partial \theta}$、$\frac{\partial p}{\partial r}$，及 V_r 的影响，得到的结果为产生部分积液自激进动的失稳区为

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mu}} < \frac{\omega}{\omega_n} < 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{e^2-1}{2}\mu} \tag{7-97}$$

式中：$e = \dfrac{R}{R-t}$

参考文献[39]研究了两端弹支转子部分积液后的自激进动，得到的结果为失稳区有两个，相应在

$$\frac{\omega}{\omega_n} \approx 0.95 \sim 1.2 \text{ 及 } 1.8 \sim 2.05 \tag{7-98}$$

由上述可见，模型或基本假设的稍有区别，所得结果就有显著的差异。考虑到转子总是不允许在临界转速附近工作，参考文献[18]、[39]的理论分析结果又有试验验证，可以认为 $\frac{\omega}{\omega_n} = 1.8 \sim 2.05$ 可能出现部分积液引起的自激进动，有一定参考价值。

7.7 转-静子间干摩擦引起的自激振动

由于追求高的推重(功重)比及低的耗油率，航空发动机的转速越来越高，而各种间隙(叶尖、密封……)越来越小，所以在工作时极易发生转子-静子之间的接触与摩擦，研制中的发动机尤其如此。如果不能及时发现与排除，可能导致严重的损坏。可以说，这是航空发动机较易遇到的一种自激振动。

另一方面，干摩擦引起的自激又是一种最为复杂的振动现象。它易于防止，只需在各处留有足够的间隙，保证在发动机运行中不会因各种变形而导致间隙消失，就不会产生转-静子间的干摩擦。然而，这必将付出一定的效率降低的代价。由于缺乏足够的经验及追求高效率，某一间隙过小并在试车中发生摩擦，就屡见不鲜了。

怎样才能发现发动机试车中是否出现了干摩擦呢？必须深入了解转-静子间干摩擦所引起的各种特殊振动现象。由于它的复杂性，迄今为止，所作研究大都是以简单的 Jeffcott 转子作为模型。尽管如此，这些研究成果对发动机转-静子间干摩擦的监视与诊断，有极重要的参考

价值。

7.7.1　全周摩擦

转 - 静子间的干摩擦现象,显然可分为三个阶段,间隙丧失前的(未摩)振动状态,摩擦严重阶段的全周摩擦振动状态,及从开始发生碰摩到全周摩擦前的碰摩振动状态。

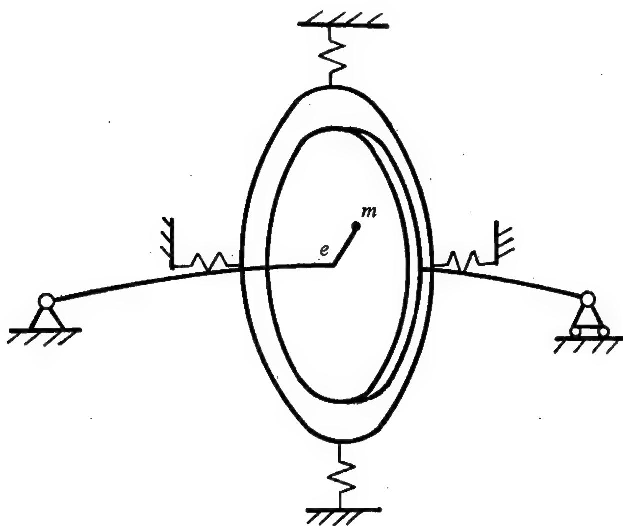


图 7 - 19　全周摩擦的 Jeffcott 转子

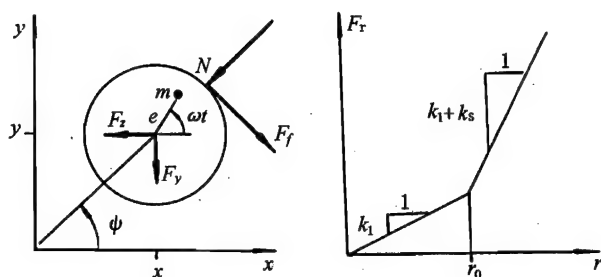


图 7 - 20　摩擦时受到的力及等效刚度

参见图 7 - 19、图 7 - 20,当盘的径向位移 r 大于间隙 r_0,即转子与静子接触,并发生摩擦时,假定正压力

$$N = k_s(r - r_0)$$

摩擦假定为库仑摩擦,即摩擦力

$$F_f = \mu N$$

由力的平衡关系可导出盘的运动方程

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x + k_s\left(1 - \dfrac{r_0}{r}\right)(x - \mu y) = me\omega^2\cos\omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + k_1 y + k_s\left(1 - \dfrac{r_0}{r}\right)(\mu x + y) = me\omega^2\sin\omega t \end{cases} \tag{7-99}$$

式中：$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

上式可改写为

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + k_2 x - k_s \mu y = me\omega^2 \cos\omega t + k_s r_0 \cos\psi - k_s r_0 \mu \sin\psi \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + k_2 y + k_s \mu x = me\omega^2 \sin\omega t + k_s r_0 \mu \cos\psi + k_s r_0 \sin\psi \end{cases}$$

式中：$k_2 = k_1 + k_s$。若令

$$\zeta = x + \mathrm{i}y$$

上式可合并为

$$m\ddot{\zeta} + c\dot{\zeta} + k_2 \zeta + \mathrm{i}k_s \mu \zeta = me\omega^2 e^{\mathrm{i}\omega t} + k_s r_0 e^{\mathrm{i}\psi} + \mathrm{i}k_s r_0 \mu e^{\mathrm{i}\psi}$$

它的解为

$$\zeta = \zeta_0 e^{\mathrm{i}(\omega t + \psi_0)}$$

$$\psi = \omega t + \psi_0$$

代入上式，并将实部、虚部分开后可得

$$\zeta_0 (k_2 - m\omega^2) = k_s r_0 + me\omega^2 \cos\psi_0$$

$$\zeta_0 (c\omega + k_s \mu) = k_s r_0 \mu - me\omega^2 \sin\psi_0$$

由于摩擦时必有 $\zeta \geqslant r_0$，故可记为

$$\zeta_0 = r_0 + \Delta$$

代入上式后可得

$$r_0 (k_1 - m\omega^2) + \Delta (k_2 - m\omega^2) = me\omega^2 \cos\psi_0$$

$$r_0 c\omega + \Delta (c\omega + k_s \mu) = -me\omega^2 \sin\psi_0$$

因此有

$$\Delta^2 [(k_2 - m\omega^2)^2 + (c\omega + k_s\mu)^2] + 2\Delta r_0 [(k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2) + c\omega(c\omega + k_s\mu)] + [r_0^2 (k_1 - m\omega^2)^2 + r_0^2 c^2 \omega^2 - m^2 e^2 \omega^4] = 0$$

若将它简记为

$$a\Delta^2 + 2b\Delta + d = 0$$

则

$$\Delta_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ad}}{a}$$

因 Δ 必须为正实数，且 a 恒为正，故 Δ（也即 ζ_0）可能有解的情况如下表所示

表7-1 解与 b、d 的关系

d \ b	>0	<0
>0	无解	$\Delta+$ 及 $\Delta-$
<0	$\Delta+$	$\Delta+$

可见，若 $b > 0, d > 0$ 或 $b < 0, d > 0, b^2 - ad < 0$，则 Δ 无解，即不会产生全周摩擦。当 $d < 0$ 时，Δ 只有一个解；当 $d > 0, b < 0$ 时，可能有两个解，即双稳态现象，或跳跃现象（与挤压油膜轴承中相仿），参见图7-21。

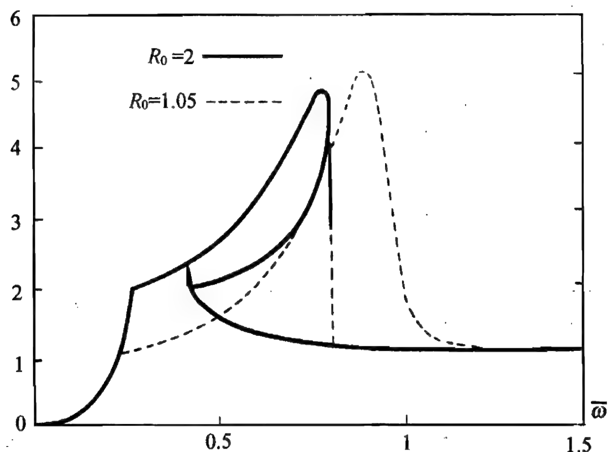


图 7－21　转子全周摩擦时的振动特性

由 b 的表达式可见，近似地有 $\omega = \sqrt{k_1/m} = \Omega_1$ 或 $\omega = \sqrt{k_2/m} = \Omega_2$ 时，$b \approx 0$；$\Omega_1 < \omega < \Omega_2$ 时，$b < 0$；$\omega < \Omega_1$ 或 $\omega > \Omega_2$ 时，$b > 0$。

由 $d = 0$，可以解得，当

$$\omega = \Omega_3 \text{或} \Omega_4$$

时，$d = 0$；其物理意义如图 7－22 所示。

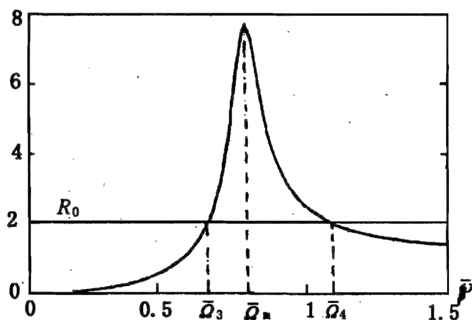


图 7－22　无摩擦情况下的振动特性

若

$$\Omega_3 < \omega < \Omega_4$$

则

$$d < 0$$

若

$$\omega < \Omega_3 \quad \text{或} \quad \omega > \Omega_4$$

则

$$d > 0$$

综上所述可见，因通常 k_2 显著地大于 k_1，Ω_2 显著大于 Ω_1；而 Ω_3、Ω_4 较接近于 Ω_1，故 b、d 及 $b^2 - ad$ 之值的符号如表 7－2 所示。

表 7－2　b、d、$b^2 - ad$ 值的符号

		Δ +	Δ +	Δ ±		
$b^2 - ad$	+	+	+	+	−	−
d	+	−	−	+	+	+
b	+	+	−	−	−	+
	0	Ω_3	Ω_1	Ω_4	Ω_5	Ω_2

表中的 Ω_5 由 $b^2 - ad = 0$ 解得，若 $b^2 - ad < 0$，则 Δ 无解。

由表 7－1、表 7－2 可见，在通常情况下，全周碰摩只可能在 $\Omega_3 < \omega < \Omega_5$ 的转速范围内

发生。在 $\Omega_4 < \omega < \Omega_5$ 的转速范围内，可产生跳跃现象，它是由撞击等扰动所引起。

若间隙 r_0 甚小，发生全周摩擦的转速范围将只在 $\Omega_3 \sim \Omega_4$ 内，且 $\Omega_4 > \Omega_2$，如表 7－3 所示

表 7－3　b、d、b^2-ad 值的符号

		Δ＋	Δ＋	Δ＋	
b^2-ad	＋	＋	＋	＋	＋
d	＋	－	－	－	＋
b	＋	＋	－	＋	＋
	0	Ω_3	Ω_1	Ω_2	Ω_4

由表 7－1、表 7－3 可见，当 r_0 很小时，全周摩擦只可能在 $\Omega_3 \sim \Omega_4$ 的转速范围内发生，且不会有跳跃现象。

7.7.2　局部摩擦(碰摩)

由于各种扰动(如工况、流场的变化；飞行状况的变化，如颠簸、转弯 …… 发动机内部配合状况的变化 ……)及制造、装配误差造成的偏心，常先发生局部摩擦的现象。即在转子每一转内，与定子碰摩一次或多次。局部摩擦的不断加剧，使不平衡度剧增，导致全周摩擦的发生。

局部摩擦时的碰摩现象，极为复杂，它可能是周期的、概周期的或混沌的。对这一现象的研究尚局限于最简单的模型转子系统。即便如此，研究中所发现的各种现象，可能用于未来的故障诊断系统，从而提高对碰摩的诊断准确度。

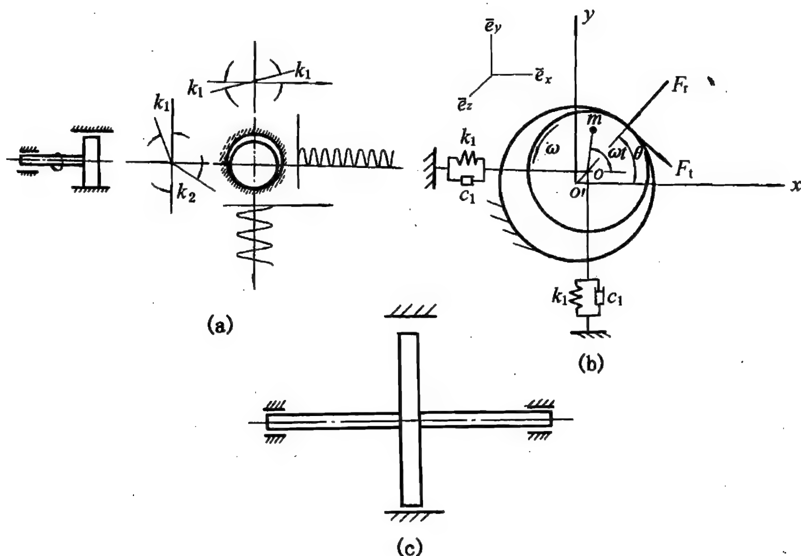


图 7－23　转子碰摩的模型

这些研究都是以 Jeffcott 转子为对象，只是在转子是否偏置、轴承是否为颈轴承等方面稍有区别，见图 7－23。

这些研究的共同点是都把碰摩时的接触力处理为一个弹簧力，摩擦力是一个库仑摩擦力，它们在转子挠度(偏移)大于间隙(即转子与静子相接触时)时起作用，运动方程都是借数值积

分的方法求解。

现以 Jeffcott 转子模型为例，导出其运动方程。设间隙为 r_0，转子的挠度为 r，即

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

当 $r>r_0$ 时，转子将受到接触力及摩擦力的作用。由此，可导出盘的运动方程

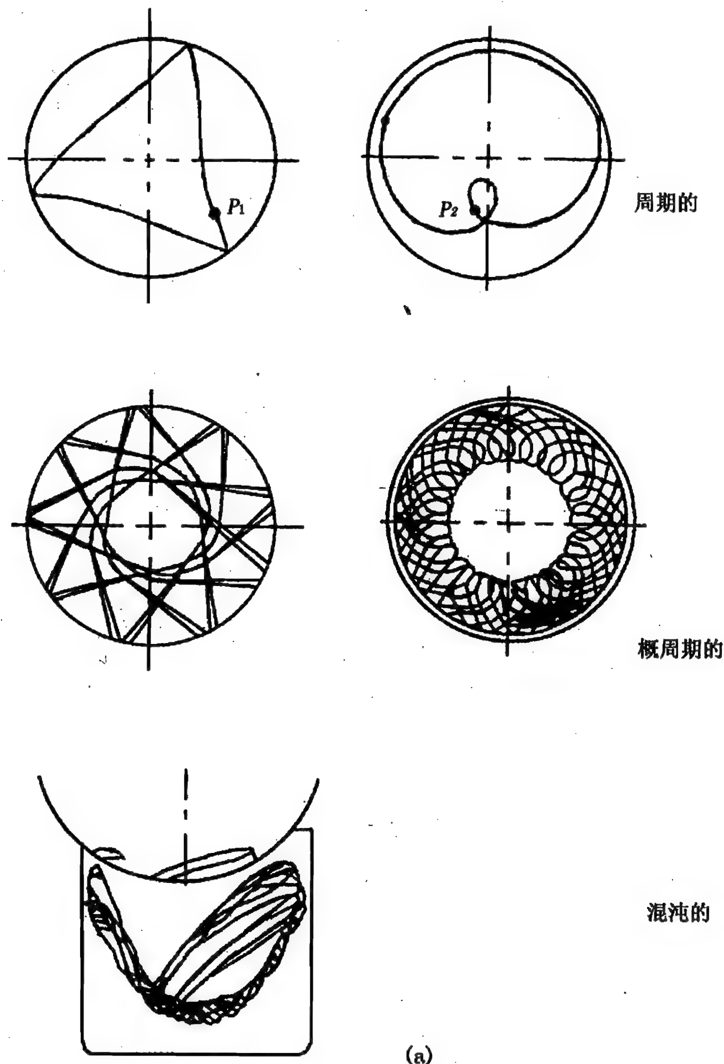
$$\begin{cases} m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-k_c(r-r_0)(\cos\psi-\mu\sin\psi)\delta_s+e\omega^2\cos\omega t \\ m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=-k_c(r-r_0)(\sin\psi+\mu\cos\psi)\delta_s+e\omega^2\sin\omega t-mg \end{cases} \tag{7-100}$$

式中：k、k_c 分别为轴的刚度及接触刚度，μ 是摩擦系数，δ_s 是单位阶跃函数，即

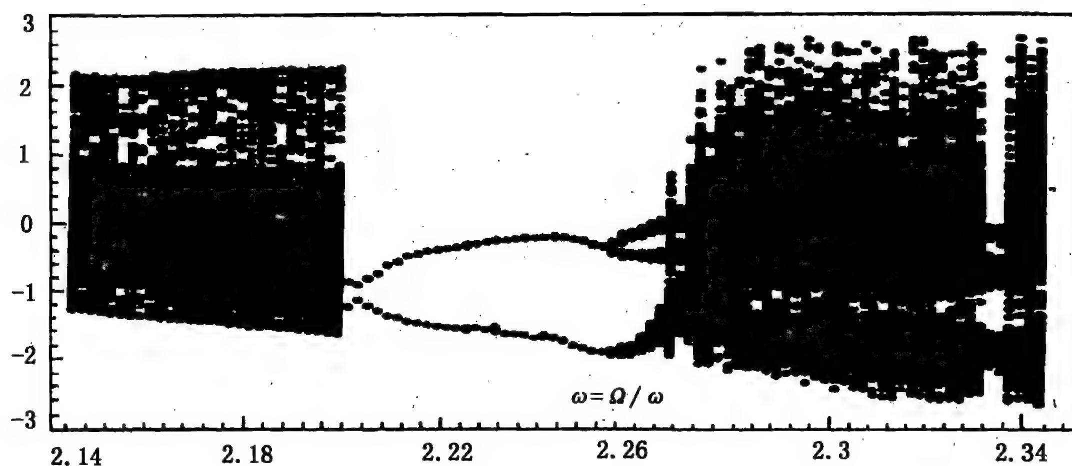
$$\delta_s=\begin{cases}0, r\leqslant r_0\\1, r>r_0\end{cases}$$

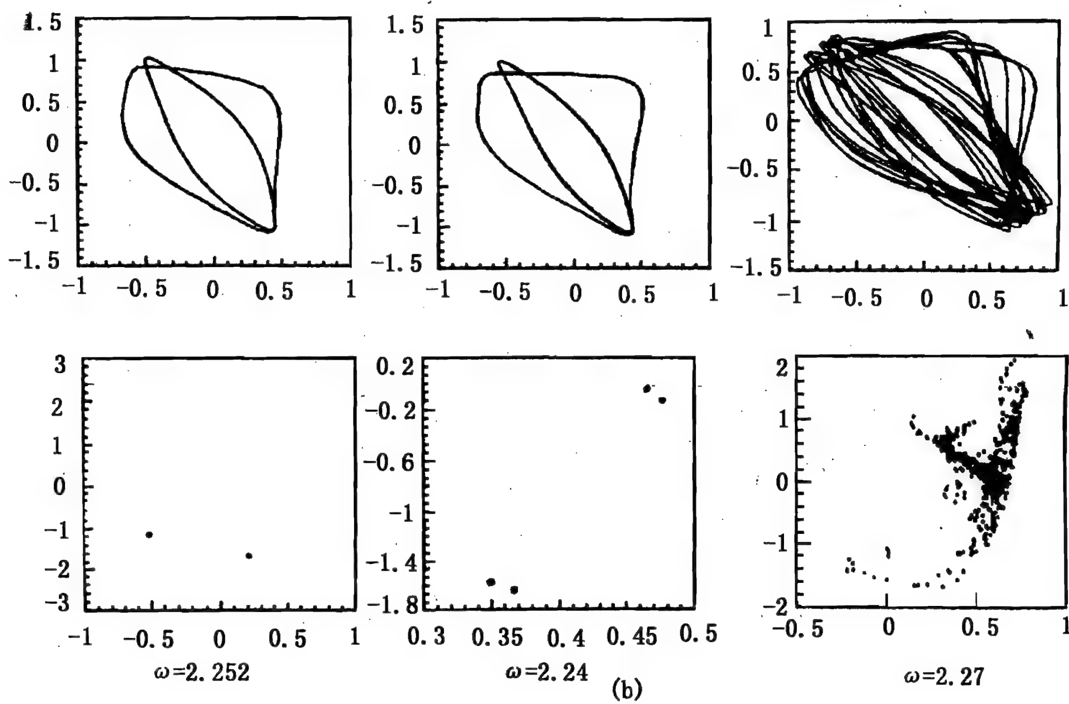
方程(7 – 100)可以借数值积分求解，例如用 Euler 后差法或 Euler – Newmark 法，为了找出混沌解，对积分步长要恰当选择。

算例及其计算结果如图 7 – 24 所示。



(a)


3
2
1
0
-1
-2
-3
ω=Ω/ω
2.14
2.18
2.22
2.26
2.3
2.34


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
3
2
1
0
-1
-2
-3
0.2
-0.2
-0.6
-1
-1.4
-1.8
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
ω=2.252
ω=2.24
ω=2.27

(b)

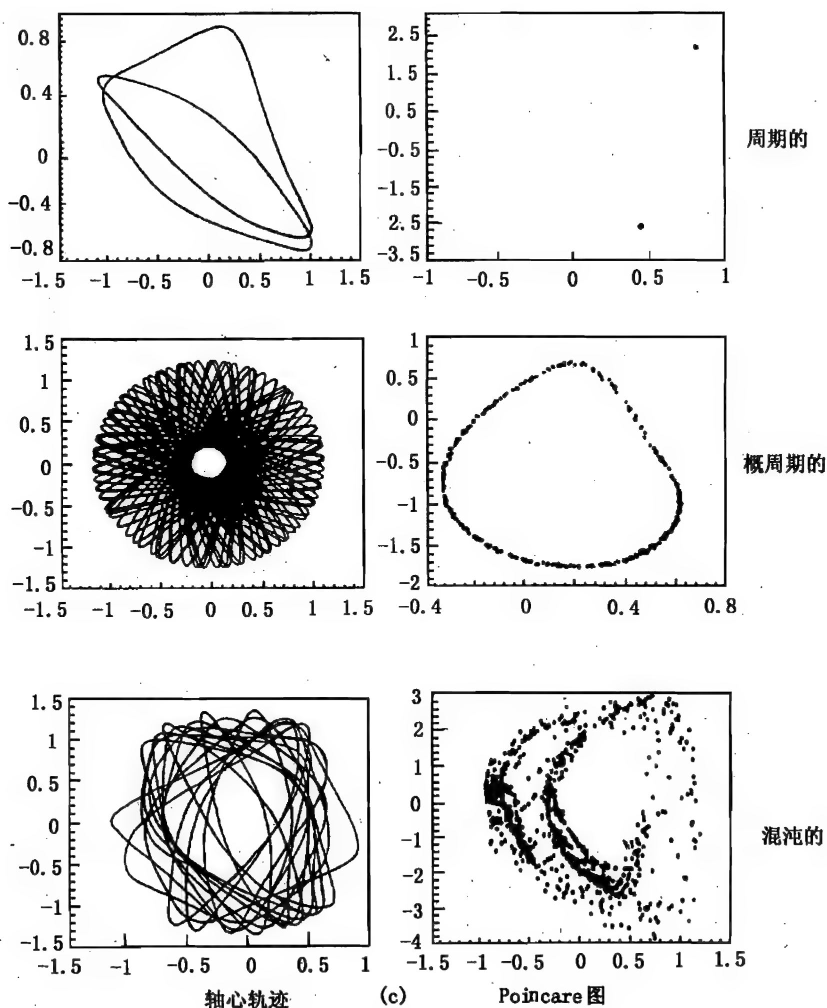


图 7-24 Jeffcott 转子的碰摩现象

图 7-24(a) 所示为稳态振动时的各种轴心轨迹，包括 P_1(每一个运动周期内一转，即同频振动)、P_2(每一个运动周期内二转，即周期 2 的分频振动)、概周期的及混沌的。

图 7-24(b) 所示为混沌与周期运动交替出现的分叉图。

图 7-24(c) 展示了分叉图、轴心轨迹与 Poincare 图之间的联系，物理概念清楚。

7.8 螺旋桨转子的颤振涡动

螺旋桨转子的颤振涡动，是桨叶气弹力引起的螺旋桨转子失稳现象。如图 7-25 所示，假如螺旋桨转子因受到一个扰动而产生偏斜，则在盘偏斜过程中，每一桨叶将有一个相应于这一偏斜角速度的线速度，使位于盘心外侧的桨叶气流的相对轴向速度减小，攻角增大；位于盘心内侧的桨叶，情况正好相反。因此就形成一个使螺旋桨转子产生进动的力，在一定条件下就导致螺旋桨转子失稳。1960 年两架美国涡桨飞机因这种事故而失事(参考文献[3])，此后颤振涡

动就成为美国涡桨飞机新机设计中规定的分析内容(参考文献[44])。

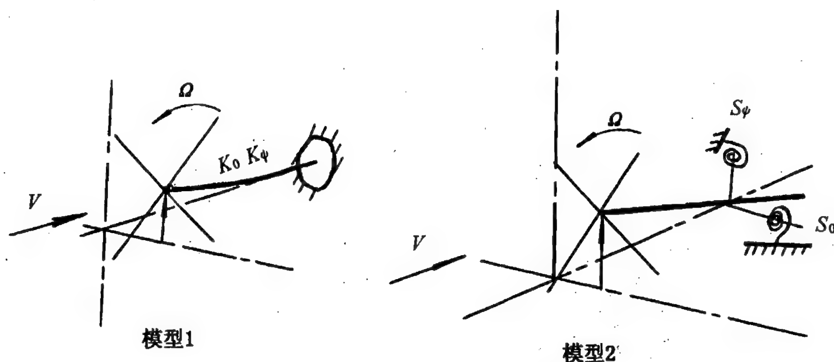


图 7-25 螺旋桨转子颤振涡动机理

根据美国民航条例修正案4b-16规定:“即令发动机安装结构中任一个构件损坏,也不应导致螺旋桨转子颤振涡动。”

7.8.1 力学模型

7.8.1.1 螺旋桨安装法兰处的动刚度

桨轴-支承系统是一个弹性体系统,它的振动必将影响螺旋桨转子的颤振涡动特性。但是,它的结构极为复杂,难以用有限元方法来处理。假如已有样机,则就可能借试验实测桨轴头处的动刚度,以此准确地反映桨轴-支承系统的影响。

由于螺旋桨通常在恒速状态下工作,故只需测这一频率下的安装在飞机上的螺旋桨发动机轴端的动柔度(动影响系数)矩阵。

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{n} = \mathrm{v},\mathrm{h}) \tag{7-101}$$

则相应的动刚度矩阵为

$$K_{\mathrm{d,n}} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{n}}^{-1} \tag{7-102}$$

式中,注脚1代表力、位移,2代表力矩、转角。例如 S_{11} 就代表单位激振力引起的位移,S_{12} 就代表单位激振力矩引起的位移。

7.8.1.2 螺旋桨

桨盘用以连接螺旋桨及桨轴,传递拉力及扭矩,承受螺旋桨的气动弯矩及离心力,因此都做得很坚实,可视为一个刚体。

桨毂用以连接可以变距的桨叶与桨盘,相对桨盘要柔一些,通常为圆筒形。由于它的尺寸不大,故可以视为一段无质量的弹性梁,而将其质量集中于两端。即一端附于桨盘,另一端附于桨叶的根部截面。

桨叶是一个弹性体,为了降阶,采用截阶的模态坐标。桨叶的模态由试验模态分析得到。由于螺旋桨转速及可能发生的自激进动(颤振涡动)频率都不高,故只需取桨叶的少数几个低阶模态。

7.8.1.3 气动力

螺旋桨转子的颤振涡动,正是作用在桨叶上的气动力变化造成的,试验研究将能提供更为

准确的原始数据，例如对桨叶的风洞试验数据，或对桨叶剖面－翼型的吹风数据。根据涡动及桨叶振动时的攻角改变，确定其阻力与升力系数的改变，借数值积分得到整个桨叶上的气动力变化值。

若取模型转子及坐标系如图 7－26 所示。因涡动而使桨叶攻角变化的情况如图 7－27 所示。

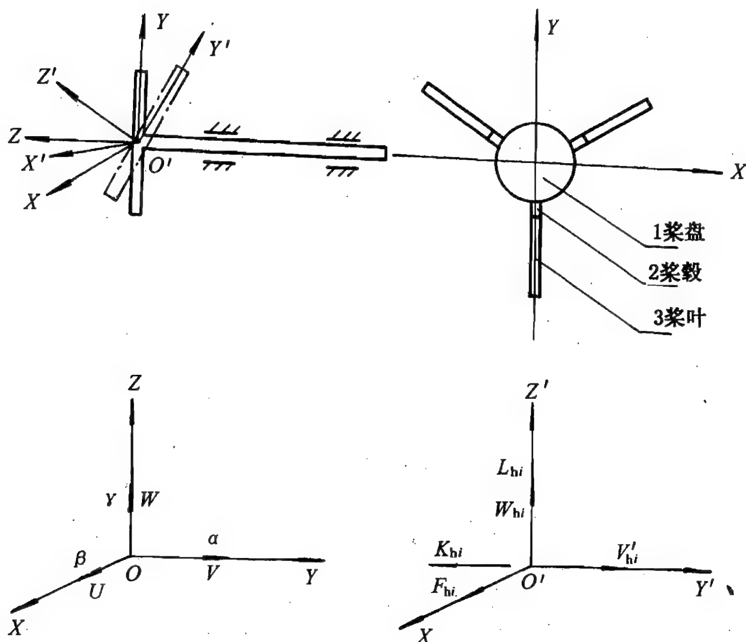


图 7－26　螺旋桨转子模型及坐标系

因涡动而使作用在螺旋桨上的气动力，除了拉力及阻力矩外，还将有：

x 方向气动力：

$$f_{xa} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sin\varphi_i\int\rho_a\,\overline{\dot{W}}_i^2B(C_{yi}\sin\gamma + C_{xi}\cos\gamma)\mathrm{d}r$$

y 方向气动力：

$$f_{ya} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\cos\varphi_i\int\rho_a\,\overline{\dot{W}}_i^2B(C_{yi}\sin\gamma + C_{xi}\cos\gamma)\mathrm{d}r$$

x 方向气动力矩：　(7－103)

$$M_{xa} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sin\varphi_i\int r\rho_a\,\overline{\dot{W}}_i^2B(C_{yi}\cos\gamma - C_{xi}\sin\gamma)\mathrm{d}r$$

y 方向气动力矩：

$$M_{ya} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\cos\varphi_i\int r\rho_a\,\overline{\dot{W}}_i^2B(C_{yi}\cos\gamma - C_{xi}\sin\gamma)\mathrm{d}r$$

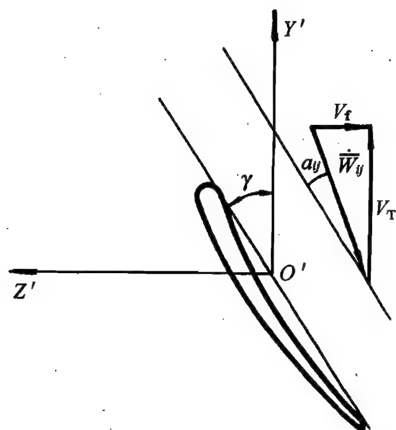


图 7－27　桨叶攻角的变化

式中，N 为桨叶数；ρ_a 为空气密度；$\overline{W}_i$ 为气流相对速度；B 为弦长；γ 是叶型安装角；C_x、C_y 为叶型的阻力、升力系数；r 为桨叶微段所在半径。

7.8.2 主导方程及其求解

借拉格朗日方程，经一系列推导，可得螺旋桨转子涡动的运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{G} + \boldsymbol{C})\dot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{H})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \tag{7-104}$$

其中广义位移列阵为

$$\boldsymbol{x} = [U, V, \alpha, \beta, V', W', L, D, F, Q]^{\mathrm{T}} \tag{7-105}$$

式中，U, V, α, β 是桨盘的位移及偏斜角；V'，W' 是桨毂本身的振动位移；L, D, F 是桨毂本身的振动角位移；Q 为桨叶本身振动位移的模态坐标。

因桨叶数为 N，考虑的桨叶模态数为 m，故式(7-105)中的

$$\boldsymbol{V}' = [V'_1, \cdots V'_N]$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{F} = [F_1, \cdots F_N]$$

$$\boldsymbol{Q} = [Q_{11}, Q_{21}, \cdots Q_{N1}, \cdots\cdots Q_{1m}, \cdots Q_{Nm}]$$

故式(7-105)又可改写为

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots\cdots x_{N_s}]^{\mathrm{T}} \tag{7-106}$$

$$N_s = 4 + 5N + mN$$

式(7-104)中的 $\boldsymbol{M}$ 为质量阵，$\boldsymbol{G}$ 为回转阵(陀螺项)，$\boldsymbol{C}$ 为阻尼阵，$\boldsymbol{K}$ 为刚度阵，$\boldsymbol{H}$ 为循环阵(源于周期结构)，$\boldsymbol{f}$ 为不平衡力、气弹力列阵。

假定阻尼主要存在于桨轴－支承系统，它可由实测的桨轴头动刚度阵而得，即

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{d}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7-107}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{d}} = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\mathrm{d,h}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K}_{\mathrm{d,v}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Im 代表取虚部，最右面一个矩阵是位置变换矩阵。

刚度阵

$$\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{K}'_{\mathrm{d}}, \boldsymbol{K}'_{\mathrm{h}}, \boldsymbol{K}_{\mathrm{b}}] \tag{7-108}$$

其中子阵

$$\boldsymbol{K}'_{\mathrm{d}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}$$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}$ 即上述位置变换矩阵，

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{d}} = \mathrm{Re}\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\mathrm{d,h}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K}_{\mathrm{d,v}} \end{bmatrix}$$

子阵 $\boldsymbol{K}'_{\mathrm{h}}$ 是 5×5 的，其中每一个元素又是一个子阵，即

$$\boldsymbol{K}'_{\mathrm{h},ij} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{K}_{\mathrm{h},ij}]_{N\times N} \quad (i,j = 1,\cdots,5)$$

$\boldsymbol{K}_{\mathrm{h},ij}$ 是桨毂刚度矩阵的元素，

$$K_h = S_0^{-1}$$

S_0 是桨毂的静柔度矩阵,可由铁木辛哥梁理论确定。

子阵 K_b 是 $Nm \times Nm$ 的,它的元素为

$$K_{b,ij} = \frac{\partial E_b}{\partial x_i \partial x_j}$$

式中,E_b 是桨叶的位能,即桨叶本身振动的弹性变形能及离心力场中振动的位能之和。

质量阵 M 中的元素

$$M_{ij} = \frac{\partial T_s}{\partial x_i \partial x_j}$$

式中,T_s 为系统的动能。

回转阵 G 的元素 G_{ij} 是 $-\frac{\partial T_s}{\partial x_i}$ 中含 $\dot{x}_j$ 项的系数;循环阵 H 的元素 H_{ij} 是 $-\frac{\partial T_s}{\partial x_i}$ 中含 x_j 项的系数。

S_0, M, G, H 中所有元素的具体表达式见参考文献[15]。

广义力列阵

$$f = [f_1, f_2, f_3, f_4, 0 \cdots 0]^T \tag{7-109}$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 e\omega^2 \cos\psi + f_{xa} \\ M_1 e\omega^2 \sin\psi + f_{ya} \\ M_{ya} \\ M_{xa} \end{Bmatrix}$$

式中,$M_1 e$ 是螺旋桨转子的不平衡度,ψ 是进动角。

用爬山法或分割法求得不同飞行速度下方程(7-104)的解——螺旋桨转子的不平衡响应,就可以找到使其开始失稳(发生颤振涡动)的极限飞行速度。对模型螺旋桨转子的理论与试验研究结果表明,二者很好吻合。

7.9 转子系统振动中的非线性现象

7.9.1 转子-支承系统中的非线性因素

转子-支承系统中的非线性因素很多,有源于结构的,如滚动轴承的非线性刚度(参考文献[45]),支承系统中间隙所造成的非线性刚度(参考文献[8])等;有源于介质的,如挤压油膜的非线性刚度及阻尼(参考文献[17]);有源于材料的——材料的内阻尼(参考文献[41]);有源于故障的,如碰摩中的非线性刚度,支承或支座松动所产生的非线性刚度,转轴裂纹所造成的参数激振(参考文献[47])等;有源于运行状态的,如桨叶、密封、叶轮的气弹力等。

从力学模型的角度来看,这些非线性因素都表现为非线性刚度或非线性阻尼。由于非线性系统的刚度、阻尼阵可能是负定的,因此非线性振动问题中,除了讨论稳定运动以外,还要讨论它的稳定性。内阻尼、气弹力、碰摩等已在前面讨论过,下面将主要讨论非线性刚度系统的振动特性,及转轴裂纹引起的参数激振现象。

7.9.2　支承非线性刚度对转子系统振动的影响

滚珠轴承无预紧力时，其恢复力可表示为(参考文献[45])

$$p(x) = kx + \beta x^3 + \cdots \tag{7-110}$$

如图7-28(a)所示，称为硬特性非线性弹性。

挤压油膜的等效刚度也是硬特性非线性的，也可用式(7-110)来近似地描述。

间隙及松动所造成的非线性弹性如图7-28(b)所示，其恢复力可表示为

$$p(x) = \begin{cases} k_1 x, & \text{当 } x \leqslant x_0 \\ k_1 x_0 + k_2(x - x_0), & \text{当 } x > x_0 \end{cases} \tag{7-111}$$

或

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leqslant x_0 \\ k(x - x_0), & \text{当 } x > x_0 \end{cases} \tag{7-112}$$

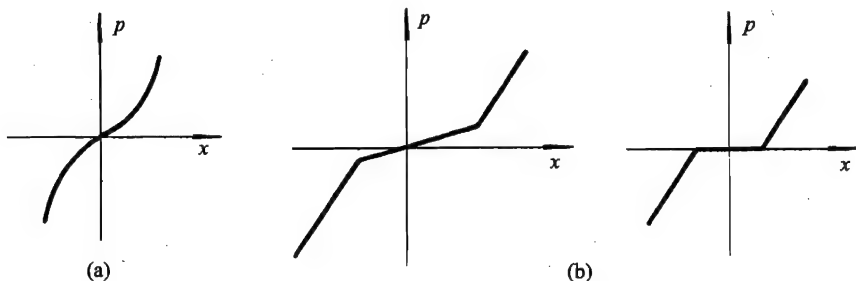


图7-28　几种非线性弹性

设有一不平衡的Jeffcott转子，如图7-29所示，并设转轴与支承的合成弹性仍可近似表示如式(7-110)所示，则可导出其运动方程为

$$m\ddot{x} + kx + \beta x^3 = me\omega^2\cos\omega t$$

或改写为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha\omega_0^2 x^3 = A_F\cos\omega t \tag{7-113}$$

显然，式中的 $\omega_0^2 = k/m$，

$$\alpha = \beta/k, \quad A_F = e\omega^2$$

如式(7-113)这样的方程，称为Duffing方程，这是一种非常普通的非线性方程，下面将详细讨论其特性。

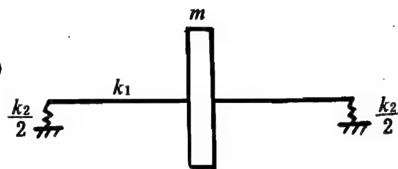


图7-29　支承刚性非线性的系统

7.9.2.1　自由振动

这时，式(7-113)变为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha\omega_0^2 x^3 = 0 \tag{7-114}$$

设 $t = 0$ 时：$x = x_0, \dot{x} = 0$，且 x_0 很小，则可以略去 $\alpha\omega_0^2 x^3$ 项，故可以得自由振动

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x_0\cos\omega_0 t = x_0\cos\omega_0 t \tag{7-115}$$

若 x_0 较大，即 $\alpha\omega_0^2 x^3$ 项不能略去，但作为初步近似，可以设

$$x(t) \approx x_0\cos\omega t \tag{7-116}$$

显然,它满足自由振动的初始条件。将它代入式(7－114),令 $\cos\omega t$ 项的系数为零,可得

$$\omega = \omega_0\sqrt{1+\frac{3}{4}\alpha\omega_0^2x_0^2} \tag{7－117}$$

即系统的自由振动频率取决于初始幅值 x_0。

7.9.2.2　强迫振动(主谐波响应)

现在,再来研究式(7－113)

$$\ddot{x} + \omega_0^2x + \alpha\omega_0^2x^3 = A_F\cos\omega t$$

假定初始响应(自由振动)已由阻尼衰减掉,它的稳态响应近似为

$$x = A\cos\omega t \tag{7－118}$$

将它代入式(7－113),令等号两端 $\cos\omega t$ 项的系数相等,可得

$$\frac{3}{4}\alpha\omega_0^2A^3 + (\omega_0^2-\omega^2)A - A_F = 0 \tag{7－119}$$

从式(7－119)可以解得稳态振动中的主振动的幅值 A,并绘如图7－30。

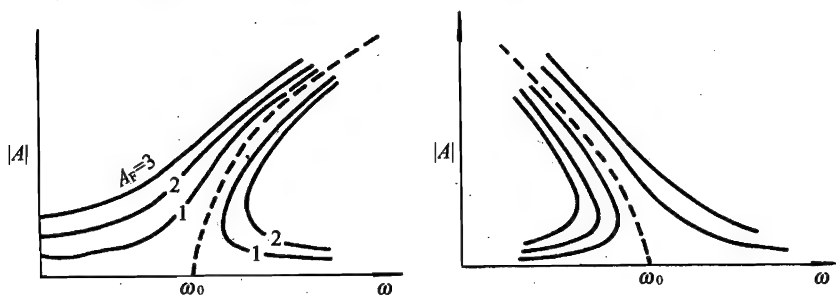


图7－30　强迫振动响应

若系统存在小阻尼,式(7－113)可改写为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \alpha\omega_0^2x^3 = A_F\cos\omega t \tag{7－120}$$

其稳态解近似为

$$x = A_s\sin\omega t + A_c\cos\omega t \tag{7－121}$$

将其代入式(7－120),平衡 $\sin\omega t$ 项及 $\cos\omega t$ 项,可以导得

$$\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+\frac{3}{4}\alpha A^2\right)^2A^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2A^2 - \left(\frac{A_F}{\omega_0^2}\right)^2 = 0 \tag{7－122}$$

式中,$A=\sqrt{A_s^2+A_c^2}$ 是主振动的幅值,可以由式(7－122)解得,如图7－31所示。从图可见,将产生振动幅值的跳跃现象,并将存在迟滞现象。

从式(7－122)可见,主振动的幅值 A 取决于 ω/ω_0,ζ,α 及 A_F/ω_0^2。

最大幅值

$$A_m^2 = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{2}{3}\sqrt{1+\frac{3}{4}\left(\frac{A_F}{\omega_0^2\zeta}\right)^2\alpha} - \frac{2}{3}\right] \tag{7－123}$$

7.9.2.3　强迫振动(超/次谐波响应)

首先,将式(7－113)改写成一般的形式,令 $\omega t = n\tau$,可得

$$y'' + n^2ay + \alpha n^2ay^3 = en^2\sin n\tau \tag{7－124}$$

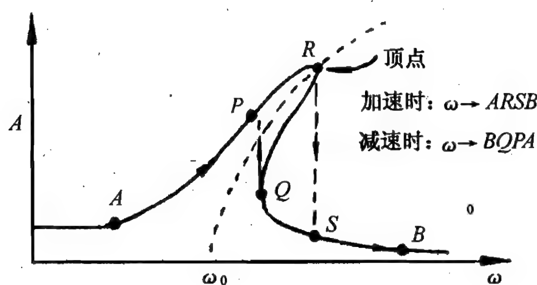


图 7－31 强迫振动响应(有阻尼)

式中：$y'' = \dfrac{d^2y}{d\tau^2}$ $\quad a = \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} = \dfrac{1}{\overline{\omega}^2}$ $\quad \overline{\omega} = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

令式(7－124)的解为

$$y = \sum_{k=1}^{3} y_k \sin k\tau \tag{7-125}$$

代入式(7－124)，借谐波平衡法，可得非线性代数方程组。

由等号两端 $\sin\tau$ 项系数相等

$$A_1 y_1 + \frac{3}{4}\alpha n^2 a(y_2^2 - y_1^2)y_3 = en^2\delta_{n1} \tag{7-126a}$$

由等号两端 $\sin 2\tau$ 项系数相等

$$A_2 y_2 + \frac{3}{2}\alpha n^2 a y_1 y_2 y_3 = en^2\delta_{n2} \tag{7-126b}$$

由等号两端 $\sin 3\tau$ 项系数相等

$$A_3 y_3 + \frac{3}{4}\alpha n^2 a(y_2^2 - \frac{1}{3}y_1^2)y_1 = en^2\delta_{n3} \tag{7-126c}$$

式中 $\delta_{n1},\delta_{n2},\delta_{n3}$ 均为狄拉克函数，各在 $n = 1、2、3$ 时为 1，

$$\begin{cases} A_1 = (n^2a - 1) + \dfrac{3}{4}\alpha n^2 a(y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2) \\ A_2 = (n^2a - 4) + \dfrac{3}{4}\alpha n^2 a(2y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2) \\ A_3 = (n^2a - 9) + \dfrac{3}{4}\alpha n^2 a(2y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2) \end{cases} \tag{7-127}$$

由式(7－126)可解得 y_1,y_2,y_3，详细方法可参见参考文献[46]。

若令 $n = 1$，随着 ω(即 a)的不同，y_1,y_2,y_3 的解也不同。若 $y_1 > y_2 > y_3$，则响应主要为主谐波响应；若 $y_2 > y_1 > y_3$，则响应以 2 阶超谐波为主；若 $y_3 > y_1 > y_2$，则称为 3 阶超谐波响应。

令 $n = 2$，若 $y_1 > y_2 > y_3$，为 1/2 阶次谐波响应；若 $y_3 > y_2 > y_1$，为 3/2 阶超谐波响应。

若 $n = 3$，则 $y_3 > y_2 > y_1$ 为主谐波响应，$y_2 > y_3 > y_1$ 为 2/3 阶次谐波响应，$y_1 > y_3 > y_2$ 为 1/3 阶次谐波响应。

如果在式(7－125)中取的项数更多，则可以得到更多阶次的超谐波、次谐波。一般的讲，对于低阻尼的非线性系统，可以在 $\omega \approx \omega_0/m$ 附近出现超谐/次谐共振，m 是其阶次(2,3,…1/2

1/3,…)。在航空发动机中曾观察到 1/2 阶次谐共振(参考文献[8])。

7.9.2.4　组合谐波响应(和差频振动)

设系统同时受到了两个激振力的作用,例如双转子发动机中两个转子的不平衡力,则运动方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha\omega_0^2 x^3 + A_{F1}\cos\omega_1 t + A_{F2}\cos\omega_2 t$$

不失一般性,上式可改写为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon\beta x^3 + A_{F1}\cos\omega_1 t + A_{F2}\cos\omega_2 t \tag{7-128}$$

式中,ε 是小参数,$\beta = \alpha\omega_0^2/\varepsilon$,采用摄动法,令式(7－128)的解为

$$x = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots \tag{7-129}$$

将其代入式(7－128),可得各阶渐近解 x_i 应满足的、对应于 ε 各阶的方程为

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &: \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = A_{F1}\cos\omega_1 t + A_{F2}\cos\omega_2 t \\ \varepsilon^1 &: \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\beta x_0^3 \\ \varepsilon^2 &: \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -3\beta x_0^2 x_1 \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{7-130}$$

由式(7－130)可得各阶渐近解为

$$x_0 = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t \tag{7-131}$$

式中:$A_1 = \dfrac{e_1\omega_1^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$　　$A_2 = \dfrac{e_2\omega_2^2}{\omega_0^2 - \omega_2^2}$

将式(7－131)代入式(7－130)的第二式,可得一阶近似解所应满足的方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = {} & F_1\cos\omega_1 t + F_2\cos\omega_2 t + F_3[\cos(2\omega_1 + \omega_2)t + \cos(2\omega_1 - \omega_2)t] \\ & + F_4[\cos(\omega_1 + 2\omega_2)t + \cos(2\omega_2 - \omega_1)t] + F_5\cos 3\omega_1 t + F_6\cos 3\omega_2 t \end{aligned} \tag{7-132}$$

式中:$F_1 = -\dfrac{3}{4}\beta A_1(A_1^2 + 2A_2^2)$

$$F_2 = -\frac{3}{4}\beta A_2(2A_1^2 + A_2^2)$$

$$F_3 = -\frac{3}{4}\beta A_1^2 A_2$$

$$F_4 = -\frac{3}{4}\beta A_1 A_2^2$$

$$F_5 = -\frac{1}{4}\beta A_1^3$$

$$F_6 = -\frac{1}{4}\beta A_2^3$$

显然,方程(7－132)式具有频率 ω_1、ω_2、$2\omega_1 \pm \omega_2$、$2\omega_2 \pm \omega_1$、$3\omega_1$、$3\omega_2$ 的各阶谐波响应。其中 $2\omega_1 \pm \omega_2$、$2\omega_2 \pm \omega_1$ 的频率成分,称为组合谐波响应,或和差频振动。这一现象,曾在航空发动机中观察到,参见参考文献[8]。

7.9.3　转轴裂纹引起的参数激振

设有一裂纹 Jeffcott 转子如图 7－32 所示,若略去重力的影响,则在动坐标系内可列出其运动方程。

$$\begin{cases} m\ddot{\eta} - m2\omega\dot{\xi} - m\omega^2\eta + k_\eta\eta = m\varepsilon_1\omega^2 \\ m\ddot{\xi} + m2\omega\dot{\eta} - m\omega^2\xi + k_\xi\xi = m\varepsilon_2\omega^2 \end{cases} \tag{7-133}$$

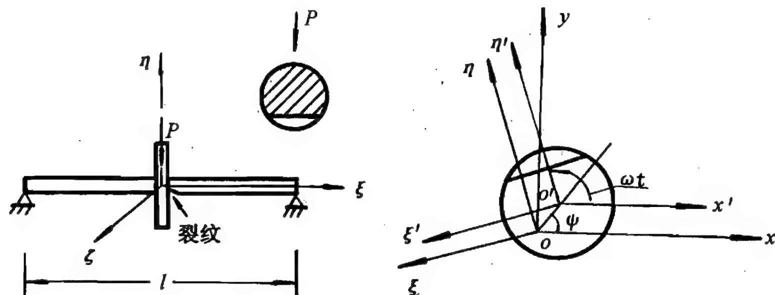


图 7－32 裂纹 Jeffcott 转子

由于裂纹之存在及开合作用，k_η、k_ξ 都是随 θ 角而变的，$\theta = \omega t - \psi$。当 $\theta = 0$ 时，k_η 最小；$\theta = \pi$ 时，k_η 最大；k_ξ 的变化与此相仿，但变化范围较小。若裂纹甚浅，$k_\xi \approx k =$ 常数，k 为无裂纹时的刚度，同时有

$$k_\eta(\theta) = k - \Delta k(\theta) \tag{7-134}$$

令 $\zeta = \eta + \mathrm{i}\xi$，式(7－133)可化为

$$m(\ddot{\zeta} + 2\mathrm{i}\omega\dot{\zeta} - \omega^2\zeta) + k\zeta - \Delta k(\theta)\eta = m\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\omega^2$$

再转换到固定坐标系可得

$$m\ddot{Z} + kZ - \Delta k(\theta)(x\cos\omega t + y\sin\omega t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = m\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\delta)}\omega^2$$

即

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx - \dfrac{\Delta k(\theta)}{2}[(1+\cos 2\omega t)x + \sin 2\omega t \cdot y] = m\varepsilon\omega^2\cos(\omega t + \delta) \\ m\ddot{y} + ky - \dfrac{\Delta k(\theta)}{2}[\sin 2\omega t \cdot x + (1-\cos 2\omega t)y] = m\varepsilon\omega^2\sin(\omega t + \delta) \end{cases} \tag{7-135}$$

由式(7－135)可见，由于裂纹的存在，使运动方程成为变系数的微分方程。事实上，式(7－135)的变系数是周期性的，即所谓 Mathieu 方程。

因对导出 Δk 的所用方法及裂纹开合模型的不同，有关的研究很多，如参考文献[47]～[50]。其共同的结论为：因裂纹的存在，在约 $\omega_n/3$ 处将出现一个3次谐波的响应峰值，可用作诊断裂纹的主要标志。

方程式(7－135)的求解，一般讲只能借数值积分法(参考文献[47])，或粗略地设定 $\Delta k(\theta)$ 函数(参考文献[48]、[50])后求得近似解析解。

7.10 自激振动的判断与防止

由上述各节的讨论可知，航空发动机中可能引起转子系统自激进动——失稳的因素是很多的，应根据其机理，从已有的研究成果出发，采取不同的对策，尤其是设计阶段，必须遵循相应的稳定性设计准则。

7.10.1 转子系统的稳定性裕度

实际发动机转子系统的失稳，总是多个不稳定因素共同作用的结果。假若这些因素产生的

力特性系数(通常为 k_{xy}) 已知,就可以对转子 – 支承系统作稳定性分析。由于实际系统的自度很高(几百以上),不能用 Routh – Hurwitz 稳定性准则来判稳,而只能求解陀螺特征值,或数值积分法判稳(参考文献[51])。

求解陀螺特征值的方法很多(参考文献[41])。然而,在涡轮机行业更推荐用特征多项式的法(参考文献[1]、[52])。

如前所述,许多会导致转子动力不稳定的力还不能准确预计,因此最有成效的方法是改变确定的系数,反复试算,直到计算结果与现场观察到的临界转速、失稳阈速、失稳频率与计算果合理吻合为止(参考文献[1])。随后,这一程序就可用于研究改变已知设计参数(如轴承或封的刚度及阻尼)的影响。

同时,应使在设计转速下的最低几阶的模态阻尼大于某一个值(例如应使模态的 $\geqslant 0.05$),即有一定的稳定性裕度。

.10.2　自激进动的防止

首先,在设计发动机时应尽力减小或避免各种不稳定因素的作用。例如,避免设计成转子有各向异性的刚度,借严格的装配工艺(如螺栓的装配次序及拧紧要求)使转子刚度尽可能有各向同性;尽可能减小转子中的配合面(从防止失稳的角度看,整体式转子,如美国的404 发动机中那样最好),配合面应尽可能短,并有足够的紧度,以尽量减小结构内阻尼;转、轴承都应有好的同心度,套齿联轴器工作面应有可靠的润滑,以减小联轴器中的内阻尼;尽能减小或避免封严篦齿进口的气流正向预旋速度(如果能使之为反向预旋更好),改进密封结构及形状设计,以减小或避免封严篦齿装置产生的不稳定力(参考文献[53]);在适当部位甩油孔,避免转子内腔积液;叶尖、封严篦齿等处留有适当的间隙,并有良好的结构设计,以免转子 – 静子碰摩,或只有轻微的碰摩。

增大系统的外阻尼,例如采用挤压油膜阻尼器,显然有利于提高转子系统的稳定性。然而,于一个挠性转子,此阻尼有一个最佳值,过大的阻尼也会使转子的稳定性恶化(参考文献54])。

支承系统具有非对称的刚度,也可改善转子系统的稳定性(参考文献[23])。

同时,在发动机研制的各个阶段,都应作转子系统的稳定性裕度分析,对涡桨发动机还应作螺旋桨转子的颤振涡动分析,以确保设计符合要求。

在研制发动机的各个试车阶段,都应作振动监视。必要时,还必须作振动诊断。本章以上各节所分析的各种失稳因素引起的自激进动的特征,都可作为有关故障诊断的参考。

在排除自激进动故障时,减小轴承间跨度,及增大轴的刚度(增大直径)几乎总是正确的两项主要修改。通常,自激进动发生在转子超临界运行的情况下(尤其是转速大于等于 $2\omega_{cr}$ 的情况)。

虽然,在改进不稳定力的定量预计的准确度方面,还有许多工作要做,当前的研究水平已能可靠地预计其趋势。

参　考　文　献

1] Vance J M. Rotordynamics of Turbomachinery. New York: John Wiley & Sons, 1988.

2] Williams R Jr. & Trent R. The Effects of Nonlinear Asymmetric Supports on Turbine Engine Rotor Stability. SAE 700320

[3] Abott F T Jr. et al. Investigation of Propeller – Power Plant Autoprecession Boundaries for a Dynamic – Aeroelast Model of a Four – Engine Turboprop Transport Airplane. NASA TN D – 1806, 1960.

[4] Childs D W. The Space Shuttle Main Engine High – Pressure Fuel Turbopump Rotordynamic Instability Problem. ASM Paper 77 – GT – 49, 1977.

[5] Muszynska A. Whirl and Whip – Rotor/Bearing Stability Problems. J. of Sound and Vibration, V.110, N.3, 1986 443 ~ 462

[6] Adams M L & Abu – Mahfouz. A. Exploratory Research on Chaos Concepts as Diagnostic Tools for Assessing Rotatir Machinery Vibration Signatures. Proceedings of the 4th IFToMM International Conference on Rotordynamics, 1994, 2 ~ 39

[7] Ehrich F F. Rotordynamic Response in Nonlinear Anisotropic Mounting Systems. Proceedings of the 4th IFToMM Inte national Conference on Rotordynamics, 1994.

[8] 顾家柳，任平珍．航空燃气涡轮转子中的非协调进动．航空学报,V.4,N.1, 1983, 43 ~ 50

[9] Newkirk B L & Taylor H D. Shaft Whipping Due to Oil Action in Journal Bearings. General Electric Review, 28 1925, 559 ~ 568

[10] Pinkus O & Sternlicht B. Theory of Hydrodynamic Lubrication. New York: Mc Graw – Hill, 1961.

[11] Kirk R G & Miller W H. The Influence of High Pressure Oil Seals on Turbo – Rotor Stability. ASLE Trans, V.22 N.1, 1979, 14 ~ 24

[12] Alford J S. Protecting Turbomachinery from Self – Excited Rotor Whirl. J. of Eng. for Power, 1965, 333 ~ 334

[13] Benckert H & Wachter J. Flow – Induced Spring Coeffcients of Labyrinth Seals for Application in Rotordynamics NASA CP – 2133, 1980, 189 ~ 212

[14] Vance J M. Rotordynamic Instability in Centrifugal Compressors: Are all the Excitations Understood?. J. of Eng. fo Power, 1981, 288 ~ 293

[15] 顾家柳等．螺桨转子的颤振涡动．转子动力学研究文集,发动机结构完整性办公室,1994, 132 ~ 156

[16] Ehrich F F. Shaft Whirl Induced by Rotor Internal Damping. J. of Applied Mechanics, 1964, 279 ~ 282

[17] 顾家柳等编．转子动力学．北京:国防工业出版社,1985.

[18] Ehrich F F. The Infuence of Trapped Fluids on High Speed Rotor Vibration. J. of Eng. for Industry, 1969, 1025 ~ 1028

[19] Newkirk B L. Shaft Whipping. GE Rev.,V.17, 1924, 169

[20] Kimball A L. Internal Friction Theory of Shaft Whipping. GE Rev, 17, 1924,224

[21] Zorzi E S & Nelson H D. Finite Element Simulation of Rotor – Bearing Systems with Internal Damping. J. of Eng. for Power, V.89, N.1, 1977, 71 ~ 76

[22] Hendricks S L. The Effect of Viscoelasticity on the Vibration of a Rotor. J. of Applied Mechanics, V.53, N.2, 1986, 412 ~ 416

[23] Gunter E J Jr. Dynamic Stability of Rotor – Bearing Systems. NASA SP – 113, 1966.

[24] 郭千青．合成氨 – 循环气压缩机低压缸事故及其改造更新．大氮肥,1985.

[25] Proceedings of the IFToMM Conference on Flow Induced Force in Rotating Machinery. 东京: 1986.

[26] Rotordynamic Instability Problems in High – Performance Turbomachinery. NASA CP – 3239, 1993.

[27] 顾家柳．封严篦齿装置气弹力分析及设计．见:转子动力学研究文集,航空工业总公司涡桨涡轴发动机结构完整性办公室,1994, 22 ~ 45

[28] Hauck L. Measurement and Evaluation of Swirl – Tip Flow in Labyrinth Seals of Conventional Turbine Stages. NASA CP – 2250, 1982, 242 ~ 259

[29] Scharrer J K & Childs D W. Theory vs. Experiment for the Rotordynamic Coefficients of Labyrinth Gas Seals. Parts Ⅰ, Ⅱ. J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, V.110, N.3, 1988,270 ~ 287

[30] Iwatsubo T et al. An Experimental Study of Dynamic Characteristics of Labyrinth Seal. NASA CP – 3239, 1993, 219

~237

[31] Thomas H J. Instabile Eigenschwing Von Turbine lauefern Angefacht durch die Spaltstroemung in Storpfubuchseen und Bechauchflug, Bull. de L.A.I.M. 71, No.11 - 12, 1958, 1039 ~ 1063

[32] Urlichs K. Clearance Flow Generated Transverse Forces at the Rotors of Thermal Turbomachines. NASA TM - 77292, 1975.

[33] Wohlrab R. Experimental Determination of Gap Flow Conditioned Forces at the Rotors of Thermal Turbomachines. NASA TM - 77293, 1975.

[34] Vance J M & Laudadio F J. Experimental Measurement of Alford's Force in Axial Flow Turbomachinery. ASME paper 84 - GT - 140, 1984.

[35] Ehrich F. Unpublished Report. 1992.

[36] 洪杰. 轴流叶轮偏心旋转引起的自激力和稳定性研究. 博士论文,北京航空航天大学研究生院,1994.

[37] Martinez - Sanchez M et al. Experimental Investigation of Turbine Blade - Tip Excitation Forces. NASA CP - 3239, 1993, 3 ~ 14

[38] Palczynshki T A. Experimental and Theoretical Investigation of Rotordynamic Instability in a Shrouded Turbine, S.M. Thesis, Dept. of Aero. and Astro., M.I.T., 1992.

[39] Hendricks S L. Stability of a Clamped - Free Rotor Partially Filled with Liquid. J. of Applied Mechanics, V.53, N.1, 1986, 166 ~ 172

[40] Colding - Jorgensen J. Rotor Whirl Measurements on a Long Rotating Cylinder Partially Filled with Liquid. ASME DE - Vol.35, 1991, 127 ~ 131

[41] 张文编. 转子动力学理论基础. 北京:科学出版社,1990.

[42] Isaksson J L. Dynamics of A Rotor with Annular Rub. 同[6], 85 ~ 90

[43] 褚福磊等. 碰摩转子系统的混沌特性.

[44] Civil Air Regulations Amendment 4b - 16, FAA, 1964.

[45] 克勒宗 A C 等. 转动机械的计算和设计. 张文杰等译,沈阳航空发动机研究所出版,1982.

[46] Dugundji J & Wendll J H. Some Analysis Methods for Rotating Systems with Periodic Coefficients. AIAA J., V.21, N.6, 1983, 890 ~ 897

[47] 顾家柳,王能谦. 有裂纹悬臂转子的振动特性. 航空动力学报,V.1, N.2, 1986, 117 ~ 120

[48] Gasch R. Dynamic Behaviour of A Simple Rotor with A Cross - Sectional Crack. IMechE C178/76, 1976.

[49] Muszynska A. Shaft Crack Detection. Seventh Machinery Dynamics Seminar, Canada, 1982.

[50] Papadopoulos C A & Dimarogonas A D. Stability of Cracked Rotors in The Coupled Vibration Modes. J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, V.110, N.2, 1988, 356 ~ 359

[51] 顾家柳,任兴民. 航空发动机转子 - 支承系统的瞬态响应. 航空学报,V.12, N.7, 1991, A373 ~ A380

[52] Murphy B T & Vance J M. An Improved Method for Calculating Critical Speeds and Rotordynamic Stability of Turbomachinery. J. of Eng. for Power, V.105, N.3, 1983, 591 ~ 595

[53] Kim C H & Lee Y B. Test Results for Rortordynamic Coefficients of Anti - Swirl Self - Injection Seals. NASA CP - 3239, 65 ~ 74

[54] Barrett L E et al. Optimum Bearing and Support Damping for Unbalance Response and Stability of Rotating Machinery. J. of Eng. for Power, 1978, 89 ~ 94

第8章　发动机转子－支承系统动力学优化设计

8.1　优化设计目的

对燃气涡轮发动机转子－支承系统的动力学优化设计的主要目的是：

(1) 调整转子－支承系统的临界转速，使发动机的整个工作转速范围内无临界转速，或至少无弯曲型临界转速；

(2) 选择最佳的阻尼器布局及阻尼系数，使转子－支承系统能够平稳地通过各低阶临界转速，并在主要工作状态下平稳运行。

8.2　优化设计方法

优化设计的一般可能考虑的途径是改变转子的结构参数：直径、跨度、质量分布、材料性能等。如果能够任意改变这些参数，总是能够使转子的临界转速高于其工作转速，实现在整个工作转速范围内无临界转速的目标。再通过良好的动平衡，使转子系统的振动水平限制在允许的范围内。然而，航空燃气涡轮发动机的转子是由风扇、压气机、涡轮等转子组成的，它们的直径尺寸、质量分布、长度首先受到总体方案、气动设计的制约，不可能随意增大转轴的直径，也不可能随意缩短转子的长度。它的支承布局也受到总体方案的限制，只能在有限的范围内作调整。因此，当发动机的总体方案及部件的气动设计已确定的情况下，再要随意改变诸如直径、跨度、质量分布等结构参数，一般是不大可能的，最多也只能在小范围内作一点调整。这样，往往还达不到转子动力学优化设计的目的。

支承刚度对转子－支承系统的临界转速有显著的影响，改变支承刚度可以明显地改变转子－支承系统的临界转速，对于简单的转子－支承系统，例如简支转子，比较容易判断调整哪一个支承更为有效。可以计算转子系统的临界转速图谱，即临界转速随支承刚度的变化曲线，从而根据要求调整的临界转速值来决定选用支承刚度值。然而，航空燃气涡轮发动机转子－支承系统是比较复杂的，必须采取有效的方法来实现优化设计。

8.2.1　以调整临界转速为目的的支承刚度优化设计

8.2.1.1　简单转子的支承刚度优化

图8－1为一简支单转子，轮盘位于靠近右支承处。此转子在刚性支承情况下的一阶弯曲型临界转速落在工作转速范围内。为了使其弯曲型临界转速高于最高工作转速，刚体型临界转速调整到工作转速范围以下，显然，在右支承处加一弹性支承是比较有效的。因此，可以采用传递矩阵－阻抗耦合法计算该转子临界转速随支承刚度变化的曲线，如图8－2所示。

由这一简单转子系统的分析，可以得出如下结论：

(1) 转子的临界转速随支承刚度的降低而降低；

(2) 当一支承刚度为零，即相当于无支承的自由端时，一阶临界转速为零；

(3) 支承刚度在某一定范围内时，对临界转速影响最显著，当支承刚度高于一定值时，它对调整临界转速的作用则很微弱。



图 8-1 单盘简支转子简图

弹性支承的阻抗一般可用单自由度系统代表

$$Z_n' = K_0 - m_0\omega^2 \quad (8-1)$$

式(8-1)代表的二次曲线与临界转速特性曲线的交点，就是该转子-支承系统的临界转速(见图8-2)。于是，根据转子-支承系统所允许的工作转速范围，可以确定弹性支承的相应参数(静刚度 K_0 与参振质量 m_0)，以保证一、二阶临界转速均在工作转速范围之外。

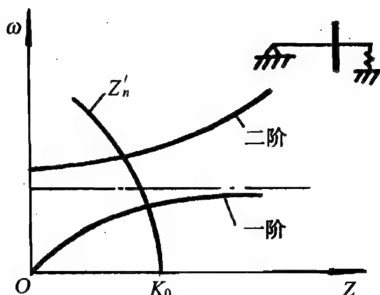


图 8-2 简单转子的临界转速特性曲线简图

上面说明的是转子临界转速随右支承刚度的变化关系，此时，左支承的刚度是一定的。如果转子的结构难以直观判断应改变哪一个支承的刚度时，则需分别计算左、右两个支承刚度对转子临界转速的影响，计算工作量大大增加。尤其是具有多个支承的复杂转子，这种简单的办法是行不通的。

8.2.1.2 传递矩阵-分模态综合法

一般复杂转子-支承系统，可能包含两个以上的支承和两个以上的转子，支承刚度优化设计方法必须能适用于多支承、多转子的情况，并应能正确地选择最有效的支承进行调整。优化过程大致如下：

(1) 计算转子-支承系统的临界转速；

(2) 检查各阶临界转速是否满足规定要求；

(3) 检查各支承刚度对临界转速影响的灵敏度；

(4) 改变最有效的支承刚度，重新计算临界转速；

(5) 在满足规定要求时完成优化。

优化设计的基础是计算临界转速，而且在优化过程中还要不断反复计算。因此，计算方法的正确选用将影响优化的有效进行。传递矩阵-分模态综合法就是适用于转子-支承系统动力学优化设计的一种有效的方法。这一方法的主要特点是：

(1) 适用于具有任意个中介支承(轴间支承)的多转子、多支承系统；

(2) 对于约束转子子系统采用传递矩阵法计算其约束振动模态和约束静位移模态，既方便又可靠；

(3) 将待优化的子系统的有关参数作为约束边界坐标，在综合中分析处理，简便易行，可对支承布局、支承刚度以及阻尼系数进行优化设计。

在优化设计中，不失一般性，假定转子系统作圆轨迹进动，系统参数是轴对称的，转子内部是线性无阻尼的。

(1) 分模态综合法

分模态综合法是一种子结构综合法，其基本思路是将复杂转子系统分割成为若干个便于分析的子系统，在分割点处加以约束，成为若干个约束子系统。分割点包括各转子之间的中介支承，待优化处理的支承以及其他必须将系统分割开的地方。在分别求得各约束子系统的约束振动模态后，再将各约束子系统重新连接，并以一定的方式释放各约束点，求得各相应的静位

移模态与刚度矩阵。将约束振动模态与约束静位移模态叠加，最后求得整个系统的动力学特性。

图8－3所示为多转子－支承系统，它的自由振动微分方程为

$$M\ddot{Z} \mp \mathrm{i}[\omega_0 G]\dot{Z} + C\dot{Z} + KZ = 0 \tag{8-2}$$

式中：M——系统的质量矩阵；

G——系统的陀螺矩阵；

ω_0——系统的自转角频率矩阵；

C——系统的阻尼矩阵；

K——系统的刚度矩阵；

Z——系统的广义坐标列阵；

i——虚数单位。

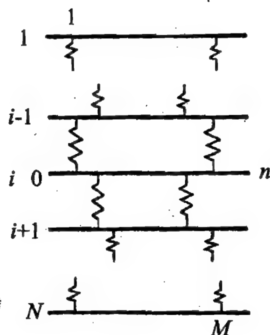


图8－3　多转子－支承系统简图

上式中的第二项前的符号“－”相应于转子正向涡动，“＋”相应于反向涡动。

将系统的坐标划分为内部和边界坐标，以下角标“i”代表内部坐标，“b”代表边界坐标，于是可将方程(8－2)改写成为

$$\begin{bmatrix} M_\mathrm{i} & 0 \\ 0 & M_\mathrm{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{Z}_\mathrm{i} \\ \ddot{Z}_\mathrm{b} \end{bmatrix} \mp \mathrm{i}\begin{bmatrix} \omega_{0\mathrm{i}} G_\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \omega_{0\mathrm{b}} G_\mathrm{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{Z}_\mathrm{i} \\ \dot{Z}_\mathrm{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\mathrm{i} & 0 \\ 0 & C_\mathrm{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{Z}_\mathrm{i} \\ \dot{Z}_\mathrm{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_\mathrm{ii} & K_\mathrm{ib} \\ K_\mathrm{bi} & K_\mathrm{bb} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_\mathrm{i} \\ Z_\mathrm{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8-3}$$

将式(8－3)展开，可写出当边界坐标被约束($Z_\mathrm{b}=0$)时的约束子系统的自由振动方程式

$$M_\mathrm{i}\ddot{Z}_\mathrm{i} \mp \mathrm{i}\omega_{0\mathrm{i}} G_\mathrm{i}\dot{Z}_\mathrm{i} + C_\mathrm{i}\dot{Z}_\mathrm{i} + K_\mathrm{ii} Z_\mathrm{i} = 0 \tag{8-4}$$

根据假设，约束子系统是无阻尼的，$C_\mathrm{i}=0$，于是可写出

$$M_\mathrm{i}\ddot{Z}_\mathrm{i} \mp \mathrm{i}\omega_{0\mathrm{i}} G_\mathrm{i}\dot{Z}_\mathrm{i} + K_\mathrm{ii} Z_\mathrm{i} = 0 \tag{8-5}$$

设式(8－5)所代表的约束子系统的特征解可表示为

$$Z = \Phi e^{\mathrm{i}\Omega_\mathrm{c} t} \tag{8-6}$$

式中：Φ——约束振动模态振型；

Ω_c——约束振动模态角频率。

将式(8－6)代入式(8－5)得

$$-M_\mathrm{i}\Omega_\mathrm{c}^2\Phi \pm \omega_{0\mathrm{i}}\Omega_\mathrm{c} G_\mathrm{i}\Phi + K_\mathrm{ii}\Phi = 0 \tag{8-7}$$

左乘模态矩阵转置 Φ^T，移项得

$$\Phi^\mathrm{T}(\Omega_\mathrm{c}^2 M_\mathrm{i} \mp \omega_{0\mathrm{i}}\Omega_\mathrm{c} G_\mathrm{i})\Phi = \Phi^\mathrm{T} K_\mathrm{ii}\Phi \tag{8-8}$$

引入下面坐标变换矩阵

$$\begin{bmatrix} Z_\mathrm{i} \\ Z_\mathrm{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \delta \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \tag{8-9}$$

式中：δ——释放约束边界坐标时的约束子系统内部坐标静位移模态矩阵；

I——当采用轮流释放时，边界坐标的释放矩阵为单位矩阵；

N_1、N_2——相应的模态坐标。

将坐标变换矩阵式(8－9)代入式(8－3)，令 $C_\mathrm{i}=0$，得

$$\begin{bmatrix} M_\mathrm{i} & 0 \\ 0 & M_\mathrm{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi & \delta \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{N}_1 \\ \ddot{N}_2 \end{bmatrix} \mp \mathrm{i}\begin{bmatrix} \omega_{0\mathrm{i}} G_\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \omega_{0\mathrm{b}} G_\mathrm{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi & \delta \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_\mathrm{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi & \delta \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_\mathrm{ii} & K_\mathrm{ib} \\ K_\mathrm{bi} & K_\mathrm{bb} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi & \delta \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8-10}$$

设 N_1、N_2 为简谐函数，即

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} e^{st} \tag{8-11}$$

且，复频率 $s = \lambda + i\Omega$，对于无阻尼系统，$s = i\Omega$。

将式(8-11)代入式(8-10)，并左乘以坐标变换矩阵的转置，得

$$\begin{aligned}&\left\{ s^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \mp \mathrm{i}s \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \omega_{0\mathrm{i}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & \omega_{0\mathrm{b}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \right. \\ &\left. + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{ib}} \\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{bi}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{bb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8-12}$$

将式(8-12)展开并整理，可得

$$\begin{aligned}&\left\{ s^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_{\mathrm{i}} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_{\mathrm{i}} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_{\mathrm{i}} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_{\mathrm{i}} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \mp \mathrm{i}s \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \omega_{0\mathrm{i}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{i}} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \omega_{0\mathrm{i}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{i}} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \omega_{0\mathrm{i}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{i}} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \omega_{0\mathrm{i}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{i}} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \omega_{0\mathrm{b}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{I} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \right. \\ &\left. + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ib}} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{bi}} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ib}} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{bi}} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{bb}} \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8-13}$$

根据力与位移的普遍关系，静位移模态、边界坐标释放矩阵与刚度矩阵及外力存在如下关系

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{ib}} \\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{bi}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{bb}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \tag{8-14a}$$

或写成为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{ib}} \\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{bi}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{bb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \tag{8-14b}$$

展开得

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{ib}} \boldsymbol{I} = 0 \\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{bi}} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{bb}} \boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} \end{cases} \tag{8-15}$$

由式(8-15)的第一式可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ib}} \boldsymbol{I} = 0 \\ \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ib}} \boldsymbol{I} = 0 \\ \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{ib}} \boldsymbol{\Phi} = 0 \end{cases} \tag{8-16}$$

由式(8-15)的第二式可得

$$\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{bi}} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{bb}} \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{b}} \tag{8-17}$$

同样，

$$\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{I} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}} \tag{8-18}$$

显然，边界坐标上的刚度矩阵等于轴的弯曲刚度矩阵和外加刚度矩阵之和，边界坐标上的阻尼矩阵则为外加阻尼矩阵：

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}} = \left\lceil \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}} \right\rfloor \\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{s}} + \left\lceil \boldsymbol{K}_{\mathrm{b}} \right\rfloor \end{cases} \tag{8-19}$$

式中：$\lceil C_b \rfloor$ —— 边界坐标上的外加阻尼系数对角阵；

K_s—— 释放约束边界坐标对其产生单位位移时，各边界坐标上的作用力及反作用力矩阵；

$\lceil K_b \rfloor$ —— 边界坐标上外加的刚度系数对角阵。

同样还有

$$\begin{cases} I^{T}M_{b}I = M_{b} \\ I^{T}G_{b}I = G_{b} \end{cases} \tag{8 -}$$

因此，式(8－13)可写成为

$$\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8 -}$$

式中：$A_{11} = \Phi^{T}(\Omega_c^2 M_i \mp \Omega_c \omega_{0i} G_i)\Phi$；

$A_{22} = sC_b + K_b$；

$B_{11} = s^2\Phi^{T}M_i\Phi \mp is\Phi^{T}\omega_{0i}G_i\Phi$；

$B_{12} = s^2\Phi^{T}M_i\delta \mp is\Phi^{T}\omega_{0i}G_i\delta$；

$B_{21} = s^2\delta^{T}M_i\Phi \mp is\delta^{T}\omega_{0i}G_i\Phi$；

$B_{22} = s^2\delta^{T}M_i\delta \mp is\delta^{T}\omega_{0i}G_i\delta + s^2M_b \mp is\omega_{0b}G_b$。

当不计阻尼，式中各项为

$A_{11} = \Phi^{T}(\Omega_c^2 M_i \mp \Omega_c \omega_{0i} G_i)\Phi$；

$A_{22} = K_b$；

$B_{11} = -\Omega^2\Phi^{T}M_i\Phi \pm \Omega\Phi^{T}\omega_{0i}G_i\Phi$；

$B_{12} = -\Omega^2\Phi^{T}M_i\delta \pm \Omega\Phi^{T}\omega_{0i}G_i\delta$；

$B_{21} = -\Omega^2\delta^{T}M_i\Phi \pm \Omega\delta^{T}\omega_{0i}G_i\Phi$；

$B_{22} = -\Omega^2\delta^{T}M_i\delta \pm \Omega\delta^{T}\omega_{0i}G_i\delta - \Omega^2M_b \pm \Omega\omega_{0b}G_b$。

整个转子－支承系统的固有频率及相应的振型可由式(8－21)及其相应的系数行列式求得。对于无阻尼的情况，由下式求固有频率：

$$\det\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix} = 0 \tag{8 - 22}$$

对于有阻尼的情况，则由下面行列式的实部与虚部为零求得系统的复频率：

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\det\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}\right) = 0 \\ \mathrm{Im}\left(\det\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}\right) = 0 \end{cases} \tag{8 - 23}$$

求得固有频率 $s = \lambda + i\Omega$ 后，由式(8－21)求出相应的模态振型$\{N_1, N_2\}$，再根据坐标变换矩阵式(8－9)求出物理坐标上的振型。

(2) 约束模态的求法

在应用上述分模态综合法时，必须事先已知约束振动模态振型 Φ 及频率Ω_c、约束静位移模态 δ、I 及相应的刚度矩阵K。因此，必须采用有效的方法预先求得约束子系统的各有关参

数。对于链式结构的转子系统,采用传递矩阵法是最为方便与准确的。

典型的约束子系统如图 8－4 所示,它是一个具有任意个刚性铰支的多跨转子,其中刚性铰支代表各约束边界。对于这样的多刚性铰支的多跨转子,应采用改进的传递矩阵法分析。

为了方便,模型的左、右两端均以自由端处理,即使原来不是自由端,也可假想地加上一虚拟轴段而成为自由端。对于左自由端可以写出如下边界条件:



图 8－4　约束子系统简图

$$\{y_0 \quad \theta_0 \quad M_0 \quad Q_0\} = \{y_0 \quad \theta_0 \quad 0 \quad 0\} \tag{8-24}$$

右自由端的边界条件为

$$\{y_n \quad \theta_n \quad M_n \quad Q_n\} = \{y_n \quad Q_n \quad 0 \quad 0\} \tag{8-25}$$

对于每一个约束点,即各刚性铰支处,显然,挠度应为零,即:$y_i = 0$。若有 N 个约束点,则可写出 N 个方程式:

$$y_i = 0 \quad (i = 1,2\cdots N) \tag{8-26}$$

由于 N 个约束点的约束力,又引进了 N 个未知参数 $R_i(i = 1, 2, \cdots, N)$。将式(8－26)与式(8－24)、(8－25)组合,可以写出 $N+2$ 个包含 $N+2$ 个未知参数的方程组:

$$\begin{cases} y_i = f_i(y_0,\theta_0,R_1,R_2,\cdots R_{i-1}) = 0 \\ M_n = f_{N+1}(y_0,\theta_0,R_1,R_2,\cdots R_N) = 0 \\ Q_n = f_{N+2}(y_0,\theta_0,R_1,R_2,\cdots R_N) = 0 \end{cases} \tag{8-27}$$

式中:$i = 1, 2, \ldots N$。

函数 f_1、f_2、$\cdots f_{N+1}$、f_{N+2} 可由下面推导的改进的传递矩阵法求得。

第一个约束点,$y_1 = 0$,可以用左端边界参数 y_0、θ_0 及第一轴段传递矩阵的有关元素表示为

$$y_1 = T(1,1,1)y_0 + T(1,1,2)\theta_0 = 0 \tag{8-28}$$

该约束点截面上的其他各状态参数可以写出如下:

$$\begin{cases} \theta_1 = T(1,2,1)y_0 + T(1,2,2)\theta_0 \\ M_1 = T(1,3,1)y_0 + T(1,3,2)\theta_0 \\ Q_1 = T(1,4,1)y_0 + T(1,4,2)\theta_0 \end{cases} \tag{8-29}$$

与此同时,在第一个约束点上具有约束反力 R_1。

第二个约束点,$y_2 = 0$,可以写出以第二轴段传递矩阵有关元素及约束点 1 上各状态参数的关系式如下:

$$y_2 = T(2,1,1)y_1 + T(2,1,2)\theta_1 + T(2,1,3)M_1 + T(2,1,4)(Q_1 + R_1) = 0$$

将式(8－28)和(8－29)代入得

$$\begin{aligned} y_2 = {} & T(2,1,1)[T(1,1,1)y_0 + T(1,1,2)\theta_0] + T(2,1,2)[T(1,2,1)y_0 + T(1,2,2)\theta_0] \\ & + T(2,1,3)[T(1,3,1)y_0 + T(1,3,2)\theta_0] + T(2,1,4)[T(1,4,1)y_0 + T(1,4,2)\theta_0] + T(2,1,4)R_1 \\ = {} & \sum_{i=1}^{4} T(2,1,i)[T(1,i,1)y_0 + T(1,i,2)\theta_0] + T(2,1,4)R_1 = 0 \end{aligned} \tag{8-30}$$

相应的 2 点上的其他状态参数为

$$\begin{cases} \theta_2 = \sum_{i=1}^{4} T(2,2,i)[T(1,i,1)y_0 + T(1,i,2)\theta_0] + T(2,2,4)R_1 \\ M_2 = \sum_{i=1}^{4} T(2,3,i)[T(1,i,1)y_0 + T(1,i,2)\theta_0] + T(2,3,4)R_1 \\ Q_2 = \sum_{i=1}^{4} T(2,4,i)[T(1,i,1)y_0 + T(1,i,2)\theta_0] + T(2,4,4)R_1 \end{cases} \tag{8-31}$$

依此类推,对于具有 N 个约束坐标的子系统,可写出相应的 N 个方程式 $y_i = 0$,其中包含左端边界未知状态参数 y_0、θ_0 以及该约束点左边各约束反力 R_1、R_2、$\cdots R_{i-1}$,共 $N+1$ 个未知参数。

回到方程组(8-27)的最后两式,可写成如下形式:

$$M_n = T(N+1,3,1)y_N + T(N+1,3,2)\theta_N + T(N+1,3,3)M_N + T(N+1,3,4)(Q_N + R_N) = 0$$

$$Q_n = T(N+1,4,1)y_N + T(N+1,4,2)\theta_N + T(N+1,4,3)M_N + T(N+1,4,4)(Q_N + R_N) = 0$$

代入相应的 y_N、θ_N、M_N 与 Q_N 表达式,可改写为

$$M_n = \sum_{n=1}^{4} T(N+1,3,n)\{\cdots\{\sum_{k=1}^{4} T(4,l,k)\{\sum_{j=1}^{4} T(3,k,j)\{\sum_{i=1}^{4} T(2,j,i)[T(1,i,1)y_0 + T(1,i,2)\theta_0] + T(2,j,4)R_1\} + T(3,k,4)R_2\} + T(4,l,4)R_3\} + \cdots\} + T(N+1,3,4)R_N = 0 \tag{8-32}$$

$$Q_n = \sum_{n=1}^{4} T(N+1,4,n)\{\cdots\{\sum_{k=1}^{4} T(4,l,k)\{\sum_{j=1}^{4} T(3,k,j)\{\sum_{i=1}^{4} T(2,j,i)[T(1,i,1)y_0 + T(1,i,2)\theta_0] + T(2,j,4)R_1\} + T(3,k,4)R_2\} + T(4,l,4)R_3\} + \cdots\} + T(N+1,4,4)R_N = 0 \tag{8-33}$$

式(8-32)、(8-33)包含了自由端的未知状态参数 y_0、θ_0 和各约束点的约束反力 R_1、R_2、$\cdots R_N$ 共 $N+2$ 个未知参数。

结合式(8-32)、(8-33)和式(8-28)~(8-31),组成一组包含 $N+2$ 个未知参数的 $N+2$ 个方程式的线性齐次方程组,简写为

$$\begin{cases} A(1,1)y_0 + A(1,2)\theta_0 + A(1,3)R_1 + \cdots + A(1,N+2)R_N = 0 \\ A(2,1)y_0 + A(2,2)\theta_0 + A(2,3)R_1 + \cdots + A(2,N+2)R_N = 0 \\ \cdots\cdots \\ A(N+2,1)y_0 + A(N+2,2)\theta_0 + A(N+2,3)R_1 + \cdots + A(N+2,N+2)R_N = 0 \end{cases} \tag{8-34}$$

式中的各系数均为各轴段的传递矩阵的组合,它们与轴段的几何、物理参数以及转速有关。由式(8-34)的系数行列式为零的条件,可求得约束系统的非零模态:

$$\det(A) = 0 \tag{8-35}$$

由式(8-35)求得各模态频率 Ω_c 之后,可由方程式(8-34)求得相应的模态振型 $\boldsymbol{\Phi}_i$。

为了求约束子系统的静位移模态及相应的模态矩阵,令式(8-34)右边依次轮流等于1,即依次令 $y_1 = 1, y_2 = 1, \cdots, y_N = 1$,解相应的非齐次方程组:

$$\begin{cases} A(1,1)y_0 + A(1,2)\theta_0 + A(1,3)R_1 + \cdots + A(1,N+2)R_N = 1 \\ A(2,1)y_0 + A(2,2)\theta_0 + A(2,3)R_1 + \cdots + A(2,N+2)R_N = 0 \\ \cdots\cdots \\ A(N+2,1)y_0 + A(N+2,2)\theta_0 + A(N+2,3)R_1 + \cdots + A(N+2,N+2)R_N = 0 \end{cases} \tag{8-36a}$$

$$\begin{cases} A(1,1)y_0 + A(1,2)\theta_0 + A(1,3)R_1 + \cdots + A(1,N+2)R_N = 0 \\ A(2,1)y_0 + A(2,2)\theta_0 + A(2,3)R_1 + \cdots + A(2,N+2)R_N = 1 \\ \qquad \cdots\cdots \\ A(N+2,1)y_0 + A(N+2,2)\theta_0 + A(N+2,3)R_1 + \cdots + A(N+2,N+2)R_N = 0 \end{cases} \tag{8-36b}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\begin{cases} A(1,1)y_0 + A(1,2)\theta_0 + A(1,3)R_1 + \cdots + A(1,N+2)R_N = 0 \\ A(N,1)y_0 + A(N,2)\theta_0 + A(N,3)R_1 + \cdots + A(N,N+2)R_N = 1 \\ \cdots\cdots \\ A(N+1,1)y_0 + A(N+1,2)\theta_0 + A(N+1,3)R_1 + \cdots + A(N+1,N+2)R_N = 0 \\ A(N+2,1)y_0 + A(N+2,2)\theta_0 + A(N+2,3)R_1 + \cdots + A(N+2,N+2)R_N = 0 \end{cases} \tag{8-36c}$$

对式(8－36a)、(8－36b)、…(8－36c)各非齐次方程组，令 $\Omega = 0$，可解出各对应的边界坐标释放产生单位位移时的静位移模态 $\boldsymbol{\delta}$、$\boldsymbol{I}$ 及相应约束点上的作用力与其他各约束点上的反作用力，即相应的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$。

(3) 算例

具有一个轴间支承的双转子模型系统如图 8－5 所示(参考文献[14])。内转子自转角频率为 $\omega_{01} = 1047.2\text{rad/s}$，外转子自转角频率为 $\omega_{02} = 1570.8\text{rad/s}$。在图 8－5 中同时给出了计算模型。表 8－1 列出此计算模型的有关数据，材料弹性模量 $E = 2.068 \times 10^{11}\text{N/m}^2$。

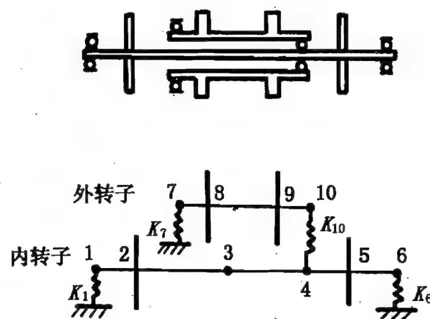


图 8－5　具有一个轴间支承的双转子系统及计算模型

表 8－1　算例模型的数据

转子	$I(\text{m}^4)$	站	m(kg)	$J_p(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	K(N/m)	L(m)
内转子	2.6467×10^{-9}	1	0.0577	0.0000	2.6269×10^{-7}	0.0762
		2	10.7023	0.0859		0.1778
		3	0.2499	0.0000		0.1524
		4	0.1538	0.0000		0.0508
		5	7.0869	0.0678		0.0508
		6	0.0385	0.000	1.7513×10^{-7}	
外转子	2.1935×10^{-8}	7	0.0470	0.0000	1.7513×10^{-7}	0.0508
		8	7.2020	0.0429		0.1524
		9	3.6920	0.0271		0.0508
		10	0.0470	0.0000	0.8756×10^{-6}	

用本方法分别计算了正向涡动(F)与反向涡动(B)的各阶固有频率，结果列于表 8－2。表中还列出该模型各阶固有频率的精确解(用传递矩阵法求得)(参考文献[13])。可以看到，本方法计算结果的相对误差，除个别模态超过 1‰ 外，均小于 0.3‰。表中还列出 Nelson 的部分计算结果供对照参考。(注：Nelson 在参考文献[14]中给出的结果是不对的，这里列出的是他于 1986 年重新计算后提供的。他所用的方法是有限元的分模态综合法，计算结果有些差别，尤其是高阶模态。)

表8-2 各阶固有频率计算结果与对比

涡动模式	精确解	本方法	误差‰	Nelson解
B	31.356	31.424	-3.620	31.416
B	150.535	150.545	-0.065	150.588
F	469.315	469.341	+0.054	468.574
B	638.798	638.783	-0.024	639.650
B	677.979	678.000	+0.030	678.415
F	727.428	727.561	+0.184	728.137
B	949.970	949.855	-0.120	950.867
F	1414.835	1415.098	+0.187	1413.890
B	1523.667	1523.753	+0.060	1527.230
B	1781.283	1781.739	+0.260	1787.170
F	2119.448	2119.944	+0.234	2135.760
F	2330.428	2330.448	+0.009	2329.820
F	2559.075	2559.085	+0.004	2564.300
B	2940.475	2939.985	-0.170	3206.620
F	3031.831	3032.087	+0.084	3292.130
B	3496.457	3495.951	-0.145	3516.530
F	4313.219	4313.235	+0.003	4314.240
F	5647.570	5647.225	-0.061	5646.510
B	15196.231	15195.110	-0.074	9791.040
F	15207.479	15209.225	+0.116	9814.950
B	22786.645	22786.485	-0.008	21710.900
F	22796.899	22797.19	+0.010	21730.800
B	27952.174	27951.160	-0.036	30567.300
F	27953.246	27959.015	+0.207	30586.200

(4) 模态截断误差分析

在实际转子的分析中,每个约束子系统一般具有几十个自由度。因此,每个子系统有几十个约束振动模态。如果全部约束振动模态都要计算出来,并参加耦合,则既增加约束振动模态计算工作量,更大大增加综合时的矩阵维数而显著增加计算工作量。实际上,发动机转子工作转速范围是一定的,工程上需要分析了解的是在工作转速范围内的转子动力学特性,对于成倍高于最高工作转速以上的固有频率,已经没有太大的实际意义。因此,在采用本方法时,往往采取适当的模态截断措施,即各子系统的约束振动模态无需全部算出,只需用它的最低的几个模态来参加综合即可。这样做必然给综合结果带来附加误差。

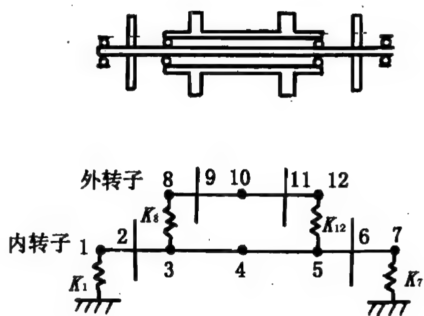


图8-6 具有两个轴间支承的双转子系统

图8-6为具有两个轴间支承的双转子系统模型,外转子的两个支承均安放在内转子上。内转子的自转转速为 n_1 = 9500r/min,外转子的自转转速为 n_2 = 13000r/min。轴材料的弹性模

量为 $E = 2.07 \times 10^{11} \mathrm{N/m^2}$。其他有关数据列于表 8－3 中。

表 8－3　具有两个轴间支承的双转子系统的原始数据

转子	$I(\mathrm{m^4})$	站	$m(\mathrm{kg})$	$J_p(\mathrm{kg \cdot m^2})$	$K(\mathrm{N/m})$	$L(\mathrm{m})$
内转子	3.976×10^{-8}	1	0.325	0	2.5×10^7	0.075
		2	10.45	0.1125		0.075
		3	0.935	0		0.225
		4	1.3205	0		0.225
		5	0.925	0		0.075
		6	8.45	0.09		0.075
		7	0.305	0	1.5×10^7	
外转子	5.2×10^{-8}	8	0.1932	0	1.2×10^7	0.075
		9	7.7796	0.0735		0.15
		10	0.3278	0		0.15
		11	6.2796	0.0432		0.075
		12	0.1732	0	1.0×10^7	

根据该转子的模型，内、外转子的约束子系统各有 7 个约束振动模态，加上两个约束静位移模态，综合时，正向与反向涡动分别各有 16 个模态。为了比较，分别采取两种不同的模态截断条件，计算整个系统的正向涡动的各阶固有频率。第一种是保留内转子的前五阶约束振动模态和外转子的前四阶约束振动模态；第二种是仅保留内转子的前三阶约束振动模态和外转子的前两阶约束振动模态。表 8－4 列出了计算结果。当无模态截断时，共有 16 个正向涡动固有频率，第一种模态截断条件，只求得 11 个固有频率，第二种模态截断条件则只有 7 个固有频率。

由表 8－4 可见，第一种模态截断条件下，只是缺少了 5 个高阶模态，计算出来的 11 阶模态频率均具有较高精度，模态截断引起的误差均小于 1‰；而第二种模态截断条件只算出 7 个固有频率，模态截断引起的误差均大于 1‰，最大误差达 76‰。这说明适当的模态截断可明显减少工作量而保持必要的精度，过分的模态截断虽然减少了工作量，却带来了太大的误差。

表 8－4　模态截断对综合结果的影响

无模态截断	第一种截断条件	第二种截断条件
400.433	400.466/0.08	403.013/6.0
894.415	894.477/0.07	901.146/7.5
1431.982	1432.060/0.05	1435.570/2.5
1829.747	1829.774/0.01	1834.881/2.8
2119.612	2119.625/0.00	2125.860/2.9
3056.670	3056.723/0.02	3289.190/76.0
3422.269	3422.277/0.00	3538.383/34.0
3721.987	3721.991/0.00	
4752.985	4752.986/0.00	
12034.049	12041.858/0.60	
13398.477	13409.066/0.80	
14852.887		
15920.287		
16302.060		
21929.734		
23076.237		

模态截断的原则是：对于约束振动模态频率比较靠近最大工作转速的模态，不宜抛弃。只

有那些远高于最大工作频率的约束振动模态才可以考虑截断抛弃。然而,每一个约束子系统少必须保留一个模态,哪怕该约束振动模态频率远远高于最大工作频率,也不能抛弃,否则会失去该子系统的影响。

8.2.1.3　复杂转子－支承系统的支承刚度优化

(1) 频率禁区与优化目标函数

正确合理地确定频率禁区对于发动机转子－支承系统的优化设计结果有密切的关系。理论上说,可以要求将各阶临界转速调整到离开各工作转速最远的位置,即临界转速处于两工作转速的中间。这样的要求是很苛刻的,优化设计的难度相当大。实际上,这样要求是没有要的,只要将临界转速调整到离开工作转速有一定余量就可以了。在每一个主要工作转速,定一个禁区,一般取运行转速的 80% ～ 120% 作为频率禁区,将临界转速调整到禁区的边界对于航空发动机,可能存在多个频率禁区,例如,慢车状态与设计工作转速附近都必须定为率禁区。在有些情况下,其运行转速范围很宽,从慢车到最大工作状态都可能停留;这时规定频率禁区相当宽。对于这种大范围的频率禁区,有时给支承刚度的优化设计带来很大困难,至无法得到优化结果。在这种情况下,可考虑将一个大的频率禁区划为两个或若干个较小的率禁区。在各频率禁区之间留出一定的"自由空间",允许在该小"自由空间"内存在临界转(一般是刚体型临界转速)。当然,在这个小的"自由空间"里,只允许过渡状态,不得在此范内长期停留。对于这种情况,优化计算的准确度必须较高。

频率禁区可以用上、下限频率来表示,记为 $\omega_{jl} \sim \omega_{ju}$,下角标 j 表示第j个禁区,l表示下限u 表示上限。

在对支承刚度优化设计时,基本要求是将转子－支承系统的临界转速调整到频率禁区界,于是,可将目标函数表示为临界转速与频率禁区的上、下限的差值最小:

$$\text{Min}\,W = \text{Min}\sum_{i=1}^{N}\Delta\omega_i$$

$$\Delta\omega_i = \begin{cases} \omega_{ci} - \omega_{jl} & \omega_{jl} \leqslant \omega_{ci} \leqslant \omega_{ju} \\ 0 & \omega_{j-1,u} \leqslant \omega_{ci} \leqslant \omega_{jl} \end{cases} \qquad (8-3$$

式中:ω_{ci}——第 i 阶临界转速;

N——在所研究的频率范围内的临界转速个数。

在许多情况下,对支承刚度的优化设计宜分别对各阶临界转速进行。这样做的好处是:理概念清楚,优化设计过程比较简明。其优化目标函数表示为

$$\Delta\omega_i = \omega_{ci} - \omega_{jl} \leqslant \varepsilon \qquad (8-3$$

式中的 ε 为一给定的小数。

(2) 刚度最小值约束条件

在对支承刚度优化设计中,可能会要求某一支承刚度的要求值过低,以致支承强度不能足要求。因此,在优化设计过程中,对于支承刚度的最低允许值必须给予规定,这就是刚度最值约束条件。当某一个支承的刚度已达到最低允许值时该支承便退出优化,而在其他各支承续寻优设计。

(3) 灵敏度分析

为了正确地选择和调整支承刚度,在多支承情况下,必须进行灵敏度分析,以便确定最效的支承进行刚度优化,直到将临界转速调出频率禁区。

支承刚度对系统临界转速的灵敏度分析,就是确定各支承在刚度改变时,对系统临界转

影响的程度。为了以最少的参数改变达到最有效的临界转速调整，一般总是调整灵敏度最高的支承。由于支承刚度对临界转速的影响既不是简单的线性关系，也不是简单的函数关系，尤其是复杂转子 - 支承系统，无法用显式来反映灵敏度，因此，无法用直接求导数的方法来求解各支承刚度对临界转速的灵敏度，而必须采用坐标轮流法和刚度增量法来求解。

在式(8 - 21) 中，A_{22} 包含轴的抗弯刚度 K_s和支承刚度 K_b。一般情况下，K_b 等于轴承的刚度，可取为 $1\times10^8\sim5\times10^8$N/m。当采用弹性支承时，其刚度和轴承刚度构成串联弹簧，从而降低了有效支承刚度。因此，优化设计时，先取定轴承刚度值。在灵敏度分析时，给一个刚度增量(负增量)，便可计算出相应的灵敏度。为使灵敏度的比较有一个共同的基准，增量值按刚度的相对增量计。由于式(8 - 21) 的求解过程比较简单，求解灵敏度十分迅速。求得各支承刚度对临界转速的灵敏度后，取灵敏度最高者进行调整。如此循环，直至满足优化目标的要求。

对于不同阶的临界转速，相应的振型也不相同，各支承刚度对临界转速的灵敏度也是不同的。在优化设计时，须不断地进行灵敏度分析，以保证优化过程始终沿着最佳路线进行。

(4) 刚度优化示例

图 8 - 7 为一带有一个轴间支承的双转子系统模型。内转子由 11 站、外转子由 7 站组成，4 个支承均作为边界坐标处理。轴承刚度分别取为：$K_1=2.5\times10^7$ N/m，$K_{11}=2.5\times10^7$ N/m，$K_{12}=3.0\times10^7$ N/m，$K_{18}=2.0\times10^7$N/m。

内转子与外转子之间的轴间支承 7 也是一个边界坐标。由于不考虑在此轴间支承处加弹性支承，故该边界坐标不参加优化。

外转子与内转子的转速比为 1.1 : 1。

转子系统的有关数据列于表 8 - 5 中。

要求该转子 - 支承系统的各阶临界转速(内转子同步与外转子同步) 均避开如下两个内转子转速范围(由于内、外转子转速比一定，故外转子的相应转速范围也确定)：128 ~ 192rad/s，512 ~ 768rad/s，即频率禁区的上下限分别为：$\omega_{1l}=128$rad/s，$\omega_{1u}=192$rad/s，$\omega_{2l}=512$rad/s，$\omega_{2u}=768$rad/s。

对该系统模型作未加任何弹性支承时的同步临界转速计算，得到内转子同步的前三阶临界转速分别为：$\omega_{c1}=159.14$rad/s，$\omega_{c2}=605.75$ rad/s，$\omega_{c3}=1429.09$rad/s。显然，ω_{c1}、ω_{c2} 分别落入第 1、2 频率禁区。因此，必须作支承刚度的设计优化。

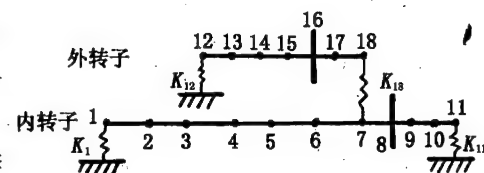


图 8 - 7　带轴间支承的双转子系统

表 8 - 5　双转子系统模型的数据

转子	站	m(kg)	J_p(kg · m²)	J_d(kg · m²)	L(m)	EI(N · m²)
内转子	1	0.3063	0	0	0.140	1590
	2	0.3675	0	0	0.105	
	3	0.3419	0	0	0.055	
	4	0.1838	0	0	0.115	
	5	0.3676	0	0	0.150	
	6	0.3676	0	0	0.105	
	7	0.3390	0	0	0.095	
	8	5.6658	0.02446	0.1223	0.015	

续表 8-5

转子	站	m(kg)	J_p(kg·m²)	J_d(kg·m²)	L(m)	EI(N·m²)
内	9	0.3676	0	0	0.090	
转	10	0.2929	0	0	0.030	
子	11	0.0735	0	0	0.000	
	12	0.1256	0	0	0.0275	
	13	0.7302	0	0	0.065	
外	14	0.7376	0	0	0.080	
转	15	0.4436	0	0	0.045	44869
子	16	7.0349	0.0366	0.0133	0.0183	
	17	0.5223	0	0	0.014	
	18	0.4758	0	0	0.000	

首先,求得各支承的刚度对内转子同步的一阶临界转速的灵敏度分别为:$S_{k_{12}}=0.004$,$S_{k_{18}}=0.121$,$S_{k_1}=0.023$,$S_{k_{11}}=0.1947$。于是,对 K_{11} 作优化设计。经过18次优化迭代后(每次迭代均需重新计算各支承刚度的灵敏度,在本例中,一阶临界转速灵敏度最高者始终是 K_{11}),得到当 $K_{11}=632246$N/m时,临界转速 $\omega_{c1}=126.60$rad/s,离开了第一频率禁区。

根据优化后的 K_{11} 值,计算得到内转子同步的二阶临界转速为 $\omega_{c2}=53.13$rad/s,仍落在第二频率禁区内,于是继续进行支承刚度优化。

灵敏度分析表明,$S_{k_{11}}$ 仍然是各支承中最灵敏者。经过4次迭代优化后,$K_{11}=339008$N/m,得各内转子同步临界转速分别为 $\omega_{c1}=96.70$rad/s,$\omega_{c2}=511.65$rad/s,$\omega_{c3}=799.65$rad/s。显然,内转子同步各阶临界转速均已离开频率禁区。

按前面优化所得刚度值 K_{11},对外转子同步的各阶临界转速检查计算。如果不符合频率禁区的要求,则必须进行类似的优化设计,直到满足要求为止。然后再检查内转子同步情况。总之,优化设计所得的支承刚度必须同时满足内、外转子同步临界转速均离开频率禁区的要求。在本例中,$K_{11}=339008$N/m 已满足要求。

若对支承最低刚度予以限制,如最小刚度 $K_{min}\not<560000$N/m,频率禁区改为 120 ~ 180rad/s 及 496 ~ 732rad/s。优化设计开始时仍是 $S_{k_{11}}$ 最大。经过 17 次优化迭代后,$K_{11}=562950$N/m,此时相应的一阶临界转速为 $\omega_{c1}=123.1$rad/s,仍未离开频率禁区。进一步优化将导致 $K_{11}<K_{min}$。于是,K_{11} 退出优化,仅对 K_{18}、K_1、K_{12} 三个支承继续进行刚度优化。得到 S_{k18} 为最大。对 K_{18} 经过13次优化迭代后,支承刚度 $K_{18}=10099512$N/m,相应的一阶临界转速调整到 $\omega_{c1}=119.7$rad/s,离开了第一频率禁区。但二阶临界转速 $\omega_{c2}=521.44$rad/s,仍落在第二频率禁区内。进一步优化仍对 K_{18} 进行。经过5次优化迭代后,刚度值为 $K_{18}=592504$N/m,临界转速值分别为 $\omega_{c1}=116.74$ rad/s 和 $\omega_{c2}=471.14$rad/s,离开了频率禁区。但三阶临界转速 $\omega_{c3}=556.46$rad/s,落在第二频率禁区内。而进一步优化将导致 $K_{18}<K_{min}$,故仅在 K_1与 K_{12} 两个支承中进行。灵敏度分析得出 $S_{k_1}>S_{k_{12}}$,于是经过 14 次优化后,得 $K_1=1327720$N/m,相应各阶临界转速均移出频率禁区。分别为:$\omega_{c1}=116.03$rad/s,$\omega_{c2}=470.63$rad/s,$\omega_{c3}=495.26$rad/s。相应的优化后的支承刚度值为:$K_{11}=562950$N/m,$K_{18}=592504$N/m,$K_1=1327720$N/m,$K_{12}=3\times10^7$N/m。

.2.2　以振动最小为目标的阻尼器优化设计

发动机转子 - 支承系统以调整临界转速为目标的支承刚度优化设计,只解决了在主要工乍状态下无临界转速的问题。而发动机从起动到最大工作状态之间,可能要超过一阶、二阶甚≅三阶临界转速。为了保证发动机转子在超越各阶临界转速时以及在正常运行状态下都具有最小的振动,一般应采用阻尼器。如何布置阻尼器,阻尼系数应取多大,才能保证发动机在过渡犬态和正常运行时都最平稳,振动最小,就是以振动最小为目标的阻尼器优化设计的任务。

.2.2.1　优化的目标函数

转子 - 支承系统的阻尼器优化设计可选用不同的目标函数。在旋转机械中,转子与静子之间有严格的间隙要求,如工作叶片叶尖与机匣之间、篦齿封严装置转子与静子之间均要求有尽可能小而均匀的径向间隙。转子的振动将导致轴线弯曲,造成间隙不均匀。为了避免转子与争子碰摩,不得不取较大的间隙,这与前面的要求相矛盾。因此,对振动幅值必须加以严格的限刮。

控制振动的指标,可取振动烈度即振动速度,振动位移或外传力。

(1) 以振动烈度作为优化目标函数

按照测量振动的国际标准,以振动烈度来表征系统振动的强烈程度。对于一个转子 - 支承系统,各点的振动烈度是不同的。因此,以平均振动烈度表示:

$$R_j = \frac{1}{M}\sqrt{\sum_{i=1}^{M} \dot{Z}_{ij}^2} \tag{8-39}$$

式中:$\dot{Z}_{ij}$—— 第 j 阶振动模态下各 i 坐标的速度幅值,m/s;

M—— 坐标总数;

R_j—— 第 j 阶振动模态的均方根速度幅值,m/s。

总的平均振动烈度为各模态的均方根速度幅值的平均值,即:

$$R = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{M}\sqrt{\sum_{i=1}^{M} \dot{Z}_{ij}^2} \tag{8-40}$$

式中:N —— 模态总数。

优化目标函数最小值表示为

$$\mathrm{Min}R = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{M}\sqrt{\sum_{i=1}^{M} \dot{Z}_{ij}^2}\right) \tag{8-41}$$

(2) 以最大振动位移作为优化目标函数

在有些情况下,以振动位移幅值来代表振动的强烈程度比较方便。

位移振幅表示为

$$R = \mathrm{Max}\,|\,Z_{ij}\,| \tag{8-42}$$

式中:Z_{ij}—— 第 j 阶振动模态下的第 i 坐标的位移幅值。

目标函数最小值表示为

$$\mathrm{Min}R = \mathrm{MinMax}\,|\,Z_{ij}\,| \tag{8-43}$$

在不同频率下,位移幅值引起的振动烈度是不同的。当采用位移幅值作为优化目标数时,各模态最好分别计算,否则,低频模态可能会将高频模态淹没。

(3) 以外传力作为优化目标函数

从另一个角度考虑，抑制振动的程度可用外传力的大小来衡量。于是，优化目标函数可以用支承外传力表示：

$$R = \mathrm{Max}F_{ij} \tag{8-44}$$

式中：F_{ij}——第 j 阶振动模态下第 i 支承的外传力幅。

优化目标函数最小值为

$$\mathrm{Min}R = \mathrm{MinMax}F_{ij} \tag{8-45}$$

一般说来，外传力的大小与振动烈度、位移振幅的大小有直接关系，振动烈度或位移振幅大，外传力也大。在简谐激励下，外传力与位移振幅之间的关系可表示为

$$F_{ij} = (K_i + \mathrm{i}C_i\Omega)Z_{ij} \tag{8-46}$$

在一定的支承刚度 K_i 值下，当阻尼系数 C_i 增大时，振动将减弱，位移振幅 Z_{ij} 减小，外传力 F_{ij} 也减小。然而，当阻尼系数 C_i 增加到某一值后，由于位移振幅并不成比例地减小，外传力 F_{ij} 反而增大。在这种情况下，振幅减小并不一定意味外传力也降低。因此，在选取目标函数时，一般应当兼顾振动烈度、位移振幅与外传力诸方面。为了优化设计的方便，可选取其中一种作为目标函数，其他可作为约束条件。

(4) 以振动能量作为优化目标函数

从某种意义上说，以振动能量代表振动的严重程度更合理。可在振动烈度表达式的基础上，计入相应的振动质量，目标函数可表示为

$$R_j = \sum_{i=1}^{M} m_i\dot{Z}_{ij}^2 \tag{8-47}$$

如果将各模态的振动能量一起叠加，总的目标函数可表示为

$$R = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} m_i\dot{Z}_{ij}^2 \tag{8-48}$$

式中：M——坐标总数；

N——模态数。

对于转子－支承系统，为了更确切地反映转轴弯曲变形的程度，还可将弯曲变形能作为优化目标函数：

$$R_j = \sum_{i=1}^{M} M_{ij}\Delta\theta_{ij} \tag{8-49}$$

式中：M_{ij}——第 j 阶振动模态下各坐标 i 截面上的弯矩，N·m；

$\Delta\theta_{ij}$——第 j 阶振动模态下各坐标 i 截面的转角增量，rad。

各模态总应变能表示为

$$R = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} M_{ij}\Delta\theta_{ij} \tag{8-50}$$

如果以弯曲应变能作为优化目标函数，则振动烈度、位移振幅和外传力应作为限制条件保证。

8.2.2.2　不平衡响应计算

无论采用哪一种优化目标函数，都必须计算转子－支承系统的振动响应。引起转子振动的最常见与最主要的原因是转子不平衡。因此，在阻尼器优化设计时，主要分析转子－支承系统的不平衡响应。

对于具有阻尼的复杂转子－支承系统受外力作用下的强迫振动，可以写出与式(8－2)相

对应的非齐次方程

$$M\ddot{Z} \mp \mathrm{i}\omega_0 G\dot{Z} + C\dot{Z} + KZ = F \tag{8-51}$$

上式右边外力项为不平衡激励力，可表示为

$$F = U\Omega^2 = Me\Omega^2 \tag{8-52}$$

式中：U—— 不平衡量列阵；

　　e—— 不平衡偏心值列阵；

　　M—— 系统质量矩阵；

　　Ω—— 转子系统的进动角频率。

与分析固有频率的处理方法一样，将系统坐标划分为内部与边界坐标，并引用与式(8－9)相同的坐标变换矩阵，可以得到与式(8－21)相对应的非齐次方程

$$\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{8-53}$$

Q_1、Q_2 为内部与边界坐标上所受到的广义外力。不平衡作用下，广义外力为

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \delta \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} F_{\mathrm{i}} \\ F_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \delta \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} M_{\mathrm{i}}e_{\mathrm{i}} \\ M_{\mathrm{b}}e_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \Omega^2 \tag{8-54}$$

式(8－53)的特解就是所求系统的不平衡响应。

线性系统在简谐外力作用下，其稳态强迫响应频率与激励力频率相同，相位取决于系统的阻尼及外激励力频率与系统固有频率的关系。为了表示响应与外激励力之间的相位差，采用复数坐标代替原来的坐标，于是，式(8－53)改写成为

$$\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1+\mathrm{i}I_1 \\ R_2+\mathrm{i}I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^{\mathrm{R}}+\mathrm{i}Q_1^{\mathrm{I}} \\ Q_2^{\mathrm{R}}+\mathrm{i}Q_2^{\mathrm{I}} \end{bmatrix} \tag{8-55}$$

式中：$\begin{bmatrix} R_1+\mathrm{i}I_1 \\ R_2+\mathrm{i}I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$

R_1、R_2 为内部与边界广义坐标的实部，I_1、I_2 为内部与边界广义坐标的虚部；

$\begin{bmatrix} Q_1^{\mathrm{R}}+\mathrm{i}Q_1^{\mathrm{I}} \\ Q_2^{\mathrm{R}}+\mathrm{i}Q_2^{\mathrm{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$

Q_1^{R}、Q_2^{R} 为作用在内部与边界坐标上的广义不平衡力的实部，Q_1^{I}、Q_2^{I} 为相应的虚部。在实际计算时，一般取不平衡偏心方向为基准方向，不平衡力只取实部，无虚部，即 $Q_1^{\mathrm{I}} = Q_2^{\mathrm{I}} = 0$。

为了书写简洁，将式(8－55)改写为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D+\mathrm{i}E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1+\mathrm{i}I_1 \\ R_2+\mathrm{i}I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^{\mathrm{R}}+\mathrm{i}Q_1^{\mathrm{I}} \\ Q_2^{\mathrm{R}}+\mathrm{i}Q_2^{\mathrm{I}} \end{bmatrix} \tag{8-56}$$

式中：$A = -\Omega^2\Phi^{\mathrm{T}}M_{\mathrm{i}}\Phi \pm \Omega\Phi^{\mathrm{T}}\omega_{0\mathrm{i}}G_{\mathrm{i}}\Phi + \Phi^{\mathrm{T}}(\Omega_{\mathrm{c}}^2M_{\mathrm{i}} \mp \Omega_{\mathrm{c}}\omega_{0\mathrm{i}}G_{\mathrm{i}})\Phi$；

　　$B = -\Omega^2\Phi^{\mathrm{T}}M_{\mathrm{i}}\delta \pm \Omega\Phi^{\mathrm{T}}\omega_{0\mathrm{i}}G_{\mathrm{i}}\delta$；

　　$C = -\Omega^2\delta^{\mathrm{T}}M_{\mathrm{i}}\Phi \pm \Omega\delta^{\mathrm{T}}\omega_{0\mathrm{i}}G_{\mathrm{i}}\Phi$；

　　$D = -\Omega^2\delta^{\mathrm{T}}M_{\mathrm{i}}\delta \pm \Omega\delta^{\mathrm{T}}\omega_{0\mathrm{i}}G_{\mathrm{i}}\delta - \Omega^2M_{\mathrm{b}} \pm \Omega\omega_{0\mathrm{b}}G_{\mathrm{b}} + K_{\mathrm{b}}$；

　　$E = \Omega C_{\mathrm{b}}$。

显然，式(8－56)是复数方程组。为了简化计算，便于计算机编程，可将式(8－56)扩展成如下实数形式：

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & -E \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & E & C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^{\mathrm{R}} \\ Q_2^{\mathrm{R}} \\ Q_1^{\mathrm{I}} \\ Q_2^{\mathrm{I}} \end{bmatrix} \qquad (8-57)$$

将式(8－54)代入式(8－57)可得

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & -E \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & E & C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} M_{\mathrm{i}} e \\ \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} M_{\mathrm{i}} e + I^{\mathrm{T}} M_{\mathrm{b}} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Omega^2 \qquad (8-58)$$

式(8－58)右边为不平衡广义力，它与进动角频率 Ω 有关，也取决于系统不平衡的情况。式中的 $\boldsymbol{\Phi}$、$\boldsymbol{\delta}$、$\boldsymbol{I}$ 已在求约束子系统的约束振动模态和约束静位移模态时得到。方程组左边的各系数 A、B、C、D 也均包含了系统的参数 M_{i}、M_{b}、G_{i}、G_{b}、$\omega_{0\mathrm{i}}$、$\omega_{0\mathrm{b}}$ 以及约束子系统的约束振动模态 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 Ω_{c}、约束静位移模态 $\boldsymbol{\delta}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 以及刚度矩阵 K_{b} 和阻尼矩阵 C_{b}，也是进动角频率 Ω 的函数。因此，当给定了系统的不平衡偏心值 e 后，就可由式(8－58)计算在不同进动角频率(主转子转速)下的不平衡响应 R_1、R_2、I_1、I_2。然后，经坐标变换，求得物理坐标上的稳态不平衡响应：

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{\mathrm{i}} \\ Z_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\mathrm{i}} + \mathrm{i} Y_{\mathrm{i}} \\ X_{\mathrm{b}} + \mathrm{i} Y_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 + \mathrm{i} I_1 \\ R_2 + \mathrm{i} I_2 \end{bmatrix} \qquad (8-59)$$

或写成为

$$\begin{bmatrix} X_{\mathrm{i}} \\ X_{\mathrm{b}} \\ Y_{\mathrm{i}} \\ Y_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (8-60)$$

于是，物理坐标上的稳态不平衡响应的幅值及相位可表示为

$$[\,|Z|\,] = \begin{bmatrix} |Z_{\mathrm{i}}| \\ |Z_{\mathrm{b}}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_{\mathrm{i}}^2 + Y_{\mathrm{i}}^2)^{0.5} \\ (X_{\mathrm{b}}^2 + Y_{\mathrm{b}}^2)^{0.5} \end{bmatrix} \qquad (8-61)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_{\mathrm{i}} \\ \psi_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}\left(\dfrac{Y_{\mathrm{i}}}{X_{\mathrm{i}}}\right) \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{Y_{\mathrm{b}}}{X_{\mathrm{b}}}\right) \end{bmatrix} \qquad (8-62)$$

如果要求系统在不平衡力作用下的速度响应，只要将式(8－59)～(8－61)所求得的位移乘以相应的角频率值即可：

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{\mathrm{i}} \\ \dot{Z}_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\mathrm{i}} \\ Z_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \Omega \qquad (8-63)$$

要求系统的振动能量，可按下式确定：

$$T = \dot{Z}^{\mathrm{T}} M \dot{Z} = [\dot{Z}_{\mathrm{i}} \quad \dot{Z}_{\mathrm{b}}] \begin{bmatrix} M_{\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & M_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}_{\mathrm{i}} \\ \dot{Z}_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \qquad (8-64)$$

续表 8-6

No.	m(kg)	J_p(kg·m²)	J_d(kg·m²)	L(m)	EI(N·m²)
15	0.8865	1.666E-3	9.533E-4	0.01848	704800
16	0.3994	1.103E-3	5.798E-4	0.01648	930400
17	1.6128	4.255E-3	2.275E-3	0.02026	5112000
18	2.4509	5.602E-3	3.154E-3	0.03026	1543000
19	1.1303	2.134E-3	1.267E-3	0.007	700300
20	0.3985	1.351E-3	3.336E-4	0.01445	699500
21	1.0818	1.077E-3	9.971E-4	0.05005	334400
22	1.0183	6.63E-3	1.099E-3	0.07545	12219
23	1.2706	1.4268E-3	1.377E-3		5650

优化设计开始时，前后支承均不加弹性支承。灵敏度分析表明，后支承灵敏度比前支承高。过 5 次优化迭代后，后支承刚度值为 K_r = 50611704N/m，对应的一阶临界转速 n_{c1} = 097r/min，满足调整要求；但二阶临界转速为 n_{c2} = 41102r/min，却落在工作转速范围内，且为曲振型，故必须进而对此模态进行优化设计。灵敏度分析表明，前支承的灵敏度高于后支承，对前支承的刚度进行优化。经 6 次迭代后，前支承刚度为 K_f = 35068672N/m，二阶临界转速为 n_{c2} = 33153r/min。再作灵敏度分析，后支承灵敏度高于前支承，故对后支承进行优化迭。此后，前后弹性支承的灵敏度交替变化，故交替优化前后支承，经过 16 次优化迭代后，得到化结果为：K_f = 10664573N/m，K_r = 10615302N/m，n_{c1} = 8808r/min，n_{c2} = 19093r/min，n_{c3} = 999r/min。

图 8-9 为相应的振型。显然其中一、二阶平动与摆动，三阶为轴线弯曲型临界转速，已远高于运行转速范围，优化结束。

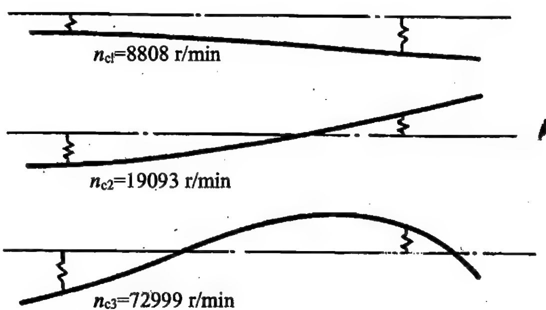


图 8-9　振型图

由于结构与工艺诸方面的原因，研制中未完全实现上述优化结果，而确定后支承采用 = 2.54 × 10⁷N/m 的弹性支承。为此，重新对支承刚度优化。

为将临界转速调整到整个工作转速区之，前支承刚度必须远远低于 1 × 10⁷ N/m。鉴保证弹性支承强度以及转子下沉量的限制，允许前支承刚度太低，优化遇到困难。于是，能改变频率禁区，将原来一个大频率禁区 000 ~ 45000 r/min 改变为两个较小的频率禁区 17000 ~ 19000r/min 和 22000 ~ 45000r/min。19000 ~ 22000r/min 之间开了一个“自由空间”，允许在这个范围内存在一个刚体模态临界转。经优化后，得到 K_f = 1.28 × 10^7N/m，K_r = 2.54 × 10^7N/m 时的各阶临界转速为：n_{c1} = 223r/min（平动）；n_{c3} = 21963r/min（摆动）；n_{c3} = 70665r/min（一弯）。

该轴流与离心组合压气机试验件在装用了该两弹性支承后（相应地设计了前后挤压油膜尼器），除了在 22000r/min 有微小振动外，在整个测试运行转速范围内均工作稳定，顺利地完了组合压气机试验任务。

8.3.2 某型机的自由涡轮动力输出转子-支承系统的支承刚度与阻尼器优化设计

图8-10为某型机自由涡轮动力输出转子系统简图。它是前输出轴,带有细长的弹性轴该动力输出转子由双级自由涡轮、弹性轴及输出轴组件组成,双级自由涡轮转子与弹性轴的安装边连接,构成一种悬臂式异型结构转子。转子由后部两个滚动轴承支承,前轴承带有弹性支承与挤压油膜阻尼器;弹性轴前端通过花键套齿与输出轴组件连接,输出轴组件为一短而粗的轴,由两个滚珠轴承支承,其后端特制一鼠笼式弹性支承用来辅助支承弹性轴,并附有挤压油膜阻尼器。



图8-10 某型机自由涡轮动力输出转子简图

该自由涡轮的设计工作转速为 n_{op} = 20900r/min,慢车转速 n_{idle} = 10000r/min。

为便于分析,将转子系统划分成为弹性轴转子子系统Ⅰ、自由涡轮转子子系统Ⅱ及动力输出轴子系统Ⅲ,如图8-11所示。各转子子系统的有关参数列于表8-7。

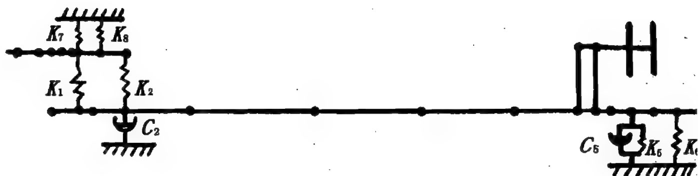


图8-11 计算用模型

表8-7 某型机自由涡轮动力输出转子的有关数据

转子	No.	m(kg)	J_p(kg·m²)	J_d(kg·m²)	L(m)	EI(N·m²)	K(N/m)
	1	0	0	0	0	5856	
	2	0.104	0	0	0.04774	5856	
	3	0.0515	0	0	0.01603	5856	4E8
	4	0.104	0	0	0.04665	5856	
	5	0.044	0	0	0.09003	3872	1E8
	6	0.5351	0	0	0.17148	3825	
	7	0.322	0	0	0.17515	4264	
	8	0.2675	0	0	0.12489	4143	
Ⅰ	9	0.257	0	0	0.11291	4143	
	10	0.1	0	0	0.003	40000	
	11	0.07	0	0	0.003	40000	
	12	0.1	0	0	0.05647	13136	
	13	0.75	0	0	0.03638	13136	2E8
	14	0.15	0	0	0.03638	13136	
	15	0.35	0	0	0.054	13136	2E8
	16	0.1774	0	0	0.01	13136	
	1	0	0	0	0	500000	
Ⅱ	2	0.06	0	0	0.006	500000	
	3	0.06	0	0	0.04914	300000	

续表 8－7

转子	No.	m(kg)	J_p(kg · m²)	J_d(kg · m²)	L(m)	EI(N · m²)	K(N/m)
Ⅱ	4	4.4648	0.0356355	0.0178175	0.03886	584420	
	5	5.54336	0.04926	0.02463	0.05	584420	
Ⅲ	1	0.2905	0	0	0.04256	50047	
	2	0.3013	0	0	0.02712	64150	
	3	0.2432	0	0	0.012	51878	
	4	0.0996	0	0	0.01	113090	
	5	0.0877	0	0	0.003	81045	
	6	0.1	0	0	0.023	113090	4E8
	7	0.3	0	0	0.015	113090	4E8
	8	0.1	0	0	0.02	23149	

按照刚性支承条件，即未加弹性支承与附加支承，验算该转子系统的各阶临界转速，其结果为：$n_{c1} = 10172$r/min，$n_{c2} = 23507$r/min。正好分别在慢车转速和设计工作转速附近，转速裕度分别为 1.7% 和 12.7%，而且均为弹性轴弯曲型；在二阶临界转速下，涡轮转子处具有最大振幅，这是不能容许的。

在分析两阶振型的基础上，可以得出，必须在弹性轴中部增加附加支承，以便有效地减小弹性轴的变形。但由于受到具体结构的限制，无法在最大振幅处加附加支承，只能在输出轴后端增加弹性轴的附加支承。对于增加附加支承的转子－支承系统，又作了临界转速计算。取附加支承的刚度为 1×10^8N/m。计算结果为：$n_{c1} = 18089$r/min，相当于最大工作转速的 86.5%，且为弯曲型临界转速。可见，单纯增加附加支承无法从根本上改善该转子系统的动力学特性。因此，需要进行调整临界转速的支承刚度优化设计。

规定如下两个频率禁区：$\omega_{1l} = 800$rad/s($n_{1l} = 7640$r/min)，$\omega_{1u} = 1400$rad/s($n_{1u} = 13370$r/min)，$\omega_{2l} = 1500$rad/s($n_{2l} = 14324$r/min)，$\omega_{2u} = 3050$rad/s($n_{2u} = 29125$r/min)。

灵敏度分析得出支承 2 最为灵敏，故调整 K_2。经 12 次迭代，支点 2 的刚度由 1×10^8N/m 降低到 $K_2 = 11774143$N/m，对应的 $n_{c1} = 14315$r/min，$n_{c2} = 28960$ r/min，即一阶临界转速调离了频率禁区，但二阶临界转速又落入第二禁区；而且还有两个问题：一是一阶临界转速是弹性轴弯曲型，对应的转速太高；二是二阶临界转速下，自由涡轮振幅太大，而且对后支承刚度的灵敏度极高，后支承刚度的变化将导致二阶临界转速的大幅度变化。因此，仍然比较危险，要求继续优化。

进一步的优化针对二阶临界转速，灵敏度分析得知涡轮前支承具有很高的灵敏度，故调整 K_5，经 14 次优化迭代后，支承刚度已调到设定的最低限制值 $K_5 = 4.5\times10^8$N/m，此时一阶临界转速为 $n_{c1} = 8566$r/min，未达到慢车转速的裕度。在附加支承上继续优化，经 15 次迭代后，一阶临界转速为 $n_{c1} = 7625$r/min，二阶临界转速为 $n_{c2} = 13478$r/min，三阶临界转速为 $n_{c3} = 33747$r/min，均已调离频率禁区。各

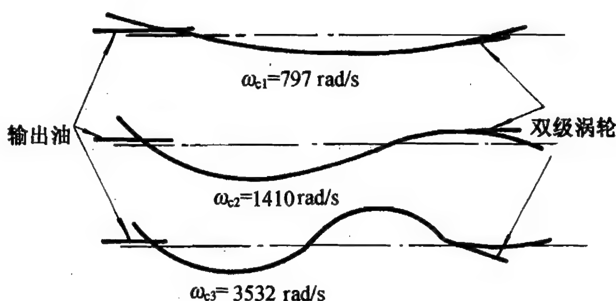


图 8－12　各阶振型

阶临界转速对应的振型如图 8 - 12 所示。此时对应的两个弹性支承刚度为：$K_2 = 2.5 \times 10^8$ N/m，$K_5 = 4.304 \times 10^8$ N/m。

由振型分析可见，尽管各阶临界转速均已调离频率禁区，仅是作为过渡状态须超越两阶临界转速。但是，这两阶临界转速均属弹性轴弯曲振型，如果没有必要的阻尼，仍然有可能使振幅过大而发生危险。图 8 - 13 所示为未采取阻尼措施时的不平衡响应。因此，必须采取有效的阻尼措施。

以最大振动能量作为优化目标函数，并以阻尼器偏心比作为限制条件进行阻尼优化设计。表 8 - 8 为优化迭代过程的主要参数。可以看到，当后阻尼器 $C_5 = 2471$ N·s/m 时，过一阶临界转速时最大振动能量下降了 4 个数量级。然后对过二阶临界转速优化，进行了 25 次迭代，主要数据如表 8 - 9 所示。优化过程均在前阻尼器上进行，振动能量在 $C_2 = 5716$ N·s/m 时又下降了 1 个数量级，为 0.00097。

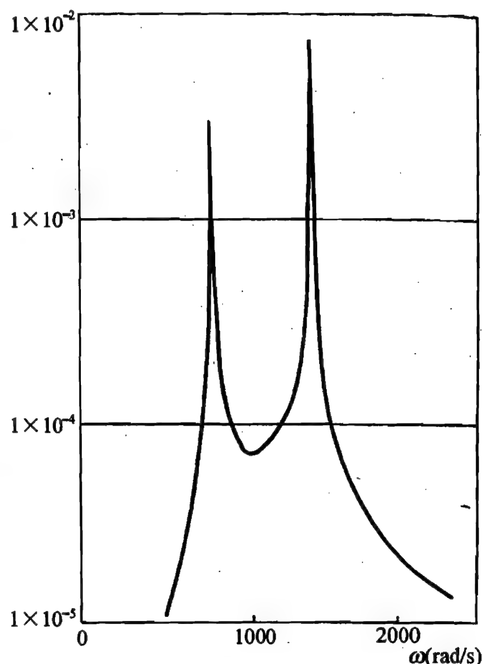


图 8 - 13　轻微阻尼时的不平衡响应

表 8 - 8　过一阶临界转速的阻尼优化

No.	S_2	C_2	S_5	C_5	T
1	3.37E - 3	10	4.9796E - 3	10	8.5476
2	2.8864E - 5	10	4.2473E - 5	269.8	0.06007
3	2.8134E - 6	10	4.1095E - 6	893.1	0.00589
4	1.0515E - 6	10	1.5179E - 6	1473.8	0.002204
5	5.7855E - 7	10	8.1957E - 7	1999.3	0.00122
6		10		2471.4	0.000817

表 8 - 9　过二阶临界转速的阻尼优化

No.	$S_2 \times 10^{-7}$	C_2	$S_5 \times 10^{-7}$	C_5	T
1	6.0917	10	2.3176	2471.4	0.009296
2	6.077	15	2.312	2471.4	0.009246
3	6.0547	22.6	2.3036	2471.4	0.00921
4	6.0212	33.8	2.291	2471.4	0.00916
5	5.971	50.8	2.2722	2471.4	0.00908
6	5.895	75.96	2.244	2471.4	0.00896
7	5.7816	113.4	2.2027	2471.4	0.008786
8	5.6125	168.6	2.142	2471.4	0.008525
9	5.3643	249.3	2.0548	2471.4	0.008143
10	5.01	365.3	1.9337	2471.4	0.007602
11	4.53	528.3	1.774	2471.4	0.006875
12	3.93	750	1.58	2471.4	0.005976
13	3.26	1037.9	1.367	2471.4	0.004985
14	2.603	1391.5	1.16	2471.4	0.004025

续表 8 - 9

No.	$S_2\times10^{-7}$	C_2	$S_5\times10^{-7}$	C_5	T
15	2.034	1800.4	0.9789	2471.4	0.003203
16	1.584	2247	0.8347	2471.4	0.00256
17	1.247	2712	0.7256	2471.4	0.002085
18	1.0018	3181	0.645	2471.4	0.00174
19	0.807	3640	0.5715	2471.4	0.0015
20	0.6737	4068	0.5158	2471.4	0.00133
21	0.5777	4462	0.4725	2471.4	0.00112
22	0.511	4822	0.4376	2471.4	0.00106
23	0.4594	5150.8	0.4087	2471.4	0.001008
24	0.419	5448.7	0.383	2471.4	0.000998
25		5716		2471.4	0.00097

表 8 - 10 为采用振幅作为灵敏度，并作多阻尼器协调优化处理的优化迭代过程。其中第 1 ~ 6 次是针对一阶临界转速，第 7 次以后是针对二阶临界转速。

图 8 - 14 表示两种阻尼优化迭代过程的对比。尽管优化迭代过程有不同，基本结果是一致的。

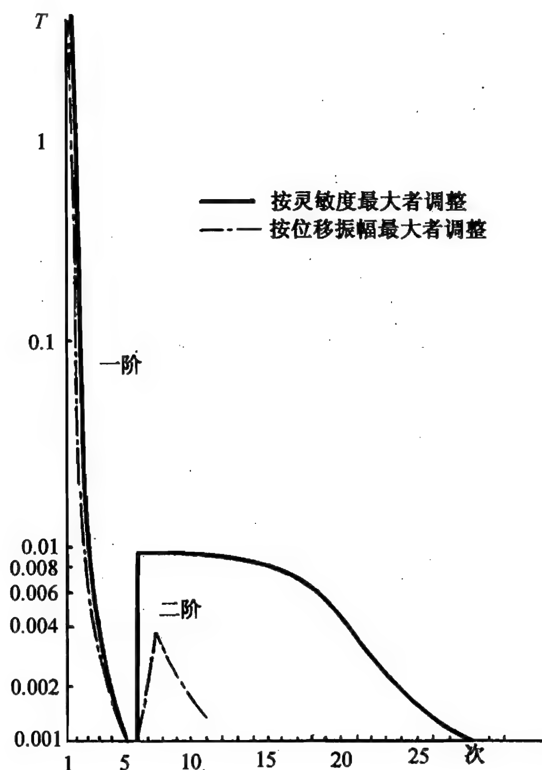


图 8 - 14　优化迭代过程

表 8－10 以位移振幅为灵敏度的优化过程

No.	$e_2\times10^{-5}$	C_2	$e_5\times10^{-5}$	C_5	T
1	258.4	10	288.7	10	8.547
2	14.01	242.98	15.63	269.83	0.025
3	5.87	557.8	6.53	667.9	0.0044
4	3.857	829.3	4.277	1026.8	0.00192
5	2.95	1066	3.26	1362	0.00129
6	2.447	1275	2.67	1669	0.00078
7	3.987	1859	2.46	2039	0.00369
8	3.125	2412.7	2.09	2338	0.00248
9	2.598	2924	1.875	2594	0.00188
10	2.278	3390	1.724	2822	0.00153

实际上，由于受到结构因素的限制，不一定能完全按照优化设计的最终结果来设计转子－支承系统，而是按照某种协调的结果。某型机的自由涡轮动力输出转子系统的实际弹性支承及挤压油膜阻尼器的有关数据为：

$K_2 = 1793683 \sim 3216299\text{N/m}$;

$K_5 = 4179343 \sim 4322160\text{N/m}$;

$C_2 = 950\ \text{N}\cdot\text{s/m}$;

$C_5 = 2100\ \text{N}\cdot\text{s/m}$。

优化结果的刚度值 $K_2 = 2503000\text{N/m}$，$K_5 = 4304000\text{N/m}$。在实际弹性支承的刚度范围内，说明了该转子是经过调整临界转速优化设计的。

阻尼器的阻尼系数相当于表 8－9 中的 No.12 与 No.13 之间，或相当于表 8－10 中的 No.4 与 No.7 之间。

图 8－15 ～ 图 8－18 为按某型机实际参数计算的弹性轴、双级涡轮最大振幅及前、后阻尼器最大位移振幅随转速的变化。图 8－19 为各轴承外传力随转速变化曲线。

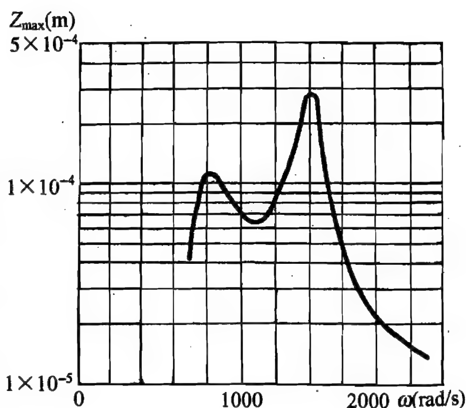


图 8－15 弹性轴最大振幅

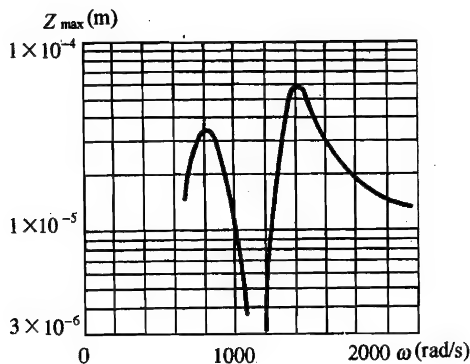


图 8－16 双级涡轮最大振幅

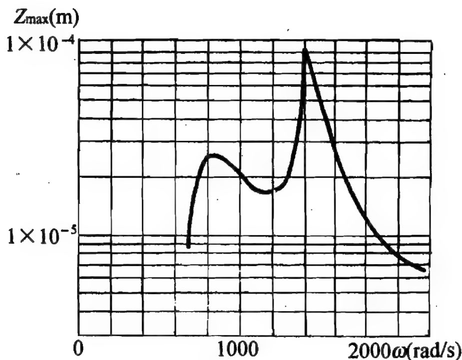


图 8－17 前阻尼器位移振幅

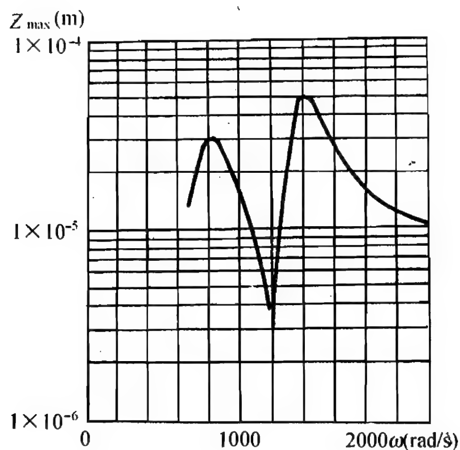


图 8 - 18　后阻尼器位移振幅

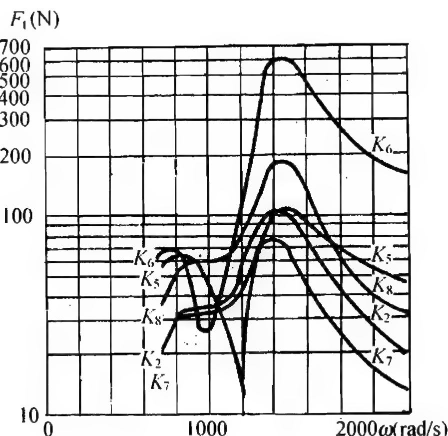


图 8 - 19　各轴承外传力

参 考 文 献

] Lund J W. Sensitivity of Critical Speeds of a Rotor to Changes in the Design. Transactions of ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 102, Jan. 1980.

]Lu W and Maday C J. The Optimum Design of Shafts with First Two Critical Speeds Specified, ASME Paper No. 85 - DET - 62

] Spencer J W. Correction of Compressor Critical Speed Condition Through Fluid - Film Bearing Optimization, ASME Paper No. 85 - DET - 115

] Nelson H D, Rajan M and Chen W J. Parameter Sensitivity in the Dynamics of Rotor - Bearing Systems. Transactions of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 108, April 1986.

] 高健民,朱晓梅.转子系统不平衡响应的灵敏度分析.全国第二届转子动力学学术讨论会论文集,1989,23 ~ 28

] 黄太平.支承刚度对转子临界转速的灵敏度分析与优化设计.全国第二届转子动力学学术讨论会论文集,1989,16 ~ 22

] 罗贵火,黄太平.多转子多支承系统的动力优化设计.中国航空学会第二届动力年会,CSAAP - 89 - 090(S)

] 苗兰森,黄太平.复杂转子系统不平衡响应计算的伪模态综合法．振动工程学报,1990,3(4):89 ~ 94

]黄太平,罗贵火.转子动力学优化设计.航空动力学报,1994,9(2):113 ~ 116

)] Huang Taiping. The Transfer Matrix Impedance Coupling Method with Its Application. ASME Paper No. 85 - DET - 139

l] Huang Taiping and Lund J W. The Transfer Matrix Component Mode Synthesis for Eigensolution of Rotor Systems. Journal of Nanjing Aeronautical Institute, Vol.5, No. 1, Oct. 1988.

2] 黄太平.多转子系统振动的子系统分析方法 —— 阻抗耦合法与分振型综合法.振动工程学报,Vol.1, No.3, 1988, 1(3):30 ~ 40

3] Huang Taiping. The Transfer Matrix Impedance Coupling Method for the Eigensolutions of Multi - Spool Rotor Systems. Trans. of ASME, Journal of Vibr., Acous., Stress and Reliability in Design, Vol.110, No.4, Oct. 1988.

4] Nelson D H and Glasgow D A. Stability Analysis of Rotor - Bearing System Using Component Mode Synthesis. ASME Paper No. 79 - DET - 63

第9章 管路振动

9.1 概 述

9.1.1 管路振动的分类

航空发动机管路，主要用于燃油、滑油和空气等介质的输送，是发动机附件系统的重要成部分。

发动机管路的振动，依照其激励的性质，可以分为强迫振动和自激振动两种类型。管路强迫振动，是指管路在外界或内部的周期性(或随机性)机械载荷、流体载荷作用下产生的动。管路的自激振动，是指管路内部介质运动与管路运动相耦合形成振荡激励所产生的振动通常称之为管路的流动失稳。

发动机管路的振动，依照其系统构成形式，也可分为单管振动和管系振动两种类型。单振动指的是由一个导管或几根串联的导管构成的独立系统的振动，其振动模态相对简单；管振动则指两个以上的导管经三通管接嘴或卡箍相互连接在一起而构成的复杂系统的振动，振动模态相对要复杂一些。

9.1.2 管路振动的激励因素

(1)转子不平衡力

由于发动机转子不可避免地存在不同程度的不平衡，当转子高速旋转时，会产生周期性不平衡力。转子不平衡力的大小取决于转子不平衡量的大小和转子转速的高低。

转子不平衡力的激励频率：

$$f_e = n/60 \quad (9-$$

式中：n——发动机转子转速，r/min。

当发动机为双转子或三转子结构时，管路将同时受到两个或三个不同频率的转子不平力的激励，每个转子不平衡力的频率由各自的转速确定。

(2)流体脉动压力

输送流体(燃油、滑油)的管路，由于供油泵(齿轮泵、柱塞泵等)的作用，会使管内流体的力产生周期性变化。这种流体的压力脉动在管路的弯曲处和变管径处，将产生作用在管路的周期性激振力，流体脉动压力的激振频率为

$$f = kn/60 \quad (9-$$

式中：k——泵的齿数或柱塞数；

n——泵的转速，r/min。

(3)卡门涡街

处于发动机内流通道中的管路，通常会受到卡门涡街的作用而产生振动，如图9-1所示管路放置在一个均匀流场中，当流体通过管路这一圆柱形障碍物时，在管路后面的尾流将不

是均匀的，而呈现出离散的涡状流动，即卡门涡街。旋涡交替地为顺时针方向和反时针方向并伴随一个交变地作用在管路上的横向激振力(卡门力)，当卡门涡街的脱落频率等于管路的固有频率时，将引起管路的共振。

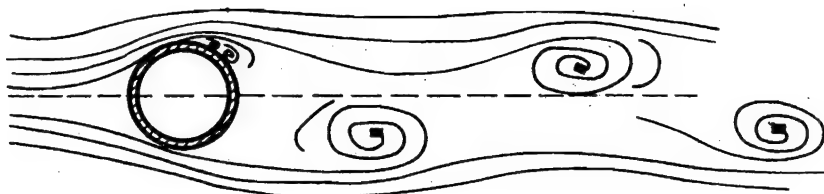


图9-1 卡门涡街

卡门涡街的脱落频率由下式确定：

$$f_s = V/SD \tag{9-3}$$

式中：V——自由流速度，m/s；

D——管路直径，m；

S——STROUHAL(司脱罗哈)数。

对于低马赫数(亚声速)的流动状态，STROUHAL数与结构的几何形状和雷诺数 Re 有关，对于单个圆柱体而言，$Re < 10^5$ 时，S 可取为0.2(参考文献[1])。

(4)振荡燃烧

燃烧室、加力燃烧室在富油和贫油时，会出现振荡燃烧，产生轴向、横向的振荡，其频率可达几百赫兹，当燃烧的振荡频率等于外部管路的固有频率时，将引起管路的共振。

(5)流动失稳

由于流体速度的耦合作用，输送流体管路的固有频率将随着流动速度的增加而减小。当流速增大到一定程度时，管路的固有频率为零，系统出现发散失稳。

9.1.3 管路的共振

发动机工作时，管路会遇到各种类型的周期性激励，当这些激励的频率与管路的某一阶固有频率相等时，会引起管路的共振。当管路系统的阻尼较小时，管路的共振会使管路产生较大的振动应力，导致管路疲劳破坏。

管路共振的条件可用下式来描述：

$$f_e = f_n \tag{9-4}$$

式中：f_n——管路第 n 阶固有频率；

f_e——周期性激励的频率。

一般说来，在管路设计时，应尽量避免管路在发动机工作转速范围内出现共振。

9.1.4 管路固有频率的试验测定

在实际工程应用中，发动机管路的形状很少是平直的，其轴线多为空间曲线。管路连接和固定亦很难用材料力学中的简支或固支来描述，因此用工程实测的办法来确定管路的固有频率，在目前仍具有重要意义。

工程上常用的测试系统的框图如图9-2所示。

通过施加的外部激励(如力锤敲击、正弦激振器、发动机工作时转子的不平衡力等)使管路产生振动,利用拾振传感器获取管路振动响应,经调节器放大后记录并做频谱分析,即可得到实际安装工况下管路的固有频率。

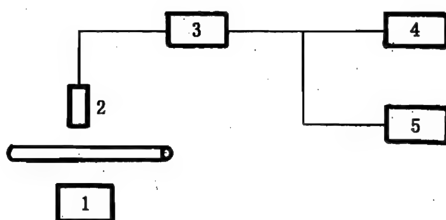


图9-2　管路测频系统
1—外加激励;2—拾振传感器;3—信号调节器;
4—磁带记录仪;5—频谱分析仪

9.2　管路连接及固定端的力学模型

发动机管路的连接与固定,主要依靠管接头和卡箍来实现。管接头用于管路与管路之间和管路与附件之间的连接与固定。卡箍则用于管路与管路之间及管路与机匣之间的相对固定。

9.2.1　管接头和卡箍的结构形式

(1)管接头的结构形式

发动机管路的管接头由于安装维护的需要,均为可拆卸式管接头,其中又分为可拆卸式活动管接头和可拆卸式固定管接头两大类型。

可拆卸式活动管接头工作时,接触面可相互移动而不损坏密封性,且允许导管沿轴向或角向产生移动,以此来补偿管路安装以及管路受热膨胀时导管连接处产生的轴向偏差或角偏差。典型的可拆卸式活动管接头结构见图9-3和图9-4。

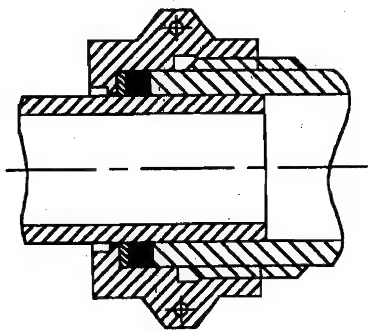


图9-3　轴向活动管接头

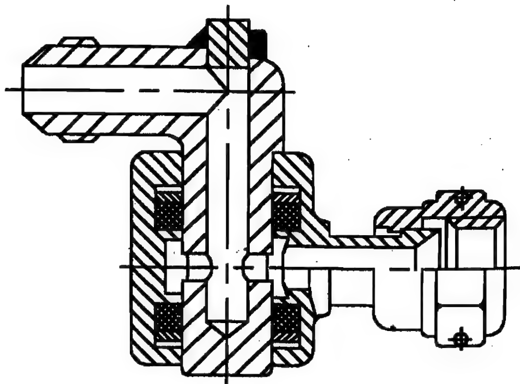
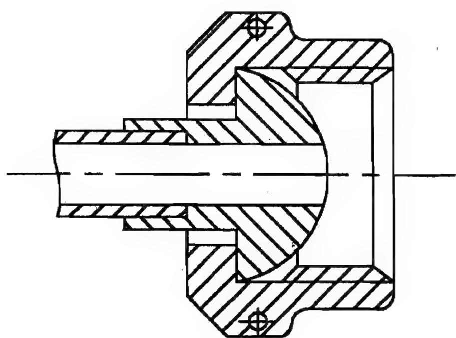
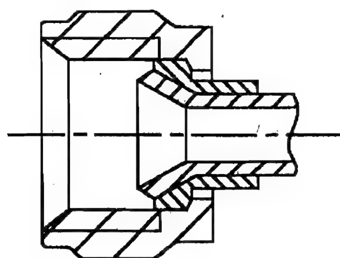


图9-4　角向活动管接头

可拆卸式固定管接头工作时,接触面没有相对位移,故不能对制造偏差和导管的温度变化进行补偿。对前者的补偿主要是通过校正导管管体来实现;对后者的补偿则是通过导管管体的弯曲部分来完成。典型的可拆卸式固定管接头结构见图9-5至图9-7。


图9-5 球形管接头

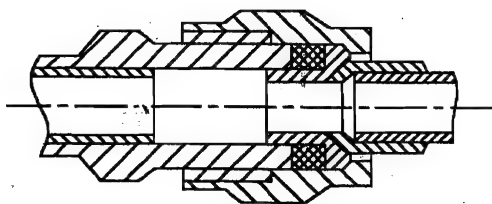

图9-6 锥形管接头

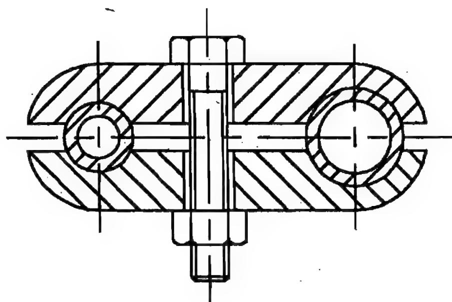
(2)卡箍的结构形式

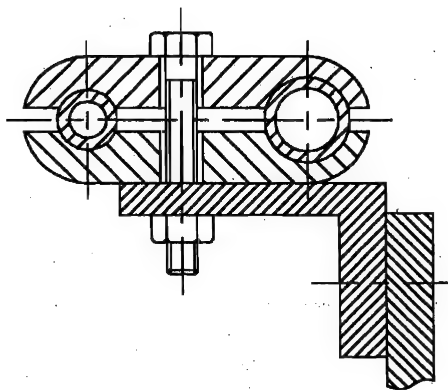
发动机管路固定用的卡箍分为悬空卡箍和接地卡箍两大类。悬空卡箍用于管路与管路之间的相对固定;接地卡箍用于管路与机匣之间的相对固定。

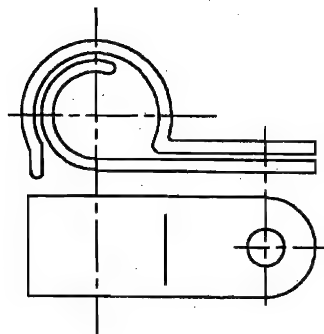
悬空卡箍的典型结构见图9-8。

接地卡箍的典型结构见图9-9和图9-10。


图9-7 平形管接头


图9-8 悬空卡箍


图9-9 刚性接地卡箍


图9-10 柔性接地卡箍

9.2.2 管接头和卡箍的力学模型

9.2.2.1 理想二维情况下管接头的力学模型

(1)基本假设

a. 管路为直管或可视为直管处理;

b. 附件自身(含附件上的接管嘴)为刚体;

c. 不计管接头接触面的摩擦阻尼。

(2)轴向活动式管接头

对于轴向活动式管接头,其力学模型可用弹性力学中的滑动固支来描述(见图9-11)。

管接头处位移为:

横向位移 $U_y=0$;

轴向位移 $U_x\neq0$;

角向位移 $U_{xy}=0$。

管接头处的反力为:

横向力 $F_y\neq0$;

轴向力 $F_x=0$;

角向弯矩 $M_{xy}\neq0$。

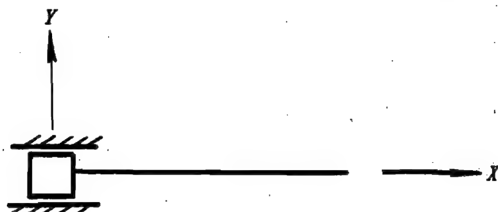


图9-11 轴向活动式管接头力学模型

(3)角向活动式管接头

对于角向活动式管接头,其力学模型可用弹性力学中的铰支来描述(见图9-12)。

管接头处位移为:

横向位移 $U_y=0$

轴向位移 $U_x=0$;

角向位移 $U_{xy}\neq0$。

管接头处的反力为:

横向力 $F_y\neq0$;

轴向力 $F_x\neq0$;

角向弯矩 $M_{xy}=0$。

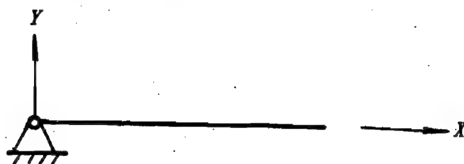


图9-12 角向活动式管接头力学模型

(4)固定式管接头

对于固定式管接头,其力学模型可用弹性力学中的固支来描述(见图9-13)。

管接头处位移为:

横向位移 $U_y=0$;

轴向位移 $U_x=0$;

角向位移 $U_{xy}=0$。

管接头处的反力为:

横向力 $F_y\neq0$;

轴向力 $F_x\neq0$;

角向弯矩 $M_{xy}\neq0$。

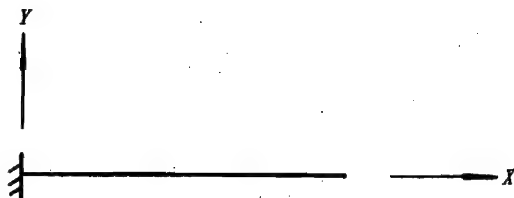


图9-13 固定式管接头及理想接地卡箍的力学模型

9.2.2.2 实际三维情况下管接头的力学模型

在工程应用中,附件的支承刚性和管接头自身刚性通常都不是理想刚性的,故在分析管路振动时,应把附件(含附件支承)和管接头作为一个整体支承系统来加以考虑。管接头支承系

流由等效质量 M_e(通常可简化为集中质量)和六个刚度 K_x、K_y、K_z、K_{xy}、K_{xz}、K_{yz} 组成(见图 9 - 14)。

(1)轴向活动式管接头

由于允许导管在一定范围内产生轴向位移,故在其作用范围内,其力学模型可用以下参数来描述:

$M_e \neq 0$;

$K_x = 0$;

$K_y \neq 0$;

$K_z \neq 0$;

$K_{xy} \neq 0$;

$K_{yz} = 0$;

$K_{xz} \neq 0$。

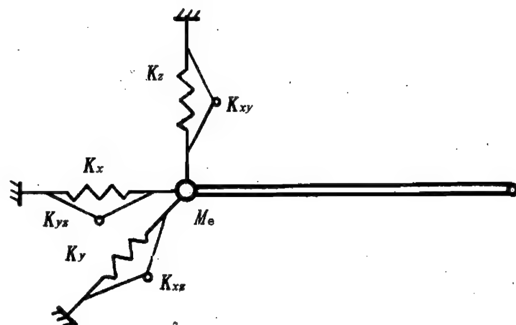


图 9 - 14　实际三维情况下管接头及刚性接地卡箍的力学模型

(2)角向活动式管接头

由于允许导管在某一方向存在角向位移(如 U_{xz}),故其力学模型可表征为:

$M_e \neq 0$;

$K_x \neq 0$;

$K_y \neq 0$;

$K_z \neq 0$;

$K_{xy} \neq 0$;

$K_{yz} \neq 0$;

$K_{xz} = 0$。

(3)固定式管接头

固定式管接头在导管六个自由度上均产生约束,故其力学模型可表征为:

$M_e \neq 0$;

$K_x \neq 0$;

$K_y \neq 0$;

$K_z \neq 0$;

$K_{xy} \neq 0$;

$K_{xz} \neq 0$;

$K_{yz} \neq 0$。

应指出:当上述类型管接头不是用于将导管与附件上的接管嘴连接,而是用于导管与导管的连接时,可把管接头(含三通、两通)作为导管系统加以分析,只不过在管接头处质量和刚度与管身不同。

9.2.2.3　理想二维情况下卡箍的力学模型

对接地卡箍而言,当卡箍的固持刚性远大于导管自身的刚性时,可视其为理想刚性的,导管的振动表现为各段(两支承之间部分)管身的局部振动,段与段之间的振动各自独立。

卡箍的力学模型可用弹性力学中的固支来描述(见图 9 - 13)。

在卡箍处有：

横向位移 $U_y=0$;

轴向位移 $U_x=0$;

角向位移 $U_{xy}=0$;

横向力 $F_y\neq0$;

轴向力 $F_x\neq0$;

角向弯矩 $M_{xy}\neq0$。

对于柔性支承接地卡箍和悬空卡箍而言，由于其固持刚性相对较弱，通常不做为理想刚性情况来处理。

9.2.2.4 实际三维情况下卡箍的力学模型

(1)接地卡箍

a. 刚性接地卡箍

刚性接地卡箍的固持刚性取决于卡箍体和卡箍与机匣支承段自身的刚性，在振动分析时，可把卡箍体及支承部分作为一个整体来考虑，卡箍支承系统的力学模型由等效质量 M_e 和六个刚度参数(K_x、K_y、K_z、K_{xy}、K_{xz}、K_{yz})来描述(见图 9-14)，且有：

$M_e\neq0$;

$K_x\neq0$;

$K_y\neq0$;

$K_z\neq0$;

$K_{xy}\neq0$;

$K_{xz}\neq0$;

$K_{yz}\neq0$。

b. 柔性接地卡箍

对于柔性接地卡箍，为简化分析，可近似地用无质量弹性支承来描述，六个刚度参数只保留 K_y 和 K_z，其余四个均可近似地取为零。在计算管路的振动响应时，应考虑两弹簧片之间和导管与弹簧片之间的摩擦阻尼的影响。

(2)悬空卡箍

悬空卡箍的固持刚性不仅取决于卡箍体的刚性、螺栓拧紧力矩，还取决于相邻导管在卡箍附近的管体的刚性。其力学模型在管路与卡箍接触面无相对位移时(即静摩擦范围内)，可用等效质量 M_e、线刚度 K_x、K_y、K_z 和角刚度 K_{xy}、K_{xz}、K_{yz}(均不为零)来描述。

9.2.3 管接头和卡箍固持刚度的试验测定

如图 9-15 所示，分别沿管路的轴向 x，横向 y 和 z，在管接头、卡箍与管路接触面的中心点上施加一集中力或力矩(F_x、F_y、F_z、M_{xy}、M_{xz}、M_{yz})，同时分别测量中心点在 x、y、z 三个方向的线位移 δ_x、δ_y、δ_z 和角位移 δ_{xy}、δ_{xz}、δ_{yz}。为消除初始位移的影响，最好采用测量相对力及其产生的相对位移的方法，利用公式：

$$
\begin{aligned}
K_x&=(F_{1x}-F_{2x})/(\delta_{1x}-\delta_{2x})\\
K_y&=(F_{1y}-F_{2y})/(\delta_{1y}-\delta_{2y})\\
K_z&=(F_{1z}-F_{2z})/(\delta_{1z}-\delta_{2z})
\end{aligned}
\tag{9-5}
$$

$$K_{xy}=(M_{1xy}-M_{2xy})/(\delta_{1xy}-\delta_{2xy})$$
$$K_{yz}=(M_{1yz}-M_{2yz})/(\delta_{1yz}-\delta_{2yz})$$
$$K_{xy}=(M_{1xz}-M_{2xz})/(\delta_{1xz}-\delta_{2xz})$$

式中下标1,2分别代表第1次测量和第2次测量。在实测中,卡箍与管路接触面中心点往往不便施加集中力(矩),这时可选取与中心点最为临近且便于施加力(矩)的点进行实测。

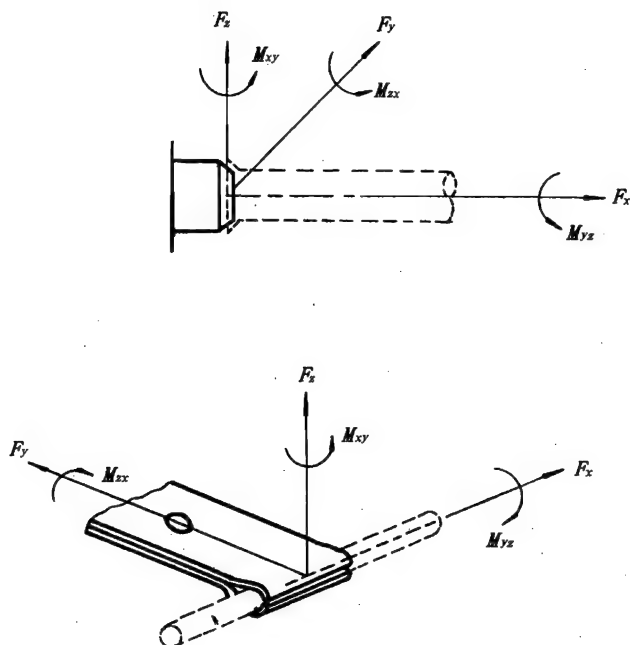


图9-15 管接头和卡箍固持刚度的试验确定

9.3 管路系统机械振动的计算方法

9.3.1 单跨管路的固有频率

9.3.1.1 等截面直管

与具有不同支承方式的等截面直梁分析相同,其方法可参阅一般的振动理论书籍,只是应注意管路的质量分布密度应取考虑液体质量的等效密度 ρ_e,即

$$\rho_e=\frac{\rho_s A_s+\rho_f A_f}{A_s+A_f} \tag{9-6}$$

式中下标s代表结构参数;下标f代表液体参数;ρ 代表质量密度;A 代表面积。

表9-1和表9-2分别给出等截面直管横向振动的频率方程、主振型和频率方程的根。表中 l 为跨距(管长)。

$$\beta^4=\omega^2\frac{\rho A}{EI} \tag{9-7}$$

式中：E——材料弹性模量；

I——管路(结构)截面惯性矩。

表9-1　等截面梁横向振动频率方程与主振型

简化模型	频率方程与主振形函数	振　型
$Y(0)=Y'(0)=0$ $Y(l)=Y'(l)=0$	(1)$\cos\beta l\,\mathrm{ch}\beta l=1$ (2)$Y_i(x)=C_i[\cos\beta_i x-\mathrm{ch}\beta_i x+r_i(\sin\beta_i x-\mathrm{sh}\beta_i x)]$ $r_i=-\dfrac{\cos\beta_i l-\mathrm{ch}\beta_i l}{\sin\beta_i l-\mathrm{sh}\beta_i l}=\dfrac{\sin\beta_i l+\mathrm{sh}\beta_i l}{\cos\beta_i l-\mathrm{ch}\beta_i l}$	
	(1)$\cos\beta l\,\mathrm{ch}\beta l=1$ (2)$Y_i(x)=C_i[\cos\beta_i x+\mathrm{ch}\beta_i x+r_i(\sin\beta_i x+\mathrm{sh}\beta_i x)]$	
$Y(0)=Y'(0)=0$ $Y(l)=Y''(l)=0$	(1)$\mathrm{tg}\beta l=\mathrm{th}\beta l$ (2)$Y_i(x)=C_i[\cos\beta_i x-\mathrm{ch}\beta_i x+r_i(\sin\beta_i x-\mathrm{sh}\beta_i x)]$ $r_i=-\dfrac{\cos\beta_i l-\mathrm{ch}\beta_i l}{\sin\beta_i l-\mathrm{sh}\beta_i l}=\dfrac{\sin\beta_i l+\mathrm{sh}\beta_i l}{\cos\beta_i l-\mathrm{ch}\beta_i l}$	
$Y(0)=Y''(0)=0$ $Y''(l)=Y'''(l)=0$	(1)$\mathrm{tg}\beta l=\mathrm{th}\beta l$ (2)$Y_i(x)=C_i(\mathrm{sh}\beta_i x+r_i\sin\beta_i x)$ $r_i=\dfrac{\mathrm{sh}\beta_i l}{\sin\beta_i l}=\dfrac{\mathrm{ch}\beta_i l}{\cos\beta_i l}$	
$Y(0)=Y''(0)=0$ $Y(l)=Y''(l)=0$	(1)$\sin\beta l=0$ (2)$Y_i(x)=C_i\sin\beta_i x$	
$Y(0)=Y'(0)=0$ $Y(l)=Y'''(l)=0$	(1)$\cos\beta l\,\mathrm{ch}\beta l=-1$ (2)$Y_i(x)=C_i[\cos\beta_i x-\mathrm{ch}\beta_i x+r_i(\sin\beta_i x-\mathrm{sh}\beta_i x)]$ $r_i=-\dfrac{\cos\beta_i l-\mathrm{ch}\beta_i l}{\sin\beta_i l+\mathrm{sh}\beta_i l}=\dfrac{\sin\beta_i l-\mathrm{sh}\beta_i l}{\cos\beta_i l+\mathrm{ch}\beta_i l}$	

表 9－2　等截面梁频率方程的根 βl

边界条件	$\beta_1 l$	$\beta_2 l$	$\beta_3 l$	$\beta_4 l$	$\beta_i l$
	4.730041	7.853205	10.995608	14.137166	$\approx(i+\frac{1}{2})\pi, i\geq 2$
	4.730041	7.853205	10.995608	14.137166	$\approx(i+\frac{1}{2})\pi, i\geq 2$
	3.926602	7.068583	10.210176	13.351768	$\approx(i+\frac{1}{4})\pi, i\geq 1$
	3.926602	7.068583	10.210176	13.351768	$\approx(i+\frac{1}{4})\pi, i\geq 1$
	3.141593	6.283185	9.424778	12.566370	$\approx i\pi$
	1.875104	4.694091	7.854757	10.995541	$\approx(i-\frac{1}{2})\pi, i\geq 3$

9.3.1.2　带有管路元件的直管

管路中的阀门、法兰、接头以及具有与管径尺寸相同数量级的其他元件可按集中质量处理。这时可采用等效系统法计算管路的一阶固有频率。

等效系统法：

设带有集中质量 M 的匀质直管为系统 a，如图 9－16(a)；与其对应的不带集中质量的匀质直管为系统 b，如图 9－16(b)；与系统 b 等频率(一阶)的无重直管，在与系统 a 对应的位置有一集中质量的系统为系统 c，如图 9－16(c)。

系统 b 的一阶固有频率根据式(9－7)及表 9－2 可得

$$\omega_b = \pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = \pi^2\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \qquad (9-8a)$$

式中，$m=\rho AL$ 为管的质量。

系统 c 的一阶固有频率为

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K}{m_e}} = \sqrt{\frac{48EI}{m_e L^3}} = \sqrt{48}\sqrt{\frac{EI}{m_e L^3}} \qquad (9-8b)$$





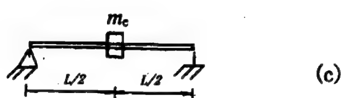


图 9－16　等效系统法示意图

式中，$K=\dfrac{48EI}{L^3}$为直管在集中质量处的刚度。

现设 $m_e=\alpha\cdot m$，由于系统 b 和系统 c 的一阶固有频率相等，即 $\omega_b=\omega_c$。不难得出 $m_e=0.4928m$，即 $\alpha=0.4928$。

m_e 称为系统 b 的等效质量；α 为等效质量系数；系统 c 为系统 b 的等效系统。

在系统 b 的等效系统 c 的集中质量处再加上质量 M 得到的系统为与系统 a 等效的系统，其频率

$$\omega_a=\sqrt{\frac{48EI}{(m_e+M)L^3}}=\sqrt{\frac{48EI}{(0.4928m+M)L^3}}$$

式中，m 为直管的质量；M 为集中质量。

一般地，若

$$\omega_c=\eta\sqrt{\frac{EI}{m_eL^3}}=\eta\sqrt{\frac{EI}{\alpha mL^3}}$$ (9 – 9a

则

$$\omega_a=\eta\sqrt{\frac{EI}{(m_e+M)L^3}}=\eta\sqrt{\frac{EI}{(\alpha m+M)L^3}}$$ (9 – 9b

在式(9 – 9a)和式(9 – 9b)中，η 称为频率系数，它与质量沿管路的分布有关。

表 9 – 3 中给出几种常用的频率系数供查阅。为了求得式(9 – 9b)中的 α 可再设

$$\omega_b=\eta_b\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$ (9 – 9c

并令对应于系统 c 的频率系数 $\eta=\eta_c$。由于 $\omega_b=\omega_c$，可得

$$\alpha=(\eta_c/\eta_b)^2$$ (9 – 10

η_b 也可从表 9 – 3 中查得。

表 9 – 3　单跨管路固有频率的频率系数表

支承情况	质量分布情况	频率系数	
		一阶	二阶
一端固定一端自由		1.732	
		3.512	22.029
二端简支		6.928	
		9.871	39.458

续表 9-3

支承情况	质量分布情况	频率系数	
		一阶	二阶
二端固定		13.856	
		22.374	61.669
一端固定一端简支		10.474	
		15.419	49.970

例如,一端固定一端简支的匀质直管,跨中有集中质量 M,查表 9-3 可得

$$\eta_b = 15.419 \qquad \eta_c = 10.474$$

则

$$\alpha = (\eta_c/\eta_b)^2 = 0.4614$$

管路的一阶固有频率为

$$\omega = 10.474[EI/(0.4614m + M)L^3]^{\frac{1}{2}}$$

式中 m 为直管本身的质量。

注意,在式(9-9a)、(9-9b)、(9-9c)中的频率皆为圆频率。

9.3.1.3 成任意角的弯管

图 9-17 所示的弯管,如果组成两臂的管路直径相同,并为均布质量时,其固有频率可按下面的方法进行估算。

对圆截面弯管有:

$$\frac{EI}{GJ} = 1 + \nu$$

式中,ν——材料的泊松比。

发动机导管常用材料的 ν 一般为 0.3,因此

$$\frac{EI}{GJ} \approx 1.3$$

式中,EI 为管路的抗弯刚度;GJ 为管路的抗剪切刚度。

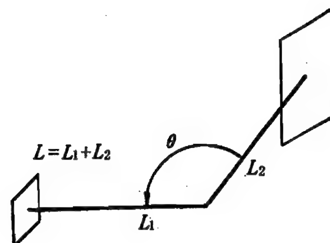


图 9-17 成 θ 角的平面弯管

假定采用$\frac{EI}{GJ} \approx 1.0$,图 9-17 所示弯管的一阶固有频率具有如下形式的表达式:

$$f=\eta\sqrt{\frac{EI}{ML^2}}$$

式中：$L=L_1+L_2$ 为弯管总长；

M——弯管总质量；

η——频率系数，与比值 L_1/L_2 和夹角 θ 有关：

$\theta=\pi(L_1=L, L_2=0)$，这种情况下的弯管成为两端固定梁，$\eta=3.561$；

$\theta=0(L_1=L_2=L/2)$，这时弯管实际上成为两个平行的悬臂梁，$\eta=2.236$；

$\theta=\pi/2$，这时仍可采用等效系统法进行估算。

设无重直角弯管在其直角顶点处有一集中质量 M 的系统为 a，如图 9-18(a)，匀质直角弯管系统为 b，如图 9-18(b)，则系统 a 的一阶固有频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{384}{5}}\sqrt{\frac{EI}{ML^3}}$$

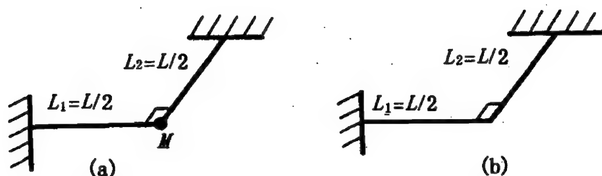


图 9-18 直角弯管

已经知道，具有均布质量的悬臂梁的等效集中质量（位于轴端）约等于总质量的 1/4；两端固定的均质梁，在梁的中点上的等效集中质量约等于总质量的 3/8。显然对于 $\theta=\pi/2$ 的等臂弯管，其等效集中质量 M_e 若取 1/4 和 3/8 之间，即取 5/16，所得结果不会引起太大误差。因此欲使系统 a 与系统 b 等效，系统 a 的集中质量 M 应满足

$$M=M_e=\frac{5}{16}m$$

式中 m 为均质弯管的总质量。

因而系统 b 的一阶固有频率的计算式为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{384}{5}}\sqrt{\frac{EI}{\frac{5}{16}mL^3}}=2.495\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

即 $\eta=2.495$。

综上所述，对等臂长的弯管其 η 值见表 9-4。

表 9-4 等臂长弯管中的 θ 与 η 的对应值

θ	0	$\pi/2$	π
η	2.236	2.495	3.561

若画出通过表 9-4 中所列三点的 η 和 θ 的关系曲线，其形状将如图 9-19 最下面一条曲线所示。

当 $L_2=0$、$L_1=L$ 时，弯管成为两端固定的直梁，对所有 θ 值，$\eta=3.561$，其对应的曲线是一根 $\eta=3.561$ 的水平直线，如图 9-19 最上面的水平实线所示。

对于所有其他长度比的 η—θ 曲线必定位于上述两种极端情况之间。对于任何给定的长度比,采用插值方法就可以得到 η 值。这种方法虽然不是很精确,但可以满足简单工程估算的要求。

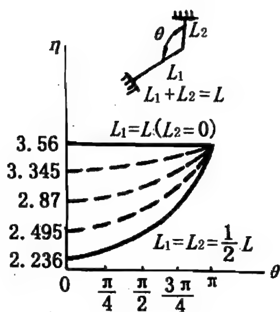


图9-19 两端固定的弯管不同臂长比的固有频率近似计算图

9.3.2 管路系统

航空发动机外部导管除个别单独与机匣或附件相连自成体系外,大多数彼此相连(直接或通过卡箍),形成复杂的管路系统。在这种情况下很难用解析方法求得精确解。与求解其他结构动力问题一样,有限元法也为解决管路系统的振动分析提供了强有力的计算工具。从对工程的需求来说,其结果是令人满意的。

有限元法的基本原理及计算流程在许多相关的书籍中已有详细的介绍,这里仅给出与管路系统结构形式相关的单元形式,以便于应用大型通用有限元动力分析程序。

9.3.2.1 直管和弯管

直管段可直接按梁单元处理,只是需注意梁单元的质量分布密度应采用考虑液体质量的等效密度式(9-6)。

弯管段可直接按曲梁单元处理,如果所用通用程序中没有曲梁单元,也可用数个直梁单元来代换一个曲梁单元。如图9-20所示的90°弯管用了两段直管来代换。为使代换在弹性与惯性上比较接近,可使这两段直管的长度之和等于弯管的总长。计算结果表明,这样处理有较好的精度。

9.3.2.2 法兰与接头

法兰、接头及其他具有与管径相同数量级的管系元件在整个系统振动中的主要作用是惯性,而对系统的弹性影响则很小。所以它们的力学模型是附加的集中质量。具体做法是,把法兰或接头处选为结点,而代表其作用的集中质量就加在该结点上。由于管系振动时一般角位移比较小,所以可只考虑由法兰、接头等引起的移动惯性而略去其转动惯性。

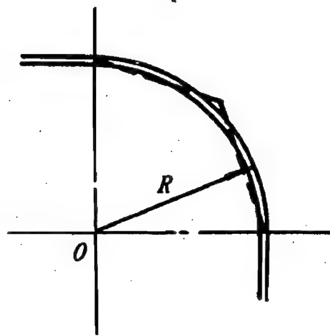


图9-20 用两根直管代换的弯管

9.3.2.3 托架与卡箍

发动机导管的托架与卡箍分刚性与柔性两种。刚性托架是指托架(或卡箍)的刚度远大于导管的刚度(10倍以上)。在计算模型中可按刚性支承处理。柔性托架或卡箍以及并行导管之间的联系可用梁单元来代替。梁单元的抗弯刚度根据托架、卡箍的实际情况确定(参阅9.2)。

当采用衬垫时,应计及衬垫的刚度。带衬垫的托架、卡箍对管系的刚度贡献用附加在支承点处的集中刚度来代替。为此必须计算托架与衬垫材料的串联刚度系数(三个线刚度系数和三个角刚度系数)。

(1)托架的刚度系数(设管轴线方向为 x 轴)

$$K_{1x}=\frac{3EI_Y}{h^3}\qquad K_{1y}=\frac{3EI_x}{h^3}\qquad K_{1z}=\frac{EA}{h}$$

$$K_{1\theta_x}=\frac{EI_x}{h}\qquad K_{1\theta_y}=\frac{EI_y}{h}\qquad K_{1\theta_z}=\frac{GJ_z}{h}$$

式中：E——材料的弹性模量；

G——材料的剪切弹性模量；

I_x、I_y——托架截面惯性矩(分别为对 x 轴和对 y 轴)；

J_z——托架截面对 z 轴(沿托架纵向，即长度方向)的极惯性矩；

h——托架的长度。

(2)衬垫的刚度系数

$$K_{2x}=\frac{\pi DbE}{2t}\qquad K_{2y}=K_{2z}=\frac{DbE}{t}$$

$$K_{2\theta_x}=\frac{\pi D^3bE}{8t}\qquad K_{2\theta_y}=K_{2\theta_z}=\frac{D^3bE}{12t}$$

式中：b——衬垫沿管轴线方向上的宽度；

t——衬垫厚度；

D——管道外径；

E——衬垫材料的弹性模量。

(3)支承点处的集中刚度

$$K=\frac{K_1K_1}{K_1+K_2}\tag{9-11}$$

式中 K_1 和 K_2 分别为托架和衬垫的刚度系数。

9.4　考虑流-固耦合作用时的管路振动分析

管路的流-固耦合振动及其稳定性分析自70年代以来一直是有关学者的研究热点。所采用的分析模型大体可分为两类：一类是考虑具有定常流速的不可压缩流体与管路弯曲振动的耦合；另一类是考虑可压缩流体的平面波动与管路结构振动的耦合。通常称前者为"液-弹耦合"，后者为"声-弹耦合"。目前关于这两方面的研究都仍在继续。本节将给出在这两方面有代表性的分析模型及有关的研究结果。

9.4.1　液-弹耦合振动分析

9.4.1.1　分析模型

对流体采用无粘、不可压的假定，对管路结构采用小变形、无阻尼的假定，分别计算流体和管路结构的动能和势能，并应用哈密顿原理可得如下形式的自由振动方程(参考文献[6])：

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}+v^2m_f\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2m_fv\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}+(m_f+m)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\tag{9-12}$$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}\delta w\bigg|_0^1=0\qquad 和\qquad EI\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\delta w\bigg|_0^1=0$$

式中：w——管路弯曲振动的位移；

v——流体流速；

m_f——流体线密度；

EI——管路的抗弯刚度；

z——沿管轴线的坐标。

与梁的弯曲振动方程相比，方程(9 - 12)中多了两项：与流体流速成正比的项 $2m_f v\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}$ 和与流体流速的平方成正比的项 $m_f v^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$，前者是由于流体与管路的相对运动引起的哥氏力；后者是由于流体在瞬间弯曲管路内流动受到的离心力。

对按有限元方法离散的管路系统，与方程(9 - 12)对应的有限元公式为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{X}} + [\boldsymbol{K} + (-\boldsymbol{K}_v)]\boldsymbol{X} = 0 \tag{9-13}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 为按梁单元质量矩阵组集而成的系统总质量矩阵；$\boldsymbol{K}$ 为按梁单元刚度矩阵组集而成的系统总刚度矩阵；$\boldsymbol{G}$ 为由流速引起的陀螺效应矩阵；$\boldsymbol{K}_v$ 为由流速引起的系统刚度改变矩阵；$\boldsymbol{X}$ 为系统的广义位移向量。

下面给出组集矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{K}_v$ 的单元矩阵 $\boldsymbol{G}^e$ 和 $\boldsymbol{K}_v^e$ 的表达式：

$$\boldsymbol{G}^e = \rho_f A_f V\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{ii} & \boldsymbol{G}_{ij} \\ \boldsymbol{G}_{ji} & \boldsymbol{G}_{jj} \end{bmatrix} \tag{9-14}$$

式中：$\boldsymbol{G}_{ij} = -\boldsymbol{G}_{ji}^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{G}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & \text{反对称} & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \dfrac{l}{(1+\varphi_s)^2}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{11}{30}\varphi_s+\dfrac{\varphi_s^2}{6}\right) & 0 & 0 & \\ 0 & -\dfrac{1}{(1+\varphi_s)^2}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{11}{30}\varphi_s+\dfrac{\varphi_s^2}{6}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{G}_{ji} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_7 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_8 \\ 0 & 0 & \Omega_7 & 0 & \Omega_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_9 & 0 & \Omega_{10} & 0 \\ 0 & \Omega_9 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{10} \end{bmatrix};$$

$$\Omega_7 = -\frac{1}{(1+\varphi_s)^2}(1+\varphi_s+\varphi_s^2);$$

$$\Omega_8 = \frac{l}{(1+\varphi_s)^2}\left(\frac{1}{5}+\frac{7}{60}\varphi_s+\frac{5}{12}\varphi_s^2\right);$$

$$\Omega_9 = \frac{l}{(1+\varphi_s)^2}\left(\frac{1}{5}+\frac{37}{30}\varphi_s+\frac{1}{6}\varphi_s^2\right);$$

$$\Omega_{10} = \frac{l^2}{(1+\varphi_s)^2}\left(\frac{1}{30}+\frac{\varphi_s}{30}\right)$$

$$
\boldsymbol{G}_{jj}=\begin{bmatrix}
0 & & & & & \\
0 & 0 & & \text{反对称} & & \\
0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & \dfrac{1}{(1+\varphi_s)^2}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{11}{30}\varphi_s+\dfrac{\varphi_s^2}{6}\right) & 0 & 0 & \\
0 & -\dfrac{1}{(1+\varphi_s)^2}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{11}{30}\varphi_s+\dfrac{\varphi_s^2}{6}\right) & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

$$
-\boldsymbol{K}_v^{\mathrm{e}}=-\rho_{\mathrm{f}}A_{\mathrm{f}}V^2\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{vii} & \boldsymbol{K}_{vij}\\ \boldsymbol{K}_{vji} & \boldsymbol{K}_{vjj}\end{bmatrix} \tag{9-15}
$$

式中：$\boldsymbol{K}_{vij}=\boldsymbol{K}_{vji}^{\mathrm{T}}$

$$
\boldsymbol{K}_{vii}=\begin{bmatrix}
\dfrac{1}{l} & & & & & \\
0 & \dfrac{\frac{6}{5}+2\varphi_s+\varphi_s^2}{(1+\varphi_s)^2 l} & & & \text{对称} & \\
0 & 0 & \dfrac{\frac{6}{5}+2\varphi_s+\varphi_s^2}{(1+\varphi_s)^2 l} & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{10(1+\varphi_s)^2} & \dfrac{l\left(\frac{2}{15}+\frac{\varphi_s}{6}+\frac{\varphi_s^2}{12}\right)}{(1+\varphi_s)^2} & \\
0 & 0 & \dfrac{1}{10(1+\varphi_s)^2} & 0 & 0 & \dfrac{l\left(\frac{2}{15}+\frac{\varphi_s}{6}+\frac{\varphi_s^2}{12}\right)}{(1+\varphi_s)^2}
\end{bmatrix};
$$

$$
\boldsymbol{K}_{vji}=\begin{bmatrix}
-\dfrac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\dfrac{\frac{6}{5}+2\varphi_s+\varphi_s^2}{(1+\varphi_s)^2 l} & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{10(1+\varphi_s)^2}\\
0 & 0 & -\dfrac{\frac{6}{5}+2\varphi_s+\varphi_s^2}{(1+\varphi_s)^2 l} & 0 & \dfrac{1}{10(1+\varphi_s)^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{10(1+\varphi_s)^2} & -\dfrac{l\left(\frac{1}{30}+\frac{\varphi_s}{6}+\frac{\varphi_s^2}{12}\right)}{(1+\varphi_s)^2} & 0\\
0 & \dfrac{1}{10(1+\varphi_s)^2} & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{l\left(\frac{1}{30}+\frac{\varphi_s}{6}+\frac{\varphi_s^2}{12}\right)}{(1+\varphi_s)^2}
\end{bmatrix};
$$

$$
K_{vij}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{l} & & & & & \\
0 & \frac{\frac{6}{5}+2\varphi_s+\varphi_s^2}{(1+\varphi_s)^2 l} & & & \text{对称} & \\
0 & 0 & \frac{\frac{6}{5}+2\varphi_s+\varphi_s^2}{(1+\varphi_s)^2 l} & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & \frac{1}{10(1+\varphi_s)^2} & 0 & \frac{l\left(\frac{2}{15}+\frac{\varphi_s}{6}+\frac{\varphi_s^2}{12}\right)}{(1+\varphi_s)^2} & \\
0 & -\frac{1}{10(1+\varphi_s)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{l\left(\frac{2}{15}+\frac{\varphi_s}{6}+\frac{\varphi_s^2}{12}\right)}{(1+\varphi_s)^2}
\end{bmatrix}
$$

以上各式中 φ_s 为截面剪切系数。

9.4.1.2　流速的影响

方程(9-13)表明,流速降低系统的总刚度。当流速增加时,由流速引起的系统刚度的变化 $\boldsymbol{K}_v$ 随之不断增加。理论上当流速使 $\boldsymbol{K}_v$ 在数值上等于系统刚度 $\boldsymbol{K}$ 时,系统的总刚度为零,导致失稳,表现在特征值的变化上就是流速使得系统的特征值降低。使特征值最终为零的流速对应着使系统总刚度为零的流速,亦即失稳流速。

图 9-21 是两端固支的输流直管的频率随流速的变化曲线(参考文献[6])。图中采用的是无量纲变量:

无量纲流速　$\mu=\sqrt{\frac{\rho_f A_f}{EI}}vL$

无量纲频率　$\Omega=\sqrt{\frac{\rho_f A_f+\rho_s A_s}{EI}}\omega L^2$

式中,下标 f 代表与流体相关的参数;s 代表与结构相关的参数;v 为实际流速;L 为管路长度;EI 为管路的抗弯刚度。

图 9-21 表明当无量刚流速 $\mu<1$ 时,各条曲线近似水平;$\mu>2$ 以后,频率下降较为显著;$\mu=6.28$ 时管路失稳。

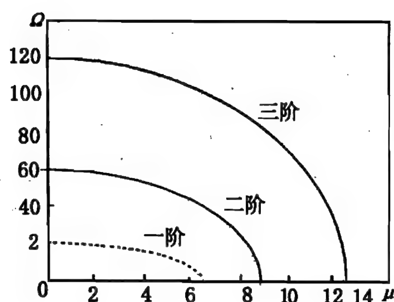


图 9-21　两端固定输流直管的 Ω—μ 曲线

发动机导管一般虽为空间曲管,但式(9-13)决定了其 Ω—μ 曲线具有与图 9-21 相似的形式。对发动机导管的研究也证明了这一点(参考文献[7])。由于发动机导管的结构特征及内部流体(燃、滑油)特性决定了它的实际流速所对应的无量纲流速 $\mu\ll1$,在这种情况下流速的影响微乎其微,因此对发动机导管一般可不计流速的影响。

在特殊情况下,例如对频率要求较高的导管,而且其无量纲流速 μ 接近或超过 1,可用式(9-13)对其进行验算。

根据目前的研究结果可以认为，发动机导管不存在由流速引起的稳定性问题。

9.4.2 声－弹耦合振动分析

9.4.2.1 分析模型

将无粘流体的连续性方程和动平衡方程在管流微段体积上积分，设流体压力为截面平均压力与波动量之和，消去截面平均流量，并根据管路结构细长比远小于1的特点，采用流体波长远大于管径的假定，可得如下方程(参考文献[8])

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A_f\frac{\partial p}{\partial s}\right)-\frac{A_f\partial^2 p}{c^2\partial t^2}=\rho_f A_f\frac{\ddot{\vec{u}}\cdot\vec{n}}{R}+\rho_f\frac{dA_f}{ds}\ddot{\vec{u}}\cdot\vec{l} \tag{9-16}$$

式中：p——流体的平均波动压力；

ρ_f——流体的定常密度；

c——声波在流体中的传播速度；

A_f——管流微段的横截面面积；

$\vec{u}$——管路结构的位移矢量；

R——管流微段的曲率半径；

s——沿管轴线的曲线坐标；

$\vec{n}$——垂直于管路轴线 s 的单位矢量，指向与曲率中心的方向相反；

$\vec{l}$——切于管路轴线 s 的单位矢量。

管流微段作用在管壁上的力通过下式计算：

$$\vec{f}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\int_{\Sigma}p\vec{n}\,d\sigma}{\Delta s}$$

式中，Σ为管流微段与管壁接触的表面面积。

采用同样的假定可得

$$\vec{f}=\frac{p}{R}A_f\vec{n}-p\vec{l}\frac{dA_f}{ds}-\rho_f A_f(\ddot{\vec{u}}\cdot\vec{n})\vec{n} \tag{9-17}$$

综合方程(9－16)、式(9－17)及管路结构的动力平衡方程，即可得到管路声－弹耦合振动方程：

$$M_m(\ddot{\vec{u}})+K_m(\vec{u})+\rho_f A_f(\ddot{\vec{u}}\cdot\vec{n})\vec{n}-\frac{pA_f}{R}\vec{n}+p\frac{dA_f}{ds}\vec{l}=0 \tag{9-18}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(A_f\frac{\partial p}{\partial s}\right)-\frac{A_f\partial^2 p}{c^2\partial t^2}-\rho_f A_f\frac{\ddot{\vec{u}}\cdot\vec{n}}{R}+\rho_f\frac{dA_f}{ds}\ddot{\vec{u}}\cdot\vec{l}=0$$

式中 $M_m(\ )$和 $K_m(\ )$分别代表管路结构单位长度上的质量算子和刚度算子。

这个方程表明当流体波动以平面波形式传播时，管路曲率不为零或管路截面发生变化将引起声－弹耦合。

发动机导管一般为三维空间曲管，当其振动时，根据上述理论，形成了一个声－弹耦合系统。

对应于方程(9－18)的有限元公式的求解是很复杂的。如果直接以压力脉动量 p 作为流体变元得到有限元公式中的质量矩阵与刚度矩阵是非对称性的，不便于直接应用大型通用软件求解。实际上对于不同形式的流体变元的选取会出现不同形式的有限元公式。下面给出的

基于流体位移势模型的有限元公式不仅具有对称性,而且经工程验证具有实用性。

引入流体位移势 φ 作为流体场变元之一,位移势与压力波动量之间的关系是

$$p = \ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi \tag{9-19}$$

假定流体仅在纵向可压,横向不可压,由此得到一种特殊的单元——声学梁单元。这是一种与梁单元类似的两结点单元,每个结点有 8 个自由度:6 个结构广义位移 + 流体压力 + 流体位移势,因此其单元刚度矩阵和单元质量矩阵均为 16×16 阶。

在单元刚度矩阵和单元质量矩阵中与流体无关的元素均与经典梁单元矩阵中的对应元素相同。设单元结点广义位移矢量中各元素的排列顺序为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} = \{ & u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad p_i \quad \varphi_i \\ & u_j \quad v_j \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj} \quad p_j \quad \varphi_j \} \end{aligned}$$

则单元刚度矩阵与单元质量矩阵中与流体有关的元素为

$$K(8,8) = K(16,16) = \frac{A_f l}{3}\rho_f^2 c^4$$

$$K(8,16) = \frac{1}{2}K(8,8)$$

$$M(7,7) = M(15,15) = -M(7,15) = -\frac{\rho_f^2 A_f}{l}$$

$$M(7,8) = M(15,16) = A_f l \rho_f^2 c^4/3$$

$$M(7,16) = M(8,15) = \frac{1}{2}M(7,8)$$

对于弯管还有

$$M(3,7) = M(11,15) = A_f\rho_f l/(3Rc)$$

$$M(7,11) = M(3,15) = \frac{1}{2}M(3,7) \tag{9-20}$$

对于变截面管还有

$$M(1,7) = \rho_f\frac{\mathrm{d}A_f}{\mathrm{d}s}$$

以流体压力、位移势为流体场变元的耦合系统的有限元动力平衡方程为(频域)

$$\left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_s & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K}_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_s & 0 & \boldsymbol{M}_{sf} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{M}_{\varphi p} \\ \boldsymbol{M}_{sf}^T & \boldsymbol{M}_{\varphi p}^T & \boldsymbol{M}_\varphi \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{u} \\ p \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9-21}$$

式中,$\boldsymbol{u}$ 代表结构的广义位移向量;$\boldsymbol{K}_s$、$\boldsymbol{M}_s$ 为管路结构刚度矩阵和质量矩阵;$\boldsymbol{K}_f$ 和 $\boldsymbol{M}_\varphi$ 为流体的刚度矩阵和质量矩阵;$\boldsymbol{M}_{sf}$为流体与结构的耦合矩阵;$\boldsymbol{M}_{\varphi p}$为两个流体场变元之间的耦合矩阵。

需要指出,一般结构的有限元公式,其刚度矩阵和质量矩阵是通过组集各单元矩阵得到,方程(9-21)中的 $\boldsymbol{K}_s$、$\boldsymbol{K}_f$、$\boldsymbol{M}_s$、$\boldsymbol{M}_{sf}$、$\boldsymbol{M}_\varphi$ 和 $\boldsymbol{M}_{\varphi p}$也是通过组集 16×16 阶的单元刚度和质量矩阵得到。

考察式(9-21)不难发现,矩阵的第三行代表了 $\boldsymbol{u}, p, \varphi$ 之间存在的线性关系,即

$$\boldsymbol{M}_{sf}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{M}_{\varphi p}^T p + \boldsymbol{M}_\varphi\varphi = 0 \tag{9-22}$$

在求解过程中可利用这个关系消去 φ,得到只含 $\boldsymbol{u}$、p 的方程(参考文献[8]):

$$\left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_s & \\ & \boldsymbol{K}_f \end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{M}_{sf}\boldsymbol{M}_\varphi^{-1}\boldsymbol{M}_{sf}^T & \text{sym} \\ \boldsymbol{M}_{\varphi p}\boldsymbol{M}_\varphi^{-1}\boldsymbol{M}_{sf}^T & \boldsymbol{M}_{\varphi p}\boldsymbol{M}_\varphi^{-1}\boldsymbol{M}_{\varphi p}^T \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{u} \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9-23}$$

应指出，尽管上式中的流体变元为脉动压力，但上式与直接取脉动压力为流体变元导出的公式是不同的。后者导致一个非对称的特征值问题。另外，φ 是在求解式(9-22)时才消去的，在计算单元刚度矩阵和单元质量矩阵时它是存在的。

9.4.2.2　发动机导管振动中的声-弹耦合程度及其影响

如同流速的影响可大可小，声-弹耦合对系统特性的影响也因结构的不同而异。研究表明(参考文献[8]、[9]、[10])，流体固体的刚性比 $\alpha(=\rho_f c^2/E$，ρ_f——流体密度；c——声波在流体中的传播速度；E——材料弹性模量)，截面特性比 $\gamma(=R^2A_f/I)$，质量比 β 以及导管曲率、细长比等因素在不同程度上影响导管系统的声-弹耦合特性。

(1)等曲率导管

导管特征值 Ω^2 随 α 与 γ 的乘积 ζ 变化的曲线如图9-22所示。曲线由三部分组成：与 ζ 成正比的上升部分；基本不随 ζ 变化的水平段以及随着 ζ 的增加迅速下降的部分。能量分析表明，曲线的上升段对应于纯声波模态；曲线的水平段对应于单纯结构振动模态；曲线的下降段才是耦合模态。这说明并非任何等曲率导管的振动都具有声-弹耦合特征。当流固刚性比 α 与截面特性比 γ 的乘积 ζ 较小时，系统的振动是非耦合的；仅当 ζ 达到一定值后，流体的压力脉动与结构振动才开始耦合，引起系统特征值下降。因此特征值曲线下降的起始点就是耦合区域与非耦合区域的分界点；耦合效应随 ζ 的增长而增长，最终导致系统发散失稳。

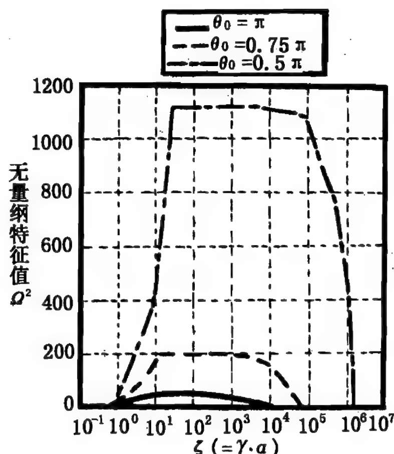


图9-22　Ω^2—ζ 曲线

三种不同圆心角两端固定的曲管失稳临界值 ζ_{cr} 为

$\theta_0=\pi$ 时　　　$\zeta_{cr}=5316$

$\theta_0=0.75\pi$ 时　　　$\zeta_{cr}=57175$

$\theta_0=0.5\pi$ 时　　　$\zeta_{cr}=1574734$

能量分析还表明曲管振型不随 ζ 变化，即声-弹耦合只影响系统的自振频率，不改变系统的振动模态。

图9-23是当 β(流体固体质量比)取不同值时，圆心角为 π 的两端固定曲管的特征值随 ζ 的变化曲线。它表明流体的线密度越大(β 越大)，特征值曲线上的水平段出现得越迟，水平段区域越小。然而不论 β 取何值，非耦合区域与耦合区域的大小都不变，因而使系统失稳的临界值 ζ_{cr} 也不变。这说明流体固体的质量比只改变系统特征值的大小，不改变声-弹耦合的程度。

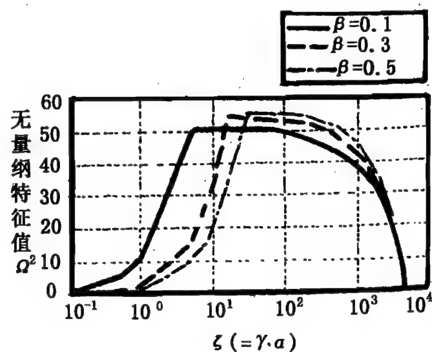


图9-23　Ω^2—ζ 曲线

值得指出的是，由于截面特性比

$$\gamma=\frac{R^2A_f}{I}=\frac{4}{\theta_0^2\delta_2^2}\cdot\frac{\delta_1^2}{(1-\delta_1^4)}$$

式中：R——曲率半径，$R=L/\theta_0$；

θ_0——曲管所对应的圆心角；

I——导管截面惯性矩；

$\delta_1 = r_i/r_e$，r_i——管内半径，r_e——管外半径；

$\delta_2 = r_e/L$，L——曲管弧长。

即 γ 与相对壁厚 δ_1 成正比、与细长比 δ_2 成反比，因而管壁越薄、管子越细长，γ 就越大，ζ 也越大。

表9-5给出了对应于不同壁厚、细长比，圆心角为 π 的燃油管的 ζ 取值。导管材料弹性模量 $E = 1.84\times10^{11}$Pa，燃油密度 $\rho_f = 911.0\text{kg/m}^3$，声速 $c = 1300\text{m/s}$，则 $\alpha = 8.367\times10^{-3}$。

对于发动机导管一般 $\delta_1 < 0.9$，$\delta_2 > 0.005$。结合表9-5和图9-23可知 ζ 基本都落在特征值曲线上的非耦合区域，在极限情况下刚刚进入耦合区域，这时特征值曲线下降得还不十分显著。从实用观点出发可用非耦合分析代替耦合分析。

表9-5　对应不同壁厚和细长比的 $\zeta(\theta_0 = \pi)$

δ_1 \ δ_2	0.001	0.005	0.01	0.5
0.1	33.9	1.35	0.339	0.013
0.5	904	36.2	9.04	0.362
0.7	2186	87.46	21.86	0.8746
0.8	3676	147	36.76	1.47
0.9	7987	319	79.87	3.19

(2)非等曲率导管及管系

对于发动机的一般导管和管系，将其看成等曲率管段和直管段的组合体，仍可参考表9-5中的 ζ 值。特别是曲管段的圆心角一般小于 π，因此按表9-5中的 ζ 估计的耦合程度偏于安全。

例：图9-24是一根易损燃油管路示意图，以下称1#管，其结构及材料参数为：$E = 1.84\times10^{11}$ Pa；$\rho_f = 911.0\text{kg/m}^3$；$c = 1300\text{m/s}$；$r_i = 7\text{mm}$；$r_e = 8\text{mm}$。最大圆心角所对应的弧长 $L = 0.6\text{m}$，则 $\alpha = 8.367\times10^{-3}$，$\delta_1 = 0.875$，$\delta_2 = 0.013$。参考表9-5及图9-22可知，对于此管可用非耦合分析代替耦合分析。

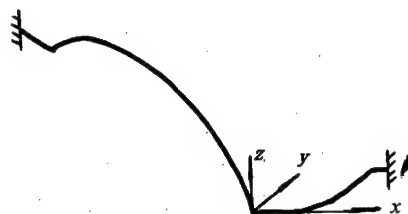


图9-24　1#管示意图

表9-6中给出了按耦合分析和非耦合分析计算的1#管前10阶固有频率。非耦合分析中考虑了流体质量。比较结果证实了上述结论。

表9-6　1#管的自振频率

阶次	耦合分析	非耦合分析	误差(%)
1	38.72	38.60	0.31
2	57.32	59.60	-3.98
3	73.31	78.09	-6.52
4	145.85	162.39	-11.34
5	177.98	178.58	-0.34
6	296.49	315.75	-6.50
7	339.40	344.92	-1.63
8	422.72	410.71	2.84
9	432.64	443.11	-2.42
10	522.33	497.77	4.70

9.5 管路振动故障的诊断与排除

9.5.1 管路振动故障的类型

发动机管路由振动引起的故障大致有两类,一类是振动疲劳,一类是振动磨损。

管路的振动疲劳是管路在一定的振动应力作用下,先局部形成永久性累积损伤,然后经一定循环次数的裂纹扩展直至断裂的过程。

管路的振动磨损,则是因管路振动引起管路连接、固定处配合面产生相对位移而形成的摩擦表面损伤;或是因管路振动位移过大,而与相邻物体(如机匣、相邻管路等)产生反复碰撞摩擦而形成的表面损伤,严重时可在管路表面形成明显的磨损凹坑而导致管路损坏。

9.5.2 管路振动故障的诊断与排除

9.5.2.1 管路振动疲劳的形成过程

管路疲劳的形成过程大致分为三个阶段(参考文献[2])。第一阶段为微观裂纹扩展;第二阶段为宏观裂纹扩展;第三阶段为瞬时断裂。

9.5.2.2 管路振动疲劳的断口特征

与疲劳扩展的三个阶段相对应,管路疲劳断口存在三种明显特征,即源区、扩展区和瞬断区。

裂纹源区的断口形貌极为复杂。可能出现"类脆性解理"、沿晶、韧窝、滑移线、疲劳条带或是混合形式的断口形貌,它取决于材料的组织结构、平均应力以及环境等因素。从宏观上看,裂纹源区的断口形貌多数情况下比较平坦、光亮且呈半圆形(或半椭圆形)。

裂纹扩展区的一个明显特征就是疲劳条带。从宏观上看,裂纹扩展区的明显特征就是海滩状(或贝壳状)的花样线。

瞬断区的断口特征与静载荷断口的形貌基本一致,多是剪切斜断口。

9.5.2.3 管路振动故障的诊断

管路振动磨损故障可以根据管路表面的磨损痕迹和管路周围的结构环境方便地作出准确的判断,而管路振动疲劳故障的分析则需做较多的工作。

(1)断口分析

一旦管路发生裂纹故障,首要的工作就是进行断口分析。即利用放大镜、光学显微镜、扫描电镜等工具,对断口的宏观、微观形貌及特征进行观察和分析。确定其断口的性质,并进一步区分是静载荷断口还是疲劳断口,是高周疲劳断口、低周疲劳断口还是热疲劳断口等。

(2)振动频率和应力测量

确定了断口的疲劳性质之后,即可开展管路的振动频率和应力测量,以了解管路工作时的振动特性和应力水平。

管路的振动频率可以在发动机装配车上或试车台架上利用敲击法或其他测频方法获得;管路的振动应力可通过在管路的裂纹部位截面(或相邻截面)上粘贴应变片,在发动机台架试车时测量得到。

在完成管路的振动频率和应力测量之后,即可分析管路的振动性质、激振源、振幅与裂纹故障的因果关系。

(3)其他检查和测量

在进行振动频率和应力测量之前或同时,应开展下述内容的检查和测量:

a.材料的化学成分、金相组织、力学性能等检查。检查是否存在导致管路疲劳极限明显降低的材质或加工缺陷,确定材料是否符合设计要求。

b.检查加工、装配过程中有无异常。如焊接过程是否符合工艺要求,是否造成较大的焊接损伤(热裂纹);装配过程中是否存在较大的装配应力和校型损伤等等。

c.分析验证热疲劳或其他故障原因的可能性。

管路振动疲劳故障大致分三种情况:一是材料、加工、装配均正常,由振动应力过大引起的管路振动疲劳;二是由于存在严重的材料缺陷或加工、装配损伤,或是装配应力过大等因素导致管路抗疲劳能力明显降低而在较小的振动应力作用下产生的振动疲劳;三是材料缺陷、加工损伤、装配应力和振动应力等因素均较明显且共同作用时引起的管路振动疲劳。

9.5.2.4　管路振动故障的排除

一旦确定了管路振动故障的主要原因,即可采取相应措施予以排除。一般情况下,排除管路振动故障的途径有以下几种:

(1)控制管路的激振力水平

无论是共振还是其他类型的强迫振动,管路的响应水平均与管路承受的激振力的大小直接相关。控制管路承受的激振力的大小,对防止管路振动疲劳有重要意义。

(2)控制管路的响应水平

管路振动响应的控制,有调整频率和增加阻尼两种途径。

a. 调整频率

调整频率的主要目的,是把管路的固有频率调到发动机工作转速频率之外,避免在发动机工作过程中出现管路共振。因为在共振条件下,即使是较小的激振力也可能产生很大的振动应力。

调整频率的基本原则,是把管路的一阶固有频率调到发动机最高工作转速频率的1.25(参考文献[3])倍以上。

调整频率的方法主要有增加固定卡箍、增大管路直径等。

b. 增加阻尼

增加管路系统中的结构阻尼,是减小管路振动响应的一个有效途径。

增加管路系统中的结构阻尼,可通过在卡箍与管路接触面之间安装氟塑料衬套或金属橡胶衬套等减振材料来实现。现行使用中较为理想的减振材料是用不锈钢丝编织而成的网状衬套,其优点有四:一是提供阻尼;二是减小磨损;三是不影响附件的“搭铁”性能;四是易于装配。有的发动机上也采用弹性卡箍支承,其作用一是隔振,二是通过两个弹簧片的相对摩擦来提供阻尼。

(3)控制管路的装配应力

在管路装配过程中,由于加工的尺寸偏差,不可避免地要在管接头和接管嘴之间、管路与卡箍之间产生安装位置和尺寸的偏差,导致管路在连接、固定过程中产生装配应力。装配应力的存在,将影响管路承受振动疲劳的能力。

控制装配应力的大小,主要是控制管路、附件的形状和尺寸误差,把管路的安装偏差限制在一个较小的范围内;当安装偏差超过这一范围时,则应采取校型措施消除偏差,严禁强行装配。

安装偏差的限制值，一般依据所产生的装配应力使管路耐振能力下降20%的原则来确定。

(4)控制管路的加工装配损伤

在加工装配过程中造成的损伤直接影响管路的疲劳极限，故应尽量避免和控制。应严格焊接工艺规程，避免违章操作和误操作，减小焊接引起的热裂纹(长度和数量)；在装配过程中，应严格遵循校型工艺，杜绝直接在发动机上对管接头焊缝部位进行校型。

9.5.3 排管时应遵循的几项原则

发动机管路在排管时，主要应遵循以下几项原则：

(1)满足附件对管路的功能要求。

(2)满足飞机对发动机外部轮廓的要求，即“过样板”要求。

(3)满足附件的“搭铁”要求，即附件、管路应有良好的导电性能。

(4)满足飞机对发动机外部管路的装配、维护的可视性和可达性等要求。

(5)满足间隙要求。管路与管路之间、管路与附件之间、管路与机匣之间应有足够的间隙(如≥5mm)，以防因振动而造成管路磨损。

(6)满足管路补偿弯曲的最小长度要求。为补偿管路受热膨胀时的轴向位移或管路安装时的位置尺寸偏差，应使管路保持适当的弯曲曲率。管路能做补偿弯曲的最小长度为(参考文献[3])：

管路外径(mm)	6	8	10	12	14
管路最小长度(mm)	250	300	400	500	600

(7)满足管路紧固件的配置要求。根据管路频率调整的需要，适当配置固定卡箍的数量和位置。

参考文献

[1] 张阿舟等编著.振动控制工程.北京：航空工业出版社，1989.

[2] 王仁智等编著.疲劳失效分析.北京：机械工业出版社，1987.

[3] 萨波什尼柯夫 BM.飞机液路与气路系统的安装和试验.北京：国防工业出版社，1980.

[4] 党锡淇，陈守五编.活塞式压缩机气流脉动与管道振动.西安：西安交通出版社，1984.

[5] 倪振华编.振动力学.西安：西安交通大学出版社，1989.

[6] CHEN SS. Flow Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures. Hemisphere Publishing Corporation, 1987.

[7] 喻立凡.航空发动机管路系统动态特性分析.北京航空航天大学硕士论文，1996.

[8] 李琳.关于曲管振动声弹耦合程度的研究.航空学报，Vol 12, No.4, 1997.

[9] 李琳.发动机导管振动中流－固耦合程度.第八届航空发动机结构强度振动会议论文集，1996.

[10] 李琳.载流曲管声－弹耦合振动高阶模态的稳定性及其能量分布.应用力学学报，Vol.14, No.4, 1997.

第 10 章　发动机整机振动测试和分析技术基础

10.1　概　述

航空发动机振动监测和信号分析技术主要用于识别发动机结构系统，特别是转子系统的机械状态和故障。妥善解决发动机振动问题应贯穿于发动机设计、研制和使用的全过程。

振动测试系统由传感器、信号调节器（二次仪表）、记录仪、分析仪及以微机为中心的数据处理系统等部分组合而成。可根据测试目的和要求，选用合适的测试系统。

根据发动机试验规范（参考文献[1]）的要求，发动机整机振动测试基本内容有：

(1) 振动基本参数的测量

测量压气机、涡轮、附件传动机匣外部或其内部（必要时）结构上的振动位移、速度、加速度总量，或振动位移、速度、加速度分量；在轴承的适当位置测量轴承载荷及转子振动加速度或速度、位移值，以及频率、相位、外传力等参数。

(2) 发动机系统振动特征参数的测试

测量转子－支承系统以及机匣等其他产生高振动和应力的构件固有频率、转子临界转速、振型、刚度、阻尼等模态参数和物理参数。

本章介绍了测振系统各部分仪器的功能、指标、适用范围及测振系统常用的校准方法和标定内容，同时介绍了振动基本参数、特征参数的测试方法及仪器选用原则。

信号分析是发动机整机振动测试的重要环节，也是实验模态分析及故障诊断技术的基础。本章主要介绍振动信号的预处理；离散傅里叶变换及快速傅里叶变换原理和方法；振动信号分析中各种特征参量处理的基本原理和方法；模态分析理论；频响函数测试技术；模态参数识别方法等。

发动机振动故障诊断，就是在发动机运行过程中监视、识别和预测其运行状态变化情况，根据振动信号的特征值，在事故发生之前，及时作出诊断，查明故障发生的原因和可能发生的部位，以便采取相应决策，及时排除故障，消除隐患，提高发动机运行的可靠性及安全性。本章介绍了发动机常见故障的类型和特征。

发动机振动测试和分析技术是多学科知识的综合运用，内容庞杂。随着科学技术的迅速发展，振动测试分析方面的新技术、新方法、新设备不断涌现。在实际运用中，为准确监测分析发动机的振动特性，有效地诊断并预测发动机的振动故障，必须结合具体对象、目的和要求，选取合理的适用的测试系统和处理方法。发展综合诊断技术，开展振动故障机理研究，提高诊断准确度，是获得满意的监测和诊断效果的有效途径。

10.2　振动测试

10.2.1　振动测试系统

航空发动机整机振动测试系统一般分为机载和地面测试系统两大类。所用仪器设备种类很多，但均由下列仪器组合而成：传感器、信号调节器、显示与记录装置、信号分析与处理设备等。选用时应考虑下列因素(参考文献[2])：

(1) 仪器的灵敏度、动态范围、频率范围及分辨率等性能指标应满足被测信号的大小和变化范围及分析精度要求。

(2) 传感器及整个测振系统需经过标定。

(3) 环境条件：温度、湿度、压力、噪声以及电磁场和辐射强度等对测试的影响。机载测振系统应选用体积小、便于安装、性能稳定及可靠性特别高的仪器。

10.2.1.1　传感器

在机械振动测试中，传感器是将振动量(位移、速度、加速度)的变化转换成电量(电压、电流、电荷)或电参量(电阻、电感、电容)变化的器件。目前用于振动测量的传感器种类很多。航空发动机振动测量中常用的传感器如下：

(1) 压电式加速度计

压电式加速度计是一种自发电式传感器。振动时，传感器中的压电元件受到惯性重块的作用而产生电荷或电压，其输出量与所感受的加速度成正比。可采用天然石英作为敏感元件，或者用铁电材料加工成人工极化陶瓷敏感元件，并可制成各种结构形式的加速度计。压电加速度计具有灵敏度高、频响宽、动态范围大、尺寸小、重量轻、寿命长、易于安装、稳定性好等特点。常与电荷放大器或高阻抗电压放大器配套使用。在发动机振动测量中获得广泛应用。

近年来研制生产的集成电路式压电加速度计、双轴向压电加速度计、三轴向压电加速度计、伺服加速度计等在发动机振动测量及飞机试验中逐步获得应用。

集成电路式(又称内置电路式)加速度计，简称 ICP。壳体内装有微电子信号调节器，低阻抗输出，输出信号大，抗干扰能力强，结构简单，造价低，性能好，用一根双芯电缆就可同时起到供电和传输信号的作用，特别适用于远距离测量。

三轴向集成电路式压电加速度计可用来测量设备结构三个正交轴向上的振动信号。内部装有三个独立的低噪声混合电路信号调节器，采用双线制既能传输信号又能提供恒流源电压。

压电式力传感器多采用刚度高、稳定性好的石英晶体为敏感元件。具有频率范围宽、动态范围大、线性好、分辨率高、附加质量小、性能稳定等特点。若与加速度计组合成“阻抗头”，可方便地测得激振处结构的点阻抗或导纳，已得到普遍运用。

用压电加速度计时，应采用低噪声屏蔽电缆，与电荷放大器(或前置放大器)组成真实的差分电路，测试系统单点接地，以消除共模干扰和颤动噪声。应选用横向灵敏度小(一般小于3%～4%)(参考文献[3])的加速度计。对恶劣环境下的振动测量，应选择灵敏度随环境变化小的特种传感器。如高温环境下应选用耐高温加速度计。传感器安装应牢固可靠。

(2) 电动式速度传感器

电动式速度传感器主要由线圈和磁铁组成。根据电磁感应原理，当运动导体在固定磁场里切割磁力线时，导体两端产生感应电动势。

$$E = BWLV \times 10^{-8} \tag{10-1}$$

式中：B——气隙磁感应强度，T；

W——线圈匝数；

L——每匝线圈的平均长度，cm；

V——线圈相对于磁钢的运动速度，cm/s。

所产生的电动势 E 正比于导体运动的速度，即速度传感器输出电压与振动速度成正比。主要特点：低阻抗输出、干扰噪声小、输出电压较高(在低频范围)、灵敏度高、受温度及湿度影响小、受磁场影响大、稳定性较差、寿命短、结构尺寸和质量大等。可配含有积分和微分线路的测振仪测振动位移和加速度值。

近年来生产的速度传感器，采用新的材料工艺，其惯性运动系统采用滑动轴承支承，横向刚性很强，具有横向灵敏度较低、可测较大的振动加速度($1 \sim 500g$)、耐高温(370℃)性能较好、灵敏度高(大于 6mv/(mm/s))、频响范围较宽(45 ~ 1500Hz)等特点。

(3) 涡流式位移传感器

当通有交变电流的传感器线圈靠近被测物体(导电体)表面时，穿过导体的磁通量随时间而变化，在导体表面感应出电涡流，涡流与线圈之间产生互感，其互感的大小同线圈与导体表面的间隙有关，即输出量与位移成正比。

其主要特点：该类传感器属非接触式，灵敏度较高，对环境影响不敏感，线性度好，频响范围宽(DC ~ 10kHz)；对试件材料性质较敏感等。它特别适用于旋转轴的振动监测及小型构件的振动测量。可配用谐振调幅式或外差调频式测振仪。

(4) 电阻式(应变计)传感器

电阻式传感器有电阻应变计(丝式和箔式)和半导体应变计等类型。电阻应变计在测量振动时，传感器中的电阻丝受力变形而使电阻变化，由此反映振动体变形量的变化情况。半导体应变计，利用半导体丝受力变形时电阻率改变的特性测量振动体的振动应力值。

此类传感器频响范围宽、线性好、寿命和稳定性差，易受温度、湿度、磁场等的影响。可配用动态电阻应变仪或直流放大器等。

10.2.1.2　信号调节器

信号调节器是振动监测系统的核心部分。其作用是将传感器输出的振动信号进行阻抗变换、放大、滤波、归一化、数字化等处理。根据测试和后续读显、数据采集、记录仪器的要求，对信号进行适当的调节。必要时，信号调节器还有供电、积分、平衡、校准、过载指示、电平检测等功能。传感器不同，配用的信号调节器也不同。从简单的便携式单通道测振仪到计算机程控的多通道振动监测系统，可根据测量目的和要求不同，进行组合选用。

(1) 电压放大器

电压放大器是信号调节器中常采用的一种前置放大器。具有极高的输入阻抗和较低的输出阻抗；可将加速度计的微小电信号加以放大变成易于测量的电压信号；输出电压归一化，结构简单，性能可靠。目前已有将前置放大器直接装在传感器内的集成电路式加速度计。

压电式加速度计与电压放大器、传输电缆组成的等效电路如图 10 - 1。

电压放大器的输入电压为 e_i 为

$$e_i = \frac{q_a}{C_a + C_c + C_i} = \frac{C_a}{C_a + C_c + C_i} e_a \tag{10-2}$$

电压放大器的输出电压为 e_o 为

$$e_o = k \cdot e_i = \frac{kC_a}{C_a + C_c + C_i} e_a \qquad (10-3)$$

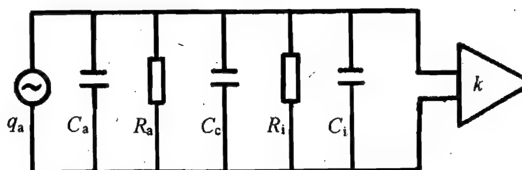


图 10－1　压电传感器、电缆、电压放大器组合的等效电路

式中：e_a——压电加速度计的等效电压；

e_i——电压放大器的输入电压；

k——放大器的放大倍数；

C_a——加速度计的电容；

C_c——电缆电容；

C_i——前置放大器输入电容；

q_a——加速度计的输出电荷。

图中：R_a——传感器内阻；

R_i——前置放大器输入电阻。

（因 R_a、R_i 足够大，若忽略其影响，可得上式。）

式(10－3)表明电压放大器的输出电压与电缆电容有关，电容的变化还会影响放大器的频响特性。实际应用中，为保证足够的灵敏度，电缆不宜太长，并用低噪声电缆。

(2) 电荷放大器

电荷放大器是一种输出电压与输入电荷成正比的前置放大器。可将压电加速度传感器输出的电荷量转换为电压量，是个具有负反馈电容 C_f 的输入阻抗极高的高增益运算放大器。与压电式加速度计连接的等效电路如图 10－2。

放大器的输入电压

$$e_i = \frac{q_a}{C_a + C_c + C_i + (1-k)C_f} = \frac{C_a \cdot e_a}{C_a + C_c + C_i + (1-k)C_f} \qquad (10-4)$$

式中：C_a——加速度计内部电容；

C_c——连接导线的电容；

C_i——电荷放大器的输入电容；

C_f——反馈电容；

e_a——加速度计的开路电压；

q_a——加速度计的输出电荷；

k——电荷放大器的开环增益。

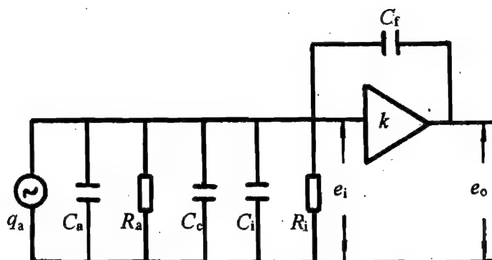


图 10－2　加速度计、电缆、电荷放大器组合的等效电路

因放大器的开环增益 k 很大，上式简化为

$$e_i \approx \left| \frac{C_a}{C_f \cdot k} \right| e_a = \frac{q_a}{C_f k} \qquad (10-5)$$

放大器的输出电压

$$e_o = e_a \cdot k \approx \frac{q_a}{C_f} \qquad (10-6)$$

式(10－6)表明电荷放大器的输出电压正比于输入电荷量，与反馈电容 C_f 成反比，而与电缆长度无关。消除了电缆电容的影响，这在测量小信号和使用不同长度电缆时显得特别重要。电荷放大器的输入阻抗极高，一般要求在 $10^9 \sim 10^{14}\Omega$。

电荷放大器具有频响范围宽、性能稳定、抗干扰强等特点。常配有滤波器，积分器，归一化、数字化线路组成的信号调节器，使之适宜于后续仪表的测量、记录和分析。随着电子技术

的发展，已先后由晶体管电荷放大器发展为计算机程控电荷放大器，及采用数字跟踪滤波器的机载振动监测系统。与加速度计配合，广泛用于发动机振动测量。

(3) 滤波器

滤波器是一种选频装置。它允许给定频段内(通频带)的振动信号以最小的衰减量通过；而滤去通频带外(阻频带)的所有信号。按通频带分布情况，滤波器分为低通、高通、带通、带阻滤波器四种形式。按信号处理方式可分为模拟式和数字式滤波器。带通滤波器有宽带和窄带之分。性能好的滤波器应具有阻带内衰减最大，衰减特性陡度最大；通带内衰减最小，平坦度好(波纹度小)；特性阻抗保持常数，相移特性为线性；性能稳定、抗干扰能力强等特点。

滤波器带宽 $f_1 \sim f_2$ 依发动机的转速范围而定。一般 f_2 高于最大转速，f_1 低于慢车转速(参考文献[4])。其特性指标应满足：上、下截止频率处衰减为 -3dB；通带外衰减不低于 -18dB/oct(参考文献[1])；通带内波动不大于 ± 1dB。

窄带跟踪滤波器与转速严格同步。对多转子发动机可跟踪多个转子的转速，通过滤波器的输出信号，可以准确判断振源来自哪一个转子。加上参考相位，可精确指示转子不平衡量大小和方位。如将宽带与窄带跟踪滤波器组合使用，可监视与转速同步的振动分量及振动总量的变化情况(参考文献[5])。

程控数字式跟踪滤波器，由计算机程控进行多通道数字跟踪滤波。可根据需要跟踪不同的转速信号，从复杂的信号中提取有用的数据，给出每个转子的幅频和相频特性，提高分析精度。多用于机载振动监测系统和发动机台架试验的振动监测系统。

10.2.1.3　显示和记录装置

显示和记录装置是振动测试中十分重要的部分。无论在机载监测还是地面试验的监测系统中，为便于观察、保存和分析研究发动机的振动特性，都必须将测量结果显示并记录下来。以往振动测试中多用电子示波器、存贮示波器、光线示波器、笔式记录仪等。磁带记录仪及磁盘(或光盘)记录系统在现代振动测试中已获得广泛运用。

(1) 磁带记录仪

利用铁磁性材料的磁化原理将电信号变换成磁信号记录在磁带上的记录装置。按记录性能分：有模拟式和数字式两种。按记录方式分：有直接记录式(DR)、调频式(FM)和调频/调幅式等。按结构形式可分为大型立式、便携式、机载式等。主要由放大器、磁头、磁带与运带机构等部分组成。

磁带记录仪特点是：记录和存储的信息密度高、容量大、通道数多(几个到几十个通道)、记录时间长、有多种带速可选用；工作频率范围宽(DC ~ 2MHz)；存储的信息可长期保存、反复重放；稳定性高、抗干扰能力强；具有变换信号频率的能力。广泛用于现场试验记录及同计算机联用。

数字式磁带记录仪是将模拟量数字化，以数字代码的形式记录在磁带上，回放时进行数/模转换。与模拟式相比，其失真度小、精度高、通道相位匹配好、通道数可根据带宽调整；难以作时间压缩或扩展、通道数增加，带宽减小等特点。对通道间相位匹配要求较高的试验多用数字式磁带机。

(2) 微机磁盘记录系统

测量信号通过采集和微机系统，利用软件程序等处理后，将信息数据记录在磁盘(或光盘)上。可作在线监测分析，也可作事后分析处理。该方式记录存储数据容量大、速度快、频响范围宽(0.001Hz ~ 1MHz)；可多通道同时记录；存储的信息可长期保存。实现采集、记录存储、分

析处理、输出打印等一体化的功能。

10.2.1.4 振动信号分析和数据处理系统

为研究发动机的振动特性、动力响应及进行故障诊断,必须对测量的原始振动信号进行分析和数据处理,以求得信号的频率、幅值、相位及其他特征参数。通常有模拟分析和数字分析两种。模拟分析仪有恒带宽及恒百分比带宽的滤波器式频谱分析仪。目前多用数字式频谱分析仪及以微机为中心,软件、硬件相结合的动态信号处理系统。

(1) 实时频谱分析仪

实时分析仪的核心是快速傅里叶变换(FFT)。工程上一般用软件、硬件和专用数字信号处理器(DSP)硬件加软件等三种方式实现快速傅里叶变换。软件方式是在通用计算机或微机上用软件实现FFT,通用性强,速度慢。硬件方式则全部用硬件实现FFT,速度快,通用性差,用于实时性要求很高的专业性领域。由数字信号处理器(DSP)、浮点运算处理器(FFT)、中央处理器(CPU)等硬件加软件构成的实时分析仪,具有数据采集、信号处理及多种信号源的功能。做成仪器形式,由面板上的开关和按键操作,由通用并行接口总线同外部设备和计算机实现数据通讯。具有单一或若干个通道的信号输入端。它们具有参数丰富、分析功能强、性能重量比高、附设少、实时能力强;有触发及转速跟踪,软、硬件结合以硬件为主的特点。它们适用于现场或固定地点的信号处理,应用广泛。这类实时分析仪存储量有限,再处理功能较差。

(2)动态信号处理系统(参考文献[6])

动态信号处理系统又称动态信号处理机。它是以电子计算机为中心,以快速傅里叶变换(FFT)为主要内容的数字信号处理设备。主要由测试分析前端和通用计算机以及相应的信号分析软件组成。测试分析前端包括多通道数据采集系统、加窗预处理及多功能信号源等部分组成。计算机除实现各种平均运算、功率谱和相关函数等信号处理之外,还通过信号处理软件实现对整个测试分析系统的全部控制功能。动态信号处理系统的特点是:运算功能多;表示参数丰富;运算速度快、实时能力强;分辨力高、精度高及操作与显示、复制与存储、扩展与再处理的功能强。

动态信号分析系统常用的功能有:正、逆傅里叶函数变换,自、互相关函数,自、互功率谱密度函数,各种传递函数,相干函数,概率密度与累计分布函数,几种加权窗函数,多次平均方式,功率谱阵计算等功能。可表示的坐标参数极其丰富,可以是时域、频域、幅值域;坐标尺度可以是线性、百分比、对数、开方、阶次;也可是频率、转速、倍频程、分贝或各种工程单位。具有平面或立体特殊显示方法。有共振转速图(Campbell 图)、奈奎斯特图(Nyquist 图)、功率谱阵图、冲击响应谱图、各种模态显示图以及各种机械阻抗导纳图等多种图形显示方式。这类分析系统在大型的重要的试验设备中获得广泛的应用。

10.2.1.5 测振传感器和测振系统的标定

测振系统在使用中某些元件的电气性能和机械性能总会因使用程度和随时间与环境条件而不断发生变化;有时因不同类型的传感器、测振仪和记录仪配套使用,其灵敏度和使用范围等各项指标会有所改变,为保证发动机振动测量的可靠性和精度,必须对振动传感器和测量系统进行标定。

测振系统标定按校准对象不同分为分部标定与系统标定两类。对组成测振系统的各个仪器分别进行标定,叫分部标定。将测振传感器、测振仪和记录仪等组成特定测振系统的每个通道配套标定,称为系统标定法。对于固定配套使用的测振仪与系统应进行系统标定,可免除连接匹配所带来的误差影响。系统标定应注意下列事项:

各个环节的幅值不能饱和，频率范围要适当；标定时的配套条件（传感器、放大器等）应与使用时完全一致，严格做到“对号入座”，不能任意更换，必须更换时，要作补充标定；标定时应考虑屏蔽和接地问题，各个环节要接触良好，避免产生偶然误差。

系统标定法的标定内容及方法与分部标定法基本相同。现以分部标定压电加速度计为例，其标定的内容及方法如下：

(1) 标定内容及技术要求

传感器标定的主要内容有：灵敏度、频率响应特性和线性度。特殊情况下，还进行横向灵敏度、温度效应、环境灵敏度等参数的标定（参考文献[7]）。

为进行传感器校准，首先应根据各类传感器在实际测量中的要求提出统一的技术条件。根据压电加速度计检定规程国家标准规定（参考文献[3]），其校准的技术要求是：

参考灵敏度的校准误差：$\leqslant \pm 3\%$；

灵敏度的年稳定度变化率：$\leqslant 3\%$/年；

横向灵敏度比可分为：5%和10%两级；

频率响应（不包括校准仪器误差），在1/5谐振频率以下，频响与参考灵敏度偏差：$\leqslant +0.5$dB；在1/3谐振频率以下，其偏差：$\leqslant +1$dB；

幅值线性度的偏差：$\leqslant 5\%$（用于振动测量时）；

根据应用目的不同，有的还给出加速度计的绝缘电阻、电容、环境性能指标等技术要求。

(2)用绝对法标定参数

将被校传感器置于精密振动台（或称标准振动台）上承受振动，通过直接测量振动的振幅、频率和传感器的输出电量来标定传感器特性参数的方法为绝对标定法之一。常用读数显微镜或激光测振仪、频率计、精密电压表、相位计等分别测振幅、频率、输出电压、相位等参数，并用失真度仪监视波形的失真程度。

a. 传感器灵敏度的标定

传感器的灵敏度是指传感器输出量（电量或其他量）与机械输入量（位移、速度、加速度）之比。一般灵敏度包括幅值和相位，所以它是复数量。加速度计电荷灵敏度的复数表达式：

$$\dot{S} = \frac{q}{a} = S_q e^{-j(\varphi_1 - \varphi_2)} = S_q e^{-j\varphi} \tag{10-7}$$

式中：S_q——传感器电荷幅值灵敏度；

φ——传感器的加速度相位滞后角；

φ_1、φ_2——分别为传感器的加速度输入和电荷量输出相对于参考时刻的初相角；

q——传感器电荷输出量；

a——加速度输入量的幅值，m/s^2。

加速度计电压幅值灵敏度与电荷幅值灵敏度的关系为

$$S_u = \frac{u}{a} = \frac{S_q}{c} \quad (\text{mv}/g) \tag{10-8}$$

式中：u——加速度计输出电压值；

c——加速度计的电容量（可测到）。

标准振动台上测得加速度计绝对振幅 X、频率 f 及输出电压 u 之后，可得振动加速度

$$a = (2\pi f)^2 X \quad (g) \tag{10-9}$$

由式(10-8)可求得 S_q 与 S_u 的大小。

同法可求得位移计、速度计的灵敏度：

位移计灵敏度
$$S_d = \frac{u}{d} \tag{10-10}$$

速度计灵敏度
$$S_v = \frac{u}{v} \tag{10-11}$$

式中：u——输出电压值，mV；

d——输入振动位移值，mm；

v——输入振动速度值，cm/s。

传感器灵敏度的标定频率应取在频响曲线平坦范围内。一般取标定三次以上峰值或峰－峰值的平均值(参考文献[8])。

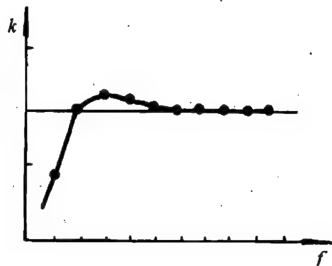


图 10－3　幅频响应曲线

b. 频率响应特性标定

频响特性标定包括幅频特性和相频特性。

幅频特性标定：指标定传感器灵敏度随频率的变化情况，确定传感器与测振仪的频率使用范围和误差。标定方法：固定传感器输入标准振动量值，改变振动频率，测出不同频率时传感器的输出量，然后除以输入量，可得到不同频率时的灵敏度值k。由此可绘制幅频响应曲线，图10－3所示。响应曲线横坐标可用线性坐标或对数坐标，纵坐标可用灵敏度值 k 或幅值的相对比值β表示。

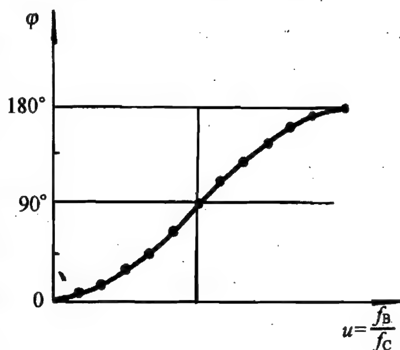


图 10－4　相频特性曲线

相频特性标定：表示传感器或测振仪在不同频率下输入信号与输出信号之间的相位差。标定方法：将标准信号和被标定的传感器(或测振仪)的输出信号直接送入相位频率计中，测出不同频率的相位差，用频率或频率比作横坐标，相位差角作纵坐标，绘出相频特性曲线，图 10－4。

c. 线性度标定

线性度是指传感器的灵敏度随输入振动量大小的变化特性。可确定传感器(或测振仪)动态幅值的工作范围和在不同幅值时的误差状况。标定方法：将传感器安装在振动台上，在一定频率下，逐点改变输入的振动量值，测出传感器(或测振仪)的输出量，由输入量和对应的输出量可绘制成线性度曲线，如图 10－5 所示。理想的线性度曲线为直线，而在幅值过大和很小时，会出现非线性。

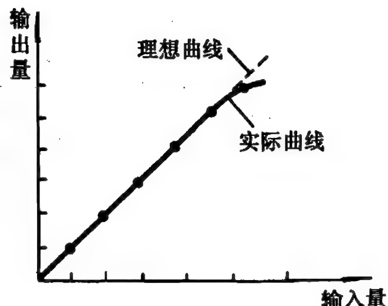


图 10－5　线性度曲线

(3) 比较法校准

比较法是用一个标准传感器(或叫参考传感器)和被校传感器作对比试验，并依此确定被校传感器的性能参数。校准时应尽量使被校传感器与标准传感器装在一起，有时采用“背靠背”的方式安装，使两传感器承受同样的正弦振动，比较它们的输出信号，由标准传感器的灵敏度可求出被校传感器灵敏度：

$$S_2 = \frac{u_2}{u_1} S_1 \tag{10-12}$$

式中：u_1——标准传感器输出的电压幅值；

u_2——被校传感器输出的电压幅值；

S_1——标准传感器电压幅值灵敏度；

S_2——被校传感器电压幅值灵敏度。

同样可求其他的参数。

标准传感器(与标准电荷放大器配套使用)对校准精度有直接的影响。它应具有更好的性能。表 10－1 给出典型的标准加速度计的性能指标。

表 10－1　标准加速度计性能指标(参考文献[2]、[7])

性　　能	指　标
灵敏度误差	±0.5%
100Hz 时灵敏度稳定度年变化率	±0.5%/年
100Hz 时质量对灵敏度的影响	±0.2%/100g
在 5～5000Hz 范围内最大质量为 100g 时频率响应和相对运动灵敏度变化	－2%①
在 5～10000Hz 范围内最大质量 50g 时频率响应和相对运动灵敏度变化	±4%①
幅值线性度变化	±0.1%/1000*g*
横向灵敏度比	1%
温度响应灵敏度	+0.3%/10℃
应变灵敏度	0.001*g*/微应变

注：① 根据名义响应为 ±1% 的曲线估计的最大误差。

在标准传感器、标准电荷放大器及振动台等符合精度要求时，正弦振动比较法校准精度一般可达 4%～10%，高的可达 2%。此法简单、方便、省时，在实验室及生产单位获得广泛的应用。

此外，还有随机振动比较校准法(参考文献[2]、[3])。图 10－6 为双通道 FFT 分析仪组成的随机振动比较法校准系统原理图。振动台在分析仪输出的信号控制下作随机振动，两个加速度计的输出经放大后送入双通道分析仪。求得两个信号的自功率谱和互功率谱，并求出传递函数和相干系数，从而可求得两传感器的频率特性和相位关系，也可检查测量校准过程的质量。该校准法特点是在整个工作频段内连续地同时校准，可得到完整的灵敏度幅值和相位校准数据及试验时间短等特点。

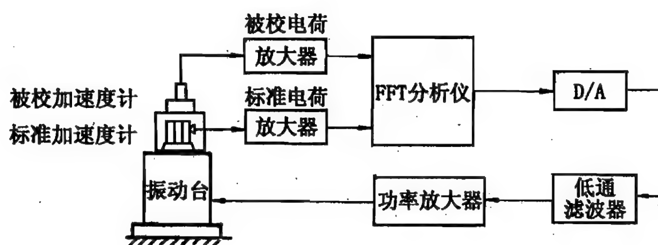


图 10－6　随机振动比较校准法框图

10.2.2 转子临界转速测试

测量转子临界转速的方法很多,各有其特点和局限性。由于发动机转子结构的复杂性,为准确测定转子的临界转速,可根据测试条件选择不同的测试方法,达到互相验证,确保测量的准确性。

10.2.2.1 振幅峰值法

根据所测转子的振幅示波曲线和进动状态来判定转子临界转速。当转子的振幅波形处在峰值区,同时转子又作正协调进动时,则该峰值区所对应的转速为临界转速(参考文献[9])。试验证明:加速和减速通过临界时,振动峰值所对应的转速有一定差别,可近似地用加、减速过临界时测出的振动峰值对应的转速平均值作为临界转速。在转子系统阻尼不大时,采用振幅峰值法测定转子临界转速较为简便易行。但在确定振幅峰值区的取值范围时,往往因阻尼、加减速过临界及转子本身机械质量等问题,影响到所测振幅的准确度而引起误差,故测量精度不高。

10.2.2.2 转子质心转向法

转子过临界时质心转向,是振动体共振前后振动相位角发生较大变化的现象。一般在实验室中,对于简单模型转子,可通过间接观察和测试的方法判断转子质心转向现象,来测定转子的临界转速。

(1) 滞后相位角法

按测量滞后相位角方法测出临界附近多个转速的滞后相位角,可发现在某一小转速范围内,滞后相位角由远小于 $\pi/2$ 转到远大于 $\pi/2$,这种现象表明了质心转向。在测得转子不平衡量方位后,在转子的测量外径轻点位置上贴一金属薄片,用涡流式或其他振幅测量仪器测量记录转子振幅。转子每转一周,金属薄片使振幅测量记录仪产生一次振幅突变的脉冲。若以金属薄片贴在转子轻点位置为例:亚临界时,转子质量中心向外,金属薄片在转子离传感器最远一点产生一个厚度突增的脉冲,以此时脉冲与质心之间相位角为零。在临界时,相位角为$\pi/2$。超临界时,相位角跃变为π,表示质心向内。相位角为 $\pi/2$ 时,所对应的转速为临界转速。图10-7为试验转子通过临界转速前、后振动波形相位角的跃变过程。

用此法测量转子临界转速,其辨别率与转子弯曲变形程度无关。但转子加速的大小对测量值有影响。加速过程,临界转速测量值偏高,反之,测量值偏低。因此在临界转速测定中,加速过程要慢些,不平衡量方位要测准,如能用相位计直接测滞后相位的跃变过程,则测定的临界转速准确性更高。

(2) 质心转向法

按测量轴表面应变的方法,利用贴在转子不平衡量方位的应变片,录下通过临界转速前后的应变波形图,由应变波形图的平均值曲线的变化可以确定质心转向现象。

若在转子轴颈外径上取 A、B、C 和 D 四点,如图 10-8 所示,在不计阻尼的情况下,当转子处在亚临界时,其质量中心 O_i 位于轴颈中心 O_j 之外侧。此时 A 点受拉力(正应变),B 点受压力(负应变),C 点和 D 点无应变,见图 10-8(a)。超临界状态时,质量中心 O_i 位于轴颈中心 O_j 之内侧,此时 A 点受压力(负应变),B 点受拉力(正应变),C 和 D 点无应变,见图 10-8(c)。临界状态时,质量中心 O_i 位于轴颈中心 O_j 与回转中心 O_b 连线的顺转速 Ω 方向 90°处,见图 10-8(b),此时,A 点、B 点为无应变的瞬时状态,其对应的转速即为临界转速。

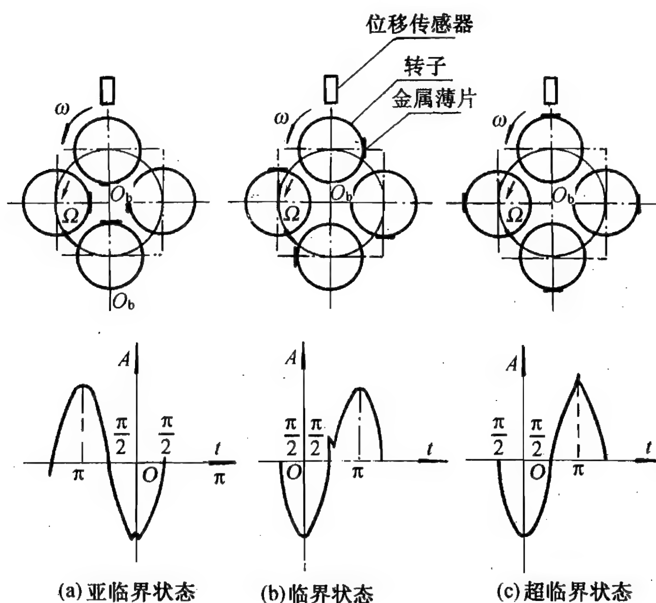


图 10-7　转子通过临界前、后振动波形相位角的跃变过程

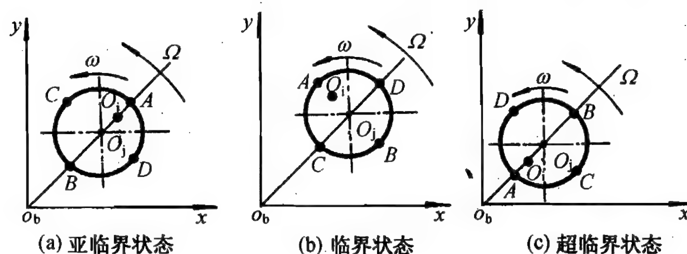


图 10-8　转子质心转向示意图

10.2.2.3　轴心轨迹法

轴心轨迹法测定转子临界转速，是通过轴上同一截面位置相互垂直方向上的挠度信号经示波器显示，并由轴心轨迹上的脉冲波（脉冲波信号由粘贴在轴表面上的金属薄片所产生）的位置变化，对照测速仪器测得的对应转速，可观察判断转子是否通过临界区及轨迹随转速的变化情况：亚临界时，轴心轨迹圆较小，圆上两尖脉冲波向外；临界时，轨迹圆最大，圆上两尖脉冲方向与轨迹圆近似相切；超临界时，轨迹圆又变小，而两尖脉冲指向圆内。如图 10-9 所示。

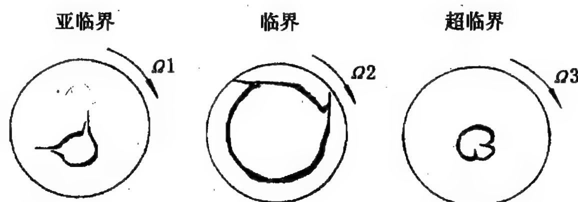


图 10-9　轴心运动轨迹图

10.2.2.4　三维转速谱图（瀑布图）分析法

利用转速跟踪测振系统测得发动机的转速、振动信号，以横坐标为频率，纵坐标为等转速间隔的振动响应功率谱，将不同转速下的响应谱曲线画在同一张图上，形成一系列三维的图

形,从而给出振动幅频特性随转速(或时间)的变化关系。由三维图中谱曲线的峰值走向和变化情况，可判断发动机的临界转速范围。若曲线峰值组成的“山脉”其振动频率与转速成正比,且在某一转速范围内出现特别明显的峰值,则表明该转速为临界转速。如图10-10所示。三维谱图不仅可判断临界转速,同时对发动机振动特性的评价和故障识别也非常有用。

10.2.3　振动量及振动特征参数的测试

在新机研制或对在役的发动机进行振动故障诊断过程中,都需通过试验测定发动机或转子-支承系统的振动量及振动特征参数。

振动量也称振动基本参数。发动机试验中振动量测试,一般指用装在压气机机匣、涡轮机匣、附件传动机匣及必要的内部或外部附加测振位置上的加速度计测量速度总量和速度谱图、位移或加速度值与谱图(参考文献[1]、[4])。为了解转子的进动轨迹和叶片、盘、轴等构件的振动应力分布及振型,还应测量轴的振动位移值及振动频率、相位、力(如应力、轴向力)等重要的振动参数。

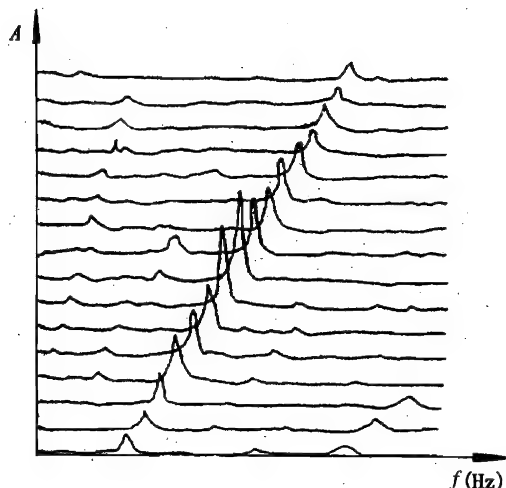


图10-10　三维谱图(瀑布图)

振动系统的特征参数包括系统的质量、刚度、阻尼、固有频率、振型、动态响应等。这些参数中,有些可以直接测量,有些需经分析仪或计算机分析后得到。对同一结构,用不同的测试方法,测出的特征参数结果可能不同。因此应对特定结构,选择适当的测试方法。

10.2.3.1　转速和振动频率的测量

(1) 用转速传感器和数字频率计测转速

电机输出轴或增速器输出轴与发动机轴的传动比是固定的,因此可用转速传感器直接测量这类轴的转速。用光电式传感器或电磁式传感器,将感受的转速信号接入数字式频率计,直接测得转速的大小。

(2) 用频谱分析仪测频

通过频谱分析仪或动态信号处理系统,对发动机复杂的振动信号进行频谱分析,可测出发动机振动信号中所包含的基频(转速振频)及谐波频率对应的幅值,绘出速度谱图或加速度谱图。这是测量发动机振动信号的主要方法。具有分析速度快、精度高、频率范围宽、操作方便等特点,获得广泛的应用。

10.2.3.2　振动幅值(位移、速度、加速度)的测量

由于发动机振动的复杂性,可以根据需要选择不同的振动测量仪器组成合适的测振系统,直接测出振动的幅值(位移、速度、加速度等)。图10-11为发动机测振系统框图。

根据发动机通用规范(参考文献[1])及型号规范的规定,常规测量中,在压气机、涡轮、附件传动机匣等必要的构件上,用加速度计及信号调节器(测振仪)等可直接测振动加速度总量或真均方根值速度总量,并绘出谱图。或按规定直接测加速度、速度或位移分量。通常分量测试选用数字式仪器(如频谱分析仪或转速跟踪测振仪)。若用带通滤波器,则带通范围一般依转速范围而定。滤波器的特性指标见10.2.1.2。测振动总量,其频率范围应在5~10000Hz。

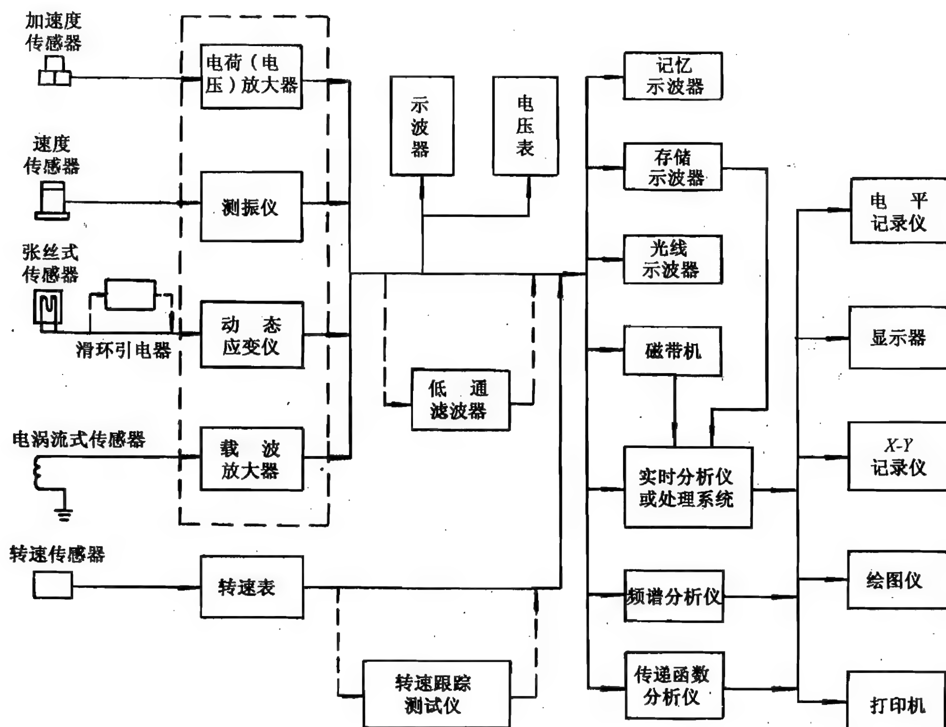


图 10-11　发动机振动测试系统框图

信号调节器中一般均含有积分和微分电路，所以典型的测振系统对位移、速度、加速度振动参数都可测量。真均方根速度值能反映振动的能量及结构的应力水平，不论发动机的尺寸、转速如何，它们的主要频率分量的振动速度峰值为同一数量级(20～70mm/s)，故便于给出一个统一的振动限制值或标准，是常规测振中较佳的选择(参考文献[4]、[10])。

用非接触型(如电涡流式)传感器，配振动仪，可直接测量轴的位移值。用电阻应变计，通过滑环引电器，配动态应变仪，可直接测量风扇、压气机、涡轮叶片及盘的振动应变值。进行振动和应力分析，获得有关构件的振动应力分布及振型。

测量振动幅值的方法很多。对不同的发动机，不同的场合(地面试验与空中飞行)，采用何种振动参数(位移、速度或加速度)，量值参数(峰值、有效值或平均值等)，测总量或分量，频响范围及测试位置等，应根据发动机规范要求，通过试验，用统计的方法分析，确定有效适用的测振方案。

10.2.3.3　振动相位的测量

(1) 用相位计测量

在低转速下测定振动信号与转速信号(直接来源于发动机转子)的相位差，以此近似确定不平衡力的初相位 Φ_0，在其他转速下，用光电传感器和位移传感器测定转速与振动信号，将这两个信号经滤波后输入相位计，测得两信号的相位差 Φ，则 $|\Phi-\Phi_0|$ 为振动信号的滞后相位角。

(2) 用示波器测量

用双踪示波器将两振动信号分别输入到 Y_1、Y_2 轴，调节 Y 轴增益，使两信号波形高度相等，调节两个 X 扫描轴，使其重合并出现稳定波形，如图 10－12，测出波形中 A、H 或 B、L，即可由下列两式之一求得相位差：

$$\Phi = \arctan\sqrt{(A/H)^2 - 1} \tag{10-13}$$

$$\Phi = \frac{B}{L}\cdot 360° \tag{10-14}$$

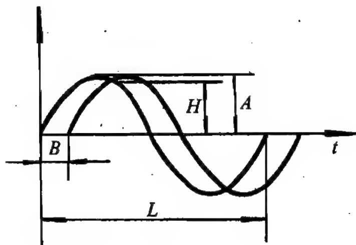


图 10－12 示波器测量相位示意图

10.2.3.4 外传力的测量

将压电晶体式力传感器装于支座与底座之间，用螺钉将支座拧紧于底座使传感器受压，将感受到的信号经放大，再由示波器记录下来，与标定信号比较可求得外传力。测试过程中，传感器的个数与位置应保证能感受支座传给底座全部的力或已知其所占比例的部分力。同时应注意传感器的质量和柔度相对支座来说要很小；采用低噪声屏蔽电缆以减小噪声干扰，才能保证测量的准确性。

10.2.3.5 固有频率测量

固有频率是振动系统的重要参数，是结构本身固有特性之一，可通过理论计算或振动测试得到。对于复杂结构，往往只能通过试验才能较精确地求得系统的固有频率。确定系统固有频率的方法很多，常用的方法有：

(1) 强迫振动法(共振法)

用激振设备对结构进行恒力幅的频率扫描激励，使结构产生强迫振动，用示波器、X—Y记录仪等测出结构频率响应最大时(共振峰)所对应的频率，即共振频率。

这种方法的特点是：设备简单，有一定精度，比较直观。但是扫描速度不能快，应待结构建立起稳态振动之后才能进行测量。另外，对每一阶共振都需要重复进行测试，因而试验周期比较长。

(2) 频谱分析法(参考文献[6])

对结构通过随机激励、瞬态激励或快速正弦扫描等激励方式激起试件振动，测得结构的振动响应信号，经传递函数分析，由图中的峰值分量来测定发动机或部件的固有频率。此法快速准确、精度高，可用于运转设备的在线测试分析，在发动机试验中获得广泛应用。利用谱分析仪中的“细化”技术，可实现对频率的精确测量。

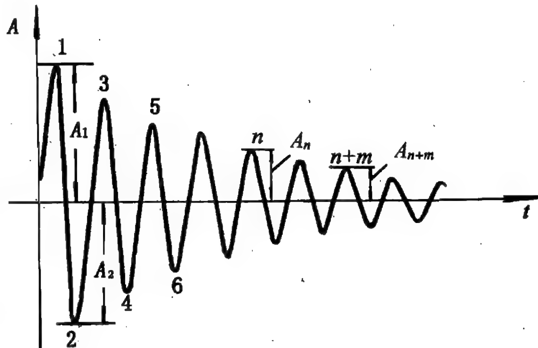


图 10－13 阻尼自由振动衰减曲线

10.2.3.6 阻尼比的测定

(1) 自由振动法

用敲击等瞬态激励的自由振动法测出结构衰减振动的响应时间历程曲线，如图 10－13 所示，用来测定阻尼参数 ξ(阻尼比)。

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \tag{10-15}$$

式中 δ 为对数衰减率。

测出第 n 个波峰幅值 A_n 和第 $n+m$ 波峰幅值 A_{n+m}，则对数衰减率 δ 为

$$\delta=\frac{1}{m}\ln\frac{A_n}{A_{n+m}} \tag{10-16}$$

当 $\xi\leqslant 0.1$ 时，

$$\xi=\frac{1}{2\pi m}\ln\frac{A_n}{A_{n+m}} \tag{10-17}$$

此法测试简单、直观，但精度差，适用于小阻尼状态。测出的振动幅值可以是位移、速度或加速度。这种方法用于近似测定结构最低阶模态的阻尼比。

(2) 频域法

利用结构共振特性。在简谐激振力作用下，使结构产生共振，改变激振频率，记录相应的振幅值，作出共振曲线(图 10-14)，由下式求出阻尼比：

$$\xi=\frac{f_2-f_1}{2f_n}=\frac{B}{2f_n} \tag{10-18}$$

式中：f_n——共振频率；

f_1、f_2——振幅为 $0.707A_0$ 时峰尖两侧(半功率点)的频率，A_0 为共振时幅值；

$B=f_2-f_1$ 称为 3dB 带宽或半功率带宽。

这种方法适用于测定结构最低若干阶模态的阻尼比。

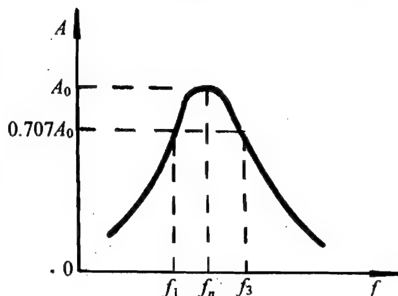


图 10-14　共振曲线图

10.2.3.7　振型的测定

(1) 谱分析法

谱分析法是发动机振动模型的非参数识别方法，应用广，效果好。用测振传感器、测振仪、频谱分析仪等仪器测出发动机各点振动响应信号的幅值谱、相位谱和互谱。由幅值谱给出每个测点的幅频特性，而互谱和相位谱可建立起各测点之间的相位关系。根据各测点的幅值及相位关系，测得各阶固有频率，确定发动机(或试件)在各阶固有频率的振型，即各阶振型。此法适用于测试大型复杂的和刚度较大的试件。缺点是非常费时。

(2) 实验模态分析法

实验模态分析是采用某种激励方法使发动机(或试验件)产生振动响应，根据激励和响应，通过具有模态分析功能的仪器或信号处理系统，建立试件的传递函数或脉冲响应函数阵，用参数识别方法识别出各阶模态参数。对于发动机等复杂结构振动系统，用模态参数表征的数学模型，比用物理参数表征的运动方程能更可靠地表征系统的振动特性。通过试验识别的模态参数准确度高，具有更大的实用价值。

模态试验系统由三个主要部分组成：激振系统、测量系统和分析系统。目前常用的激励方法有：稳态正弦激励法、瞬态激励法和随机激励法等。这些方法都是建立在测定传递函数的基础上，统称为频域法。直接从时域响应或直接从试件运行时记录的时域信号进行识别模态参数的方法称为时域法。此法还可用于在线检测及故障诊断。

一般试验步骤：利用试件对称或反对称振型的特点，选定激振点和响应点的位置，确定激振力的大小和频响范围，记录及分析系统的动态范围，并考虑频响特性及精度要求等问题。将试验测得的信号，通过分析系统的模态分析软件进行模态参数识别。识别方法很多，如实模态频域法中的分量分析法、矢量分析法、优化识别法、复模态的 Levy 法、时域法中的 ITD 法等。可根据试验对象及要求选择合适方法。通过分析，可得到试件的固有频率、模态阻尼比及模态振型。振型可动画显示，并绘图输出，图形清晰、直观。实验模态分析法精度高、速度快、使用

方便，在大型复杂的机械结构特性分析中获得广泛应用。

10.3　信号分析和实验模态分析技术

10.3.1　信号分析技术

10.3.1.1　振动信号的采集和检验

(1) 量化过程

振动信号分析广泛使用计算机，而计算机的输入是数字信号，因而需将模拟信号经过采样转换为离散时序信号，再将采样后的信号经模/数转换在幅值上进行量化，变成数字信号。

量化就是将采样点的幅值与一组离散电平值进行比较，以接近于采样点幅值的电平值来代替该幅值，并变成有限位数的二进制数字序列。这一过程称为量化过程，或简称为量化。完成量化所用的器件是模/数转换器。

量化处理，分为截尾量化处理和舍入量化处理两种。这两种方法都存在量化误差。但后者比前者的误差要小，在信号处理中的量化误差可视为白噪声，并叠加在采样信号上，称为量化噪声。增加模/数转换器的位数能减少量化误差。

(2) 采样定理

若连续信号 $x(t)$中最高频率 f_c 不超过采样频率的 1/2(即 $f_c < f_s/2$)，采样后的频谱中不会含有折叠的高频($f_c > f_s/2$ 的成分)分量。反之，如果 $f_c > f_s/2$，就会出现这种频率混淆现象，此时不可能无失真地滤出基带频谱，也就不可能无失真地用离散时间信号恢复连续信号 $x(t)$。为了使 $x(t)$不失真，采样频率必须大于等于信号中最高频率的两倍，即采样定理。实际设计中，采样频率 $f_s \geqslant 2.56f_c$。

(3) 减少频率混淆的方法

a. 提高采样频率 f_s，即减小采样时间间隔 Δt，使之满足采样定理。但 Δt 减小应适当，不能过小。因为减小 Δt，不仅会增加计算量，影响实时分析性能，而且还会使频率分辨率 Δf 下降($\Delta f = 1/(N\Delta t)$)，本法适用于不含过高频率成分的信号。

b. 基于上述采样定理中严格的规定，采样时间间隔 Δt 的上限应小于(等于)$1/(2f_c)$，以免产生频率混淆现象。产生频率混淆的关系为：

$$f = \pm f_c + kf_s \qquad (k = 1,2,\cdots) \tag{10-19}$$

对于含有过高频率成分的信号，应采用抗混淆滤波，使 $x(t)$信号通过截止频率为 f_c 的抗混淆滤波器(例如可用多阶有源 RC 伯特沃斯滤波器)，进行低通滤波，将高于 f_c 的高频成分滤掉，然后再采样。

c. 采用抗混淆滤波并提高采样频率

实际使用的抗混淆滤波器并不具有在截止频率处垂直截止的特性，不足以将稍高于截止频率的成分滤掉，因此在信号处理中通常既进行抗混淆滤波，又提高采样频率至 f_c 的若干倍。对于截止特性差的，例如 30dB/倍频程的滤波器取 $f_s = 4f_c$；截止特性好的，例如 90dB/倍频程的滤波器，取 $f_s = 2.56f_c$。

(4) 平稳性检查

适于作谱分析(概率统计分析)的随机信号应满足平稳、各态历经和高斯分布的要求。

所谓平稳性，是指信号的统计参数不随时间的推移而变化。工程上常用的检验方法有目

视检验法、统计特性计算法和轮次检验法。目视检验法有一定的主观性,方法粗糙;统计特性计算法不够严格;轮次检验法根据数理统计原理,体现由子样来推断总体的方法。

轮次检验法的具体步骤:

a. 将随机变量 $x(t)$的时间历程或采样数据等分成 N 组;

b. 计算 N 组的统计参数(例如均值或均方值、均方根值、方差、均方差等),并按时间的先后顺序排成序列 $\varphi_i^2, i=1,2,\cdots,N$;

c. 找出序列的中值 φ_0^2,应使 $N/2$ 组的 φ_i^2 大于 φ_0^2,记作"+";使 $N/2$ 组的 φ_i^2 小于 φ_0^2,记作"-";

d. 确定轮次数 r,在"+"和"-"中连续相同的一个序列定为一个轮次;

e. 设定显著水平 α(它是落在置信区外的概率),并计算 $\alpha/2, 1-\alpha/2$ 和 $n=N/2$,由轮次分布表查得轮次数的置信区数值 $r_{n,1-\alpha/2}$和 $r_{n,\alpha/2}$;

f. 若轮次数 r 在轮次数的置信区,即 $r_{n,1-\alpha/2}<r<r_{n,\alpha/2}$,则认为该时间历程或数据是平稳的,否则是不平稳的。

(5) 周期性检验

检验随机信号中是否含有周期信号成分,或周期信号中是否混入随机信号,必须进行周期性检验或随机检验。功率谱图形、概率密度图形或自相关图形可用来定性检验,但要求分析人员有一定的实践经验。因此常用方差定量检验法,其步骤如下:

a. 将采样记录等分成 k 段($k<0.1BT_a$);

b. 计算各段记录的功率谱密度 $\hat{G}_i$ 的估计值;

c. 计算方差

$$\hat{\varepsilon}^2=\frac{1}{k-1}\left[\frac{k\sum_{i=1}^{k}\hat{G}_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{k}\hat{G}_i\right)^2}-1\right] \tag{10-20}$$

d. 计算 $\varepsilon^2=1/BT_a$

(B——分析带宽,T_a——计算功率谱密度值的平均时间区间)

e. 计算 $\hat{\varepsilon}^2/\varepsilon^2$

如果 $\hat{\varepsilon}^2/\varepsilon^2<<1$,说明已知信号中有较强的周期成分;

如果 $\hat{\varepsilon}^2/\varepsilon^2>1$,说明已知信号是非平稳的随机信号。

(6) 正态性检验

它用来检验平稳随机振动是否满足高斯分布。正态性检验有概率分布密度函数检验法和卡埃平方拟合优度检验法。概率密度函数检验法不够精确。如果要求精确,则应用卡埃平方拟合优度检验法。

等区间宽度卡埃平方拟合优度检验法步骤如下:

a. 将 N 个采样值等分成为 K 个区间组

$$K=1.87(N-1)^{0.4} \tag{10-21}$$

当 $N=20$ 时,取 $K=8$;

$N=50$ 时,取 $K=9$;

$N=100$ 时,取 $K=12$。

b. 计算落在各区间中的频数 f_i,则

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = N$$

c.　算出采样值的均值 $\bar{x}$ 及均方根误差 σ

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 / N} \tag{10-22}$$

d.　根据 σ 和 x_i 查正态分布概率分布表,计算各组的应用概率 p_i(理论值)。

e.　算出各组中的理论频数 F_i

$$F_i = p_i N \quad (\text{如 } F_i < 5,\text{则并入另组处理})$$

f.　计算标准化平方偏差之和,即

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i} \tag{10-23}$$

式中$(f_i - F_i)$为该区间中的实际观察频数与理论频数的偏差。

g.　设定显著水平 α 值,由卡埃平方分布表查出 $\chi^2_{n.\alpha}$的值,其中 $n = K - 3$。若计算的 $\chi^2 \leqslant \chi^2_{n.\alpha}$,则满足高斯分布;$\chi^2 > \chi^2_{n.\alpha}$,则不满足高斯分布。

10.3.1.2　离散傅里叶变换与快速傅里叶变换

傅里叶变换在振动数据处理中是一种重要的基本运算。它能很方便地将时域信号转变为频域的频谱。而且具有快速、精确的优点。当今高分辨率、高信噪比实时分析仪被广泛地应用于各个领域。

傅里叶变换的基础是傅里叶级数。任何周期函数 $x(t)$都可展开为傅氏级数

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_i t} \tag{10-24}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_i t} dt \tag{10-25}$$

式中:C_n——各次谐波系数;

α_0——直流分量;

n——谐波次数;

ω_i—— 基波角频率。

而 $x(t)$的傅氏变换为

$$F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{10-26}$$

傅氏级数是将时域数据分解为无穷多次离散的谐波,而傅氏变换是将时域数据转换为无穷多个连续的谐波。

(1) 有限化处理

在处理实际工程问题时因受到微机内存的限制,样本的采样点数是有限的,这就要对时域信号进行有限化处理。有限化处理就是将信号在某一时刻截断。截断函数是长度等于截断时间 T,高度等于 1 的矩形窗函数。

矩形窗函数 $\omega(t)$的数学表达式为

$$\omega(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \tag{10-27}$$

而 $\omega(t)$的傅氏变换频谱为

$$W(f)=\frac{\sin\pi f T}{\pi f} \tag{10-28}$$

用矩形窗函数截断信号 $x(t)$,等于 $x(t)$乘以该截断函数,而截断后的频谱等于原信号应有的频谱与矩形窗函数频谱的卷积。矩形窗应用普遍,其优点是主瓣比较集中;缺点是旁瓣较高并有负旁瓣,导致在变换中带进了高频干扰和泄漏。

(2) 泄漏

时域数据被截断的结果,使能量不能按原有频率集中,一部分能量以主瓣展宽的形式向原来频率附近分散,还有一部分能量分散到整个频域,从而引起能量泄漏。能量泄漏必然引起频谱测量的误差。矩形窗截断引起的频谱幅值最大误差可达 21%。

(3) 窗处理

为减弱或消除泄漏所引起的误差,用各种窗函数加以补偿。加窗函数的目的是展宽频域的主瓣而削弱旁瓣。

a. 汉宁窗

汉宁(Hanning)窗是常用的一种窗函数,时域表达式为

$$\omega_{HN}(t)=\begin{cases}0.5+0.5\cos\dfrac{2\pi t}{T} & |t|\leqslant T/2\\ 0 & |t|>T/2\end{cases} \tag{10-29}$$

汉宁窗的频谱是由三个矩形窗叠加而成的,其表达式为

$$\begin{aligned}W_{HN}(f)&=0.5W(f)+0.25W(f-\frac{1}{T})+0.25W(f+\frac{1}{T})\\&=\frac{\sin\pi ft}{2\pi f}\cdot\frac{1}{1-(fT)^2}\end{aligned} \tag{10-30}$$

汉宁窗的倍频程衰减可达 18dB,主瓣展宽 $2\Delta f$,多用于处理宽带随机信号。

b. 汉明窗

汉明(Hamming)窗的时域表达式为

$$\omega_{HM}(t)=\begin{cases}0.54+0.46\cos\dfrac{2\pi t}{T} & |t|\leqslant T/2\\ 0 & |t|>T/2\end{cases} \tag{10-31}$$

其频谱表达式为

$$W_{HM}(f)=0.54W(f)+0.23W(f-\frac{1}{T})+0.23W(f+\frac{1}{T}) \tag{10-32}$$

汉明窗的倍频程衰减可达 40dB。

c. 指数窗

指数窗的时域表达式为

$$\omega_e(t)=e^{-pt} \tag{10-33}$$

其频谱表达式为

$$W_e(f)=\frac{p}{p^2+4\pi^2f^2}-j\frac{2\pi f}{p^2+4\pi^2f^2} \tag{10-34}$$

其中 p 为指数窗的衰减率。

信号经指数窗处理后,相当于增大系统的阻尼。在识别的参数中,要扣除加窗的影响。

(4) 离散傅里叶变换

$x(t)$的傅里叶变换式以 $X(f)$表示:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{10-35}$$

$x(t)$被离散采样后，t 以 $k\Delta t$ 表示($k=0,1,2,\cdots,N-1$)，f 以 $r\Delta f$ 表示($r=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$)，$\mathrm{d}t$ 以 Δt 表示，$\mathrm{d}f$ 以 Δf 表示，并令

$$X_r=X(r\Delta f)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k\Delta t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\pi rk/N} \tag{10-36}$$

$$x_k=x(k\Delta t)$$

$$W=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$$

则 $x(t)$ 的有限离散傅里叶变换式

$$X_r=\sum_{k=0}^{N-1}x_kW^{rk} \tag{10-37}$$

应该指出，W^{rk}具有周期性，并以 W^N 为周期。

离散傅里叶变换式可用矩阵表示，当 $N=4$ 时：

$$\begin{Bmatrix}X_0\\X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^1&W^2&W^3\\W^0&W^2&W^4&W^6\\W^0&W^3&W^6&W^9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} \tag{10-38}$$

(5) 快速傅里叶变换(FFT)

FFT是离散傅氏变换的快速算法。在此基础上，采用先进的集成电路和FFT芯片，以提高运算速度。

10.3.1.3　振动信号的分析与处理

经过A/D采样、抗混淆滤波及预处理后的离散数据，还需用各种数据处理方法，才能得到所需要的振动特性参数，例如，随机振动分析要求的统计参数、相关函数和谱函数等。

(1) 均值

对于离散数据序列 $x_i(i=1,2\cdots,N)$，其平均值为

$$\mu_x=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i \tag{10-39}$$

(2) 方差

离散数据序列 x_i 的方差为

$$S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_i)^2 \tag{10-40}$$

当 N 特别大时

$$S^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_i)^2 \tag{10-41}$$

为防止溢出，提高计算精度，应用递推公式计算方差：

$$S^2=\frac{i-1}{i}S_{i-1}^2+\frac{i-1}{i^2}(x_i-\mu_{x,i-1})^2 \tag{10-42}$$

(3) 均方值

离散数据序列 x_i 的均方值 φ_x^2 的表达式为

$$\varphi_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \tag{10-43}$$

显然，均方值既反映了数据序列的重心，又反映了数据序列的分散程度。

(4) 概率密度函数

一组经零均值处理的平稳数据 x_i，在给定的一个窄区间内出现 $x(t)$ 的概率密度可用下式估计：

$$P(x) = \frac{N_x}{NW} \tag{10-44}$$

式中：W—— 中心为 x 的窄区间的宽度；

N_x—— 在给定区间出现数据的个数；

N—— 数据序列总个数，即数据块容量。

(5) 自相关函数

自相关函数的数学表达式为

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{10-45}$$

自相关函数也可用离散数据表示

$$R_r = R_x(r\Delta t) = \frac{1}{N-r}\sum_{i=0}^{N-1-r} x_i x_{i+r} \quad (r = 0,1,2,\cdots,m; m < N) \tag{10-46}$$

式中：$x(t) = x(i\Delta t), (i = 0,1,2,\cdots,N-1)$；

$\tau = r\Delta t$；

$T = (N-1-r)\Delta t$。

r 每改变一个值，要计算一组乘法并求和，计算量较大。自相关函数也可通过 FFT 算出自功率谱密度函数，再作傅氏变换而获得，这样计算更为快捷。

(6) 互相关函数

原函数 $y(t)$ 对于原函数 $x(t)$ 的互相关函数表达式为

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{10-47}$$

互相关函数也可用离散数据 x_i 和 $y_i(i = 0,1,2\cdots,N-1)$ 来表达：

$$R_{xy}(r\Delta t) = \frac{1}{N-r}\sum_{i=0}^{N-1-r} x_i y_{i+r} \qquad (r = 0,1,2\cdots,m; m < N) \tag{10-48}$$

或

$$R_{yx}(r\Delta t) = \frac{1}{N-r}\sum_{i=0}^{N-1-r} y_i x_{i+r} \qquad (r = 0,1,2\cdots,m; m < N) \tag{10-49}$$

同样，互相关函数可通过 FFT 求出互功率谱密度函数，再作傅氏逆变换而得到。

(7) 自功率谱函数

由于功率谱是相关函数的傅氏变换，因此自功率谱函数的表达式为：

$$S_x = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau \tag{10-50}$$

式中：$R_x(\tau)$——$x(t)$ 的自相关函数；

τ—— 相关函数的自变数时延。

若不计虚部，

$$S_x = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\cos(2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau \tag{10-51}$$

经离散化有限域处理后

$$S_x = 2\int_0^{\tau_N} r_x(\tau)\cos(2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau \tag{10-52}$$

式中：τ_N——τ 的最大值。

自功率谱函数的离散表达式(不计虚部)为

$$\tilde{S}_x = 2\left[R_0 + \sum_{r=1}^{N-1} R_r\cos\frac{\pi rf}{f_c} + R_N\cos\frac{\pi Nf}{f_c}\right]\cdot\Delta t \tag{10-53}$$

式中：Δt——采样的时间间隔；

R_0——时延为零的自相关函数；

R_r——时延为 $r\Delta t$ 的相关函数值；

R_N——最大时延的相关函数值；

f_c——截止频率。

(8) 互功率谱函数

$$S_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau \tag{10-54}$$

式中：$R_{xy}(\tau)$——$y(t)$ 对于 $x(t)$ 的互相关函数。

不计虚部的 S_{xy} 表达式为

$$S_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}\cos(2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau \tag{10-55}$$

S_{xy} 的离散表达式为

$$\tilde{S}_{xy} = 2\left[R_{xy0} + \sum_{r=1}^{N-1} R_{xyr}\cos\frac{\pi rf}{f_c} + R_{xyN}\cos\frac{\pi Nf}{f_c}\right]\cdot\Delta t \tag{10-56}$$

(9) 频响函数

对于一个常系数线性系统，频响函数的表达式为

$$H(f) = |H(f)|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(f)} \tag{10-57}$$

式中：$|H(f)|$——系统增益因子，当输入为力 $F(t)$，输出为位移 $x(t)$ 时，

$$|H(f)| = \left[\frac{S_x(f)}{S_F(f)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

式中：$S_F(f)$——力的自功率谱；

$S_x(f)$——位移的自功率谱；

$\varphi(f)$——系统的相位因子。

系统的增益因子和相位因子可由下式求得：

$$|\hat{H}(f)| = \frac{|\hat{S}_{Fx}(f)|}{\hat{S}_F(f)} = \frac{C_{Fx}^2(f) + Q_{Fx}^2(f)}{\hat{S}_F(f)} \tag{10-58}$$

$$\hat{\varphi} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{Q_{Fx}(f)}{C_{Fx}(f)} \tag{10-59}$$

式中：$S_{Fx}(f)$——输出对于输入的互谱；

$C_{Fx}(f)$——实部；

$Q_{Fx}(f)$——虚部。

(10) 相干函数

相干函数又称凝聚函数，其定义如下式：

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{\tilde{S}_y(f)}{S_y(f)} \tag{10-60}$$

中：$\tilde{S}_y(f)$—— 理想常系数线性系统输出的自功率谱为

$$\tilde{S}_y(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_x(f)} \tag{10-61}$$

$S_y(f)$—— 混入噪声后的实际输出自功率谱。

$\tilde{S}_y(f)$ 代入式(10 - 60) 得

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_x(f)S_y(f)} \tag{10-62}$$

显然，相干函数可由输入谱 $S_x(f)$、输出谱 $S_y(f)$ 和输出对于输入的互谱求出。相干函数的围是：$0 \leqslant \gamma_{xy}^2(f) \leqslant 1$。当 $y(t)$ 和 $x(t)$ 完全满足线性关系时，$\gamma_{xy}^2(f) = 1$；当 $y(t)$ 和 $x(t)$ 不关时，$\gamma_{xy}^2(f) = 0$。

(11) 功率倒频谱

功率倒频谱定义为功率谱函数的对数功率谱。

若函数 $x(t)$ 的自功率谱为

$$S_x(f) = \frac{2}{T}|X(f)|^2 = \frac{2}{T}|F\{x(t)\}|^2 \tag{10-63}$$

中 $X(f)$ 和 $F\{x(t)\}$是函数 $x(t)$ 傅里叶变换。则功率倒频谱的表达式为

$$C_x(\tau) = \frac{2}{T}|F\{\lg[S_x(f)]\}|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\lg S_x(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}f\right|^2 \tag{10-64}$$

中：τ—— 倒频率，具有时间量纲(s 或 ms)。

功率倒频谱常用于齿轮系统的振动和噪声分析，它能分离转轴二次以上谐波调制而引起大量“边频”，容易找出主要调制频率成分，从而对故障作出准确的诊断。

(12) 细化

频谱分析的频率分辨率Δf取决于采样点数N和采样频率$\frac{1}{\Delta t} = f_s$。由于采样点数不能任意大，通常以 4096 为限。当 f_s 很大时，Δf 亦很大，不能满足分析的要求。细化技术又称为选带里叶分析(BSFA) 技术或图像电子放大(ZOOM) 技术。它能提高感兴趣频段的分辨率。通常用相位补偿法进行细化处理。

欲作 $D \cdot N$ 个样本序列的 FFT，只需作 D 次N 点的 FFT，然后进行相应的相位补偿，即可得细化 D 倍的频谱。

0.3.2　实验模态分析技术

.3.2.1　模态分析理论

(1) 实模态

N 个自由度的线性系统，其运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \tag{10-65}$$

中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$ 分别为系统的质量、阻尼及刚度矩阵。对线性系统而言，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{C}$ 均是实系数对正定矩阵(当小阻尼或比例阻尼时)。$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{x}$ 分别为激励力矢量和响应(位移) 矢量。

用模态坐标来替代物理坐标，令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{q}$，经坐标变换使运动微分方程在 N 维空间解耦，变

成 N 个独立的方程：

$$\left(\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & K_i & \\ & & \ddots\end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & M_i & \\ & & \ddots\end{bmatrix} + \mathrm{j}\omega\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & C_i & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}_i \tag{10-66}$$

式中：$\boldsymbol{\varphi}$—— 模态振型矩阵，$\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1\varphi_2\cdots\cdots\varphi_N]$；

$\boldsymbol{\varphi}_i$—— 各阶振型系数列阵，它表示各阶模态振型；

模态刚度 $K_i = \boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i$；

模态质量 $M_i = \boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i$；

模态阻尼 $C_i = \boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varphi}_i$；

模态力 $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$；

模态坐标 $\boldsymbol{q}$ 。

当阻尼较小或为比例阻尼时，阻尼矩阵可通过坐标变换为对角阵。模态矩阵为实数矩阵而振型为实数列向量。模态参数为实数，频响函数可按实模态展开。若 P 点激励，L 点测试，则频响函数表达式为

$$H_{LP}(\omega) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi_{Li}\varphi_{Pi}}{k_i - m_i\omega^2 + \mathrm{j}\omega c_i} \tag{10-67}$$

以速度导纳和加速度导纳表示的频响函数以下两式表达：

$$\begin{cases} H_{LP}(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{j}\omega\varphi_{Li}\varphi_{Pi}}{k_i - m_i\omega^2 + \mathrm{j}\omega c_i} \\ H_{LP}(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{-\omega^2\varphi_{Li}\varphi_{Pi}}{k_i - m_i\omega^2 + \mathrm{j}\omega c_i}\end{cases} \tag{10-68}$$

(2) 复模态

经离散处理的实际结构在外力作用下的运动微分方程作 LAPLACE 变换后成为

$$(\boldsymbol{M}s^2 + \boldsymbol{C}s + \boldsymbol{K})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{F}(s) \tag{10-69}$$

即

$$\boldsymbol{Z}(s)\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{F}(s) \tag{10-70}$$

式中：$\boldsymbol{Z}(s) = \boldsymbol{M}s^2 + \boldsymbol{C}s + \boldsymbol{K}$—— 阻抗矩阵；

$\boldsymbol{X}(s)$—— 振动位移的 LAPLACE 变换；

$\boldsymbol{F}(s)$—— 外力的 LAPLACE 变换；

s—— LAPLACE 变量。

传递函数(或频响函数) 矩阵是阻抗矩阵的逆矩阵

$$\boldsymbol{H}(s) = \boldsymbol{Z}(s)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}[\boldsymbol{Z}(s)]}{\det[\boldsymbol{Z}(s)]} \tag{10-71}$$

式中：adj$[\boldsymbol{Z}(s)]$ 是 $\boldsymbol{Z}(s)$ 的伴随矩阵，可展开成 s 的$(2N-2)$ 次多项式；

det$[\boldsymbol{Z}(s)]$ 是 $\boldsymbol{Z}(s)$ 的行列式，可展开为 $2N$ 次多项式。

P 点激励，L 点测试的频响函数：

$$H_{LP}(s) = \frac{\sum_{i=0}^{2N-2}a_i s_i}{\sum_{i=0}^{2N}b_i s_i} = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{10-72}$$

式中：a_i 和 b_i—— 待定的实系数；

N—— 模态阶数；

s_i—— 传递函数的极点。

在结构各阶模态阻尼小于临界模态阻尼的情况下，$D(s)$ 有重根，并以共轭对出现，上式按 s_i 和 s_i^* 展开得到

$$H_{LP}(s) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{A_{LPi}}{s - s_i} + \frac{A_{LPi}^*}{s - s_i^*}\right) \tag{10-73}$$

式中：A_{LPi} 和 A_{LPi}^*—— 传递函数的留数；

s_i 和 s_i^* —— 振动系统的复频率，它是固有频率的函数。

$$\begin{cases} s_i = -\xi_i\omega_i + \mathrm{j}\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2} \\ s_i^* = -\xi_i\omega_i - \mathrm{j}\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2} \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{10-74}$$

式中：ξ_i—— 结构的模态阻尼比，$\xi_i = \sigma_i/\omega_i$；

σ_i—— 结构的模态阻尼系数。

结构振型与留数的关系如下：

$$\frac{\varphi_{Li}\varphi_{Pi}}{m_i} = 2(u_i s_i + u_i\xi_i\omega_i - v_i\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}) \tag{10-75}$$

式中：φ_{Li}—— 测试点 L 的振型值；

φ_{Pi}—— 激励点 P 的振型值；

m_i—— 模态质量；

u_i 和 v_i—— 留数的实部和虚部。

$$\begin{cases} A_i = u_i + \mathrm{j}v_i \\ A_i^* = u_i - \mathrm{j}v_i \end{cases} \tag{10-76}$$

10.3.2.2　频响函数的测试技术

模态分析方法是一种实验与理论分析相结合的方法，通过实验得到试件各点的频响函数，为模态参数的识别提供可靠的数据。实验技术是模态分析的关键，实验技术包括激励、测试和分析三个主要环节。

(1) 稳态正弦激励

包括单点激励和多点激励。

单点正弦激励是使用一个激振器对试件的某个激振点施加一个稳定的单一频率的正弦激励，在试件的几个不同位置布置响应信号测量点（单点激励、多点测量）。测取激振点的力信号和测量点的响应信号，同时输入信号分析仪，进行频响函数运算，并给出频响函数的幅值、相位，或实部和虚部。然后改变激励频率，重复进行实验，直到激完所要求的频带。

单点正弦激励的特点是能量集中、精度高、能检测系统的非线性影响；其缺点是只能一个频率一个频率地进行测试，测试时间长、成本高。

多点正弦激励。多点不相关或全相关地正弦慢扫描，使激振力的分布规律与该阶模态的惯性力分布规律相同，在理论上可得到纯模态。事实上，用安装位置恰当的有限个激振器，仔细调节激振力的分布，可激起近似的纯模态，并达到一定的精度。在安排激振器前，必须对试件结构的振型有粗略的了解。

激振器的分布应远离节线区；激发对称模态时，激振器应对称分布；试件每个部分或者振

幅大的区域都应布置激振器，试件结构在激振点处应有足够的局部刚度。

传感器的布置应能反映试件振型的特性；每个激振点处应安装一个控制传感器；激起对称振型时，传感器应布置在对称轴的一侧；在传感器安装处，试件结构应有一定的刚度，以防止局部共振，安装传感器对试件振动特性附加的影响应最小。

纯模态的多点正弦激励既复杂又费时，主要表现在激励力的调节上，通常以模态纯度因子 $C_k \leqslant 0.1$ 作为激励力调节的指标。

(2) 瞬态激励测试技术

瞬态激励是对试件施加瞬态力，同时激励起多阶模态，它属于宽频带激励，快速测试技术。锤击法的设备简单，是优先采用的方法。

锤击法是用带力传感器的手锤或摆锤敲击试件，以施加脉冲力。用加速度计或位移传感器测量试件的响应。力信号和响应信号同时输入动态分析仪，以获得频响函数。

锤击法视试件的大小，可进行单点敲击多点测量，以获得响应函数的某一列；也可以进行多点敲击单点测量，以获得频响函数的某一行。对小型试件，为减小传感器质量引起的附加影响，应采用多点敲击单点测试方案；对大试件，采用单点敲击多点测试方案也是允许的。锤击法提供的激振能量不大，不适用于大型复杂结构。

为了得到不同的脉冲宽度，可换用不同材料的锤头，锤头材质越软，其脉冲频谱越窄，反之锤头材质越硬，脉冲频谱越宽。手锤或摆锤的质量(包括锤头、力传感器及附加配重质量）应视试件适当选择，质量太小时能量不够，质量太大时灵敏度太低。

(3) 随机激励测试技术

用随机信号发生器作为激励源，并通过功率放大器、激振器传输给试件，以实现随机激励。随机激励可分为纯随机、伪随机和周期随机三种激励。

纯随机激励，其信号在整个时间历程内都是随机的。纯随机激励的能量在很宽的频带内，时域信号无周期性，信号处理时有非周期成分所引起的能量泄漏。

伪随机激励，其信号具有一定的周期性，在一个周期内信号是随机的。如果伪随机激励的周期和采样的周期同步，则在时间窗内激励与响应信号呈周期性，不会引起能量泄漏。伪随机测试法由于每次使用同一激励信号，不能用多次平均法减小非线性的影响，抗干扰能力差。

周期随机综合了纯随机和伪随机的优点，又避免了它们的缺点。周期随机是一种不连续的伪随机信号。既消除了信号中非周期成分的能量泄漏，又可借用总体平均消除噪声干扰和非线性畸变。

随机激励在时域参数识别中应用广泛。

10.3.2.3 模态参数识别

目前模态参数识别的方法很多，按模态性质可分为实模态和复模态参数识别，按数据处理方式可分为图解识别和计算机识别法。

(1) 实模态识别法

a. 幅频特性法

其基本思想是，当激励频率在某阶固有频率附近时，该阶模态导纳起主导作用，其余各阶模态导纳的贡献忽略不计，即

$$H_{LP}(\omega) \approx H_{LPr}(\omega) \tag{10-77}$$

利用一个单自由度系统的幅频特性和相频特性来确定系统的模态参数。由幅频曲线 $|H_{LP}(\omega)|$ 的第 r 个峰值位置可确定 r 阶固有频率 ω_r，由 ω_r 两侧半功率带宽确定模态阻尼比

$\zeta_r = \Delta\omega/2\omega$，$r$ 阶模态刚度 $K_r = 1/(2\zeta|H_{LP}(\omega_r)|)$，$r$ 阶振型为

$$\boldsymbol{\varphi}_r = \begin{Bmatrix} \varphi_{1r} \\ \varphi_{2r} \\ \vdots \\ \varphi_{Lr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} |H_{1P}(\omega_r)| \\ |H_{2P}(\omega_r)| \\ \vdots \\ |H_{LP}(\omega_r)| \end{Bmatrix} \tag{10-78}$$

实模态理论已证明，振型是实矢量，其各分量都是实数，但是幅值有差别，相位仅有同相和反相之分。

幅频特性法仅适用于模态离散及阻尼很小的系统，识别精度低，可用于模态估计。

b. 分量法

分量法是利用频响函数的实部和虚部进行模态参数识别的一种方法，它突出主导模态，并考虑其余模态的影响。

虚频特性曲线的峰值频率即是系统的固有频率 ω_r。

模态阻尼比由实频特性曲线的正负峰值对应的差来识别

$$\zeta_r = (\omega_b - \omega_a)/(2\omega_r) \tag{10-79}$$

各阶模态刚度（令 $\varphi_{Pr} = 1$）

$$K_r = -1/(2\zeta_r H_{PP}^{I}(\omega_r)) \quad (r = 1,2,\cdots,N) \tag{10-80}$$

式中：$H_{PP}^{I}(\omega_r)$ 是频响函数虚频特性矩阵表达式中的原点导纳元素。

模态振型为某阶固有频率的各虚频特性曲线峰值点的连线，即

$$\boldsymbol{\varphi}_r = [H_{1P}^{I}(\omega_r) H_{2P}^{I}(\omega_r) \cdots H_{LP}^{I}(\omega_r)]^{T} \tag{10-81}$$

模态质量

$$m_r = k_r/\omega_r^2 \quad (r = 1,2,\cdots N) \tag{10-82}$$

分量法对模态离散、阻尼较小的系统有足够的精度；但对模态密集的系统，模态阻尼比、刚度和振型的识别误差较大。

c. 导纳圆法

在模态密度不高时，该法具有较高的估计精度，能满足工程精度要求。多自由度系统计及相邻模态影响时，导纳圆的方程为

$$[H_{LP}^{R}(\omega) - H_c^{R}]^2 + \left[H_{LP}^{I}(\omega) - H_c^{I} + \frac{(D_{LP})_r}{2g_r}\right]^2 = \left[\frac{(D_{LP})_r}{2g_r}\right]^2 \tag{10-83}$$

固有频率是在第 r 个导纳圆弧上，单位频率差对应最大圆弧长的点代表该阶固有频率。

r 阶模态结构阻尼系数

$$g_r = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_r^2} \cdot \frac{1}{\tan\frac{\alpha_1}{2} + \tan\frac{\alpha_2}{2}} \tag{10-84}$$

式中：ω_r——r 阶模态固有频率；

ω_1、ω_2——r 阶模态相邻频率；

α_1、α_2——相邻频率的圆心角。

模态刚度——量得原点导纳圆半径 $(R_{PP})_r$，并令 $\varphi_{Pr} = 1$，得到模态刚度

$$K_r = \frac{1}{2g_r(R_{PP})_r} \tag{10-85}$$

模态振型

$$\varphi_r = [\pm(R_{1P})_r \quad \pm(R_{2P})_r \quad \cdots \quad \pm(R_{LP})_r]^{\mathrm{T}} \tag{10-86}$$

上述三种识别法均属图解识别法，其识别精度不够高。对于复杂的结构，模态耦合较强，模态间相互影响较强，建立在主模态基础上的图解识别法的误差较大。

下面介绍一种计算机识别法。这是近代发展起来的参数识别方法，不仅可以计算某一阶模态，而且可同时计算各阶模态，充分考虑其相邻模态的耦合效应。

d. 迭代法

这是一种较好的模态识别法，已应用于实际工作中。其计算步骤如下：

① 输入固有频率和阻尼比 ζ 的初始值，而且对 ζ 初始值有一定的精度要求，否则迭代的收敛性较差，最好由上述图解识别法获得。

② 形成频响函数的实部和虚部系数矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{R}_{N\times M} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1M} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \cdots & R_{NM} \end{bmatrix} \tag{10-87}$$

$$\boldsymbol{I}_{N\times M} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \cdots & I_{1M} \\ I_{21} & I_{22} & \cdots & I_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{N1} & I_{N2} & \cdots & I_{NM} \end{bmatrix} \tag{10-}$$

③ 矩阵乘法运算，包括：

$$\boldsymbol{RR}^{\mathrm{T}};\boldsymbol{II}^{\mathrm{T}};\boldsymbol{R\bar{H}}_R;\boldsymbol{I\bar{H}}_r$$

④ 解方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{RR}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R\bar{H}}_R \\ \boldsymbol{II}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{I\bar{H}}_r \end{cases} \tag{10-89}$$

⑤ 求模态柔度 $(D_{LP})_r$ 和阻尼比 ζ_r

由 $\boldsymbol{X}$ 中得到 P 点激励和 L 点测试的各阶模态柔度 $(D_{LP})_r$，$(r = 1,2,\cdots,N)$；

由 $\boldsymbol{Y}$ 中得到系统阻尼比 ζ_r。

⑥ 检查 ζ_r 的精度

如果 ζ_r 的精度不满足要求，将其代入系数矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 中，重复计算，直到满足精度要求为止。

⑦ 输出模态参数。

(2) 复模态参数识别 LEVY 法

在结构上 P 点激励 L 点测试时，其频响函数以有理式表达为

$$H_{LP}(\mathrm{j}\omega) = \frac{N(\mathrm{j}\omega)}{D(\mathrm{j}\omega)} = \frac{\alpha + \mathrm{j}\omega\beta}{\sigma + \mathrm{j}\omega\tau} \tag{10-90}$$

式中：$\alpha = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \cdots$；

$\beta = a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \cdots$；

$\sigma = 1 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \cdots$；

$\tau = b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 - \cdots$；

α_i 和 b_i 为待求系数。

利用多元函数求极值的方法，使各频响函数的总方差为最小，可得到以待求系数为变量的 $(4N-1)$ 个联立线性方程组，其表达式为

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \tag{10-91}$$

式中：$\boldsymbol{X} = [a_0 \quad a_1 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_{2n-2} \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{2n}]^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中的元素为 $\omega_j, \bar{R}_j, \bar{I}_j$，$(j = 1,2,\cdots,m)$ 所表示的已知数。解此式，可得到各待求系数，并可进行模态参数识别。

由 $D(\mathrm{j}\omega) = 0$ 可求得系统的极点，即各阶特征根：

$$\begin{cases} s_i = -\alpha_i + \mathrm{j}\beta_i = -\zeta_i\omega_i + \mathrm{j}\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2} \\ s_i^* = -\alpha_i - \mathrm{j}\beta_i = -\zeta_i\omega_i - \mathrm{j}\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2} \end{cases} \tag{10-92}$$

固有频率

$$\omega_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \tag{10-93}$$

阻尼比

$$\zeta_i = \alpha_i/\omega_i \tag{10-94}$$

复模态振型

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \begin{Bmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{1Pi} \\ A_{2Pi} \\ \vdots \\ A_{nPi} \end{Bmatrix} \tag{10-95}$$

复模态刚度 $K_i = S_i(\because m_i = 1)$

复模态质量，根据原点导纳来确定：

$$\begin{aligned} H_{PP}(s) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A_{PPi}}{s-s_i} + \frac{A_{PPi}^*}{s-s_i^*}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\varphi_{Pi}\varphi_{Pi}}{m_i(s-s_i)} + \frac{\varphi_{Pi}^*\varphi_{Pi}^*}{m_i(s-s_i^*)}\right] \end{aligned} \tag{10-96}$$

10.4　整机振动故障类型和特征

10.4.1　局部共振

局部共振是指某些结构受到激振力的作用时，当激振力的频率与该结构的固有频率相等而引起的共振。发动机型号规范要求对某些关键件，如叶片、轮盘、机匣和导管等，进行固有频率测量。在发动机运转过程中，某些结构可能产生局部共振。诸如机匣共振、支板共振等，往往导致整机振动故障。排除共振的通常作法是，改变结构的刚度和外阻尼，必要时也可改变激振频率。

10.4.2　转子不平衡

由于材质不均匀、结构不对称、加工误差以及装配误差致使转子质量偏心较大。即使经过动平衡的转子，由于平衡转速低，平衡精度差，工作转速远高于平衡转速，工作环境不同，在转子运转中仍然存在较大的不平衡量。存在较大质量偏心的转子，在运转过程中产生的离心力将激起其自身的振动。这是旋转机械最常见的故障。

转子静弯曲、转子热弯曲、转子对中不良或旋转件飞出等情况，均会产生较大的不平衡振

动。不平衡振动的特征：

(1) 在亚临界区运转的刚性转子，其振动幅值随转速增高而增加，随转速降低而减小；

(2) 在频谱图上基频峰值显著高于其分频和倍频峰值。

由于不平衡造成振动较大的转子，通常需拆下转子重新平衡，或者在有条件时采用本机平衡加以排除。

10.4.3 转子不对中

转子在装配过程中经常出现不对中偏差。轴不对中偏差是由于相邻轴承座不同心而导致轴中心线偏斜所引起。轴不对中偏差可能出现三种情况：平行度偏差，角度偏差及同时存在平行度和角度偏差。对中不良的转子运转将导致轴承负荷不均衡，使发动机振动加剧，关键件过早失效。

转子不对中偏差引起的振动特征：

(1) 转子轴向振动增大，并大于0.5倍径向振动值；

(2) 从振动信号的频谱图上可观察到转速二倍频或三倍频峰值高于基频峰值的典型现象。

10.4.4 轴承座连接松动

轴承座的连接螺栓松动或个别零件没有被压紧而有径向窜动，从而导致支承的非线性刚性及振动过大，其振动特征如下：

(1) 振动多发生在径向；

(2) 从振动频谱来看，其频谱峰较多，除转速基频外，尚有分频和倍频等频率成分出现；

(3) 振动相位无变化；

(4) 转速增减变化时，振动出现突增突减现象。

10.4.5 转动件与静子件碰摩

在发动机运转过程中，由于转子不平衡、转动件与静子件的径向间隙过小、轴承座同心度不良等，均能发生转动件与静子件碰摩，并导致振动剧增。转动件与静子件碰摩的振动特征如下：

(1) 机匣振动响应会出现转子旋转频率成分的次谐波、高次谐波和组合谐波成分；

(2) 振动随时间而变化，当碰摩接触面积增大或接触位置增加时，机匣振动响应幅值剧增；

(3) 双转子结构发动机，其转、静子发生碰摩时，系统发生次谐波和组合谐波频率的振动

10.4.6 发动机滚动主轴承故障

航空发动机主轴承在使用过程中，由于润滑条件恶化、装配不良或受到过大冲击载荷作用，使内环和外环跑道及滚动体(球体或柱体)表面磨损，腐蚀和局部剥落经常发生。由于供油不足，还经常发生内外环跑道、滚动体及保持架的烧蚀和烧熔。上述损伤均导致轴承冲击振动加剧。

轴承座上的振动响应具有如下特征：

(1) 振动频率非常丰富，几乎包括整个声频；

(2) 轴承上述缺陷必然引起以高次谐波为特征的冲击振动。

轴承内环跑道局部剥落呈现的振动频率为

$$f_{\mathrm{i}} = \frac{z}{2} f_0 \left(1 + \frac{d}{D} \cos\alpha\right) \tag{10-97}$$

轴承外环跑道局部剥落呈现的振动频率为

$$f_{\mathrm{c}} = \frac{z}{2} f_0 \left(1 - \frac{d}{D} \cos\alpha\right) \tag{10-98}$$

轴承滚动体局部剥落呈现的振动频率为

$$f_{\mathrm{d}} = \frac{D}{d} \frac{f_0}{2} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cos\alpha\right] \tag{10-99}$$

轴承保持架磨损呈现的振动频率为

$$f_{\mathrm{G}} = \frac{f_0}{2} \left(1 - \frac{d}{D} \cos\alpha\right) \tag{10-100}$$

式中：z——滚动体数目；

f_{i}——内环的一点与一个滚动体接触的频率；

f_{c}——外环的一点与一个滚动体接触的频率；

f_{d}——滚动体的一点与内环接触的频率；

f_{G}——轴承保持架振动频率；

f_0——转轴的旋转频率；

d——滚动体直径；

D——轴承节径；

α——接触角。

10.4.7　齿轮的振动故障

齿轮是传动系统的关键零件。由于加工误差、装配误差以及运行条件不佳，齿轮在使用过程中往往产生齿面磨损或剥落，齿轮塑性变形，齿根裂纹，齿轮折断等故障。齿轮振动信号的特征：

(1) 齿轮运转时，其啮合伴有较大冲击，振动波形具有调幅特点或既调幅又调频。频域信号中除旋转频率、啮合频率外，还有以啮合频率为中心，以转速频率及其倍频为边带的对称边频。

(2) 局部异常的齿轮，其频谱中除啮合频率外，还有基频、二倍频和三倍转速频率。

(3) 齿面磨损的齿轮，其频谱中除啮合频率外，还有二倍和三倍啮合频率。

(4) 随着运动误差的变化和刚度的变化，在频谱图中呈现出对称边带的剧增，边带的间隔与故障源的频率有关，边带的幅值与故障程度有关。

倒频谱分析能将频谱上成族分布的边带谱线简化为单根谱线，更适合于齿轮故障诊断。

参 考 文 献

[1] 航空涡轮喷气和涡轮风扇发动机通用规范.GJB241—87.国防科学技术委员会批准，1987.

[2] 唐照千，黄文虎主编.振动与冲击手册 第二卷.北京：国防工业出版社，1990.

[3] 汪风泉，郑万泔等编著.试验振动分析.南京：江苏科学技术出版社，1988.

[4] 顾家柳著. 航空发动机的整机振动. 航空科技，第三机械工业部科学技术情报研究所，1980.

[5] 李其汉,张津编.航空发动机状态监视与故障诊断.北京:北京航空航天大学.1991.
[6] 屈维德主编.机械振动手册.北京:机械工业出版社.1992.
[7] [美]布歇 R R 著.杜德昌,吴家驹等译. 冲击与振动传感器的校准.北京:计量出版社,1984.
[8] 应怀樵著.振动测试和分析.北京:中国铁道出版社.1987.
[9] 付才高主编.航空发动机强度设计、试验手册. 航空工业部第六研究院,1985.
[10] 晏砺堂编著.航空燃气轮机振动和减振.北京:国防工业出版社,1991.
[11] 屈梁生,何正嘉编著.机械故障诊断学.上海:上海科学技术出版社,1986.
[12] 高飞编.振动测量与信号分析.西安:西北工业大学出版社,1989.

第 11 章　振动的评定标准

11.1　制定发动机振动量限制标准的目的和原则

11.1.1　制定振动量限制标准的目的

制定振动量限制标准的目的，包括下述四个方面：

(1)按统一的标准评定发动机的振动品质，尤其当制造厂向用户交货时，合理的振动限制值可以成为发动机零部件加工、平衡和装配质量控制的一种手段。

(2)对于使用中的发动机，作为转子系统机械状态或其故障的监视手段，与其他手段，例如轴承温度等一起，可综合判断发动机是否偏离良好的工作状态，有助于发现早期故障。防止因振动过大而使发动机零部件产生过大的载荷和内力，避免引起二次破坏。

(3)决定发动机分解检修周期的手段。合理的振动限制值有助于确定发动机分解检修周期，在其检修周期内，发动机保持良好的运行状态。这对发动机生产的经济性有着至关重要的作用。

(4)由于发动机振动将影响飞行员工作舒适条件、座舱仪表的正常工作以及与发动机相连的飞机构件的环境条件，为了满足飞机对发动机整机振动的要求，故需制定发动机振动量限制标准。

11.1.2　振动感受参数、显示参数和限制参数

在振动测量、监控和诊断分析中，应用传感器直接感受的振动参数称为振动感受参数。它取决于测振系统中选用的传感器。目前航空发动机整机振动测量中，广泛采用的传感器是速度式传感器和压电式加速度计，它们分别感受测量部位的振动速度和加速度。速度式传感器灵敏度适中，但频响范围较窄，重量较大，使用寿命较短。压电式加速度计频响范围较宽，体积较小，使用寿命较长，但过于灵敏，需对拾振信号进行严格滤波处理。

振动显示参数是振动测试仪表最终显示的参数。一般显示参数和限制参数是一致的。目前国内外航空发动机整机振动测试时，采用振动位移、振动速度或振动过荷系数作为显示参数和限制参数。用振动位移做为显示参数和限制参数时，可直观地反映发动机上测振处位移或振幅的大小。但用速度式传感器拾取的振动信号需积分一次，用加速度计式传感器拾取的振动信号需积分两次。积分仪抗干扰能力强，有利于消除高频分量的干扰。若采用振动速度做为显示参数和限制参数，也有一定的好处，它标志着振动物体的振动能量大小。也表示振动物体振动应力的大小。直接用速度式传感器测量时，不需积分。用加速度计传感器测量时，需积分一次。只是测振系统复杂一点，需要有一定的抗干扰能力。如果采用振动过荷系数(振动加速度)作为显示参数和限制参数，可反映出发动机振动时的惯性力的大小，也可直观地看出它是重力加速度的倍数。由于振动加速度正比于振幅与频率平方的乘积，对于高转速发动机来说，测得很大的振动过荷系数，其实振动位移幅值并不大。此外，其他高频振动的干扰容易混

人，转速的测量误差会引起较大的振动测量值误差。

综上所述，三种振动限制参数各有优缺点，国内外航空发动机都有采用。一般说来，对于较低频率振动用振动位移显示和限制；对于中等频率振动用振动速度显示和限制；而较高频率振动则用振动加速度显示和限制。典型的涡轮发动机工作转速处于中等频率范围，宜用振动速度进行显示和限制。美国国军标(MIL－E－5007D)涡喷涡扇发动机通用规范，对发动机整机振动测量作了如下规定：采用压电式加速度计，输出与振动加速度成比例的电荷量；测振部位为压气机、涡轮和附件齿轮机匣以及发动机的主轴承座；对振动信号进行频谱分析，分析频带为5Hz～10kHz；以振动速度为限制参数。从对发动机整机振动限制的基本要求和发展趋向看，限制振动速度比较合理。振动能量正比于振动速度有效值的平方，即振动速度反映发动机振动能量的大小；从结构可靠性观点看，振动环境引起的疲劳破坏及疲劳寿命是影响可靠性的重要因素，而振动速度正可以反映结构的应力水平，即反映了振动疲劳环境；不论发动机的尺寸、转速如何，其振动速度基本上为一个数量级，一般在20～70mm/s范围内，故便于给出一个统一的振动限制标准。

有的发动机振动显示参数和限制参数不一致。如WP6、WP7等发动机一直沿用前苏联的标准，它们均采用速度传感器测振，即感受振动速度，通过测振仪中的积分电路得到显示参数位移 A(全幅 mm)，然后再通过 $K = Af^2/500(f = \omega/(2\pi)$, Hz)计算得到振动过荷系数 K，并与限制参数规定的过荷系数值相比较。通常测振仪或信号调节器中的运算网络，按简谐振动规律实现参数之间的转换(即 A 为位移幅值；$V = A\omega$ 为速度幅值；$a = A\omega^2$ 为加速度幅值；ω 为振动圆频率)。而实际测量时，在所测量频带内并非是单一频率(即转子转速频率)的振动，其振动总量所包含的整数倍、分数倍旋转频率和非旋转频率的成分较大，例如振动速度

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

所以参数之间按单一简谐频率进行转换是不合理的，从而影响了对发动机振动品质的真实反映。

11.1.3 制定振动量限制标准的原则

11.1.3.1 关于振动总量和振动分量限制

目前，振动量限制分为振动总量限制和分量限制两种。振动总量一般是在一定带通范围内测量的振动信号。振动分量则一般是经跟踪滤波、窄带滤波或频谱分析得到的单一频率的振动信号。CFM－56发动机分别给出了跟踪低压转子转速的振动位移限制值和跟踪高压转子转速的振动速度限制值。

发动机振动量按幅值－频率分量和在一定频率范围内的振动总量(位移、速度、过荷系数)来规定。应分别规定发动机一倍转子频率和其他频率激起的振动。

11.1.3.2 制定振动量限制标准的原则

在整个发动机寿命期内，其振动量不应超过某一规定值。在该规定值下，应保证发动机具有足够的强度及使用可靠性。即保证发动机所形成的振动环境不致引起飞机上仪表工作失灵、货物受损、机组人员和乘客不适以及飞机在寿命期内发生结构疲劳损坏等；另一方面还应充分考虑成本经济效益，尽可能减少发动机的返修率和报废率。

需要特别指出的是发动机的整机振动值受到许多因素，诸如发动机试车台架及在飞机上的安装特性、传感器的安装位置和方向及测量用滤波器的滤波特性等影响。因此，应借鉴同类

型的批生产发动机的振动限制标准,通过大量的试验,用统计处理方法,确定有效的适用标准。

11.2　转子临界转速及转动薄壁件共振安全裕度

11.2.1　转子临界转速安全裕度

为在经常使用的工作转速附近,避免共振状态及发生较大的动力响应和结构破坏,且由于飞行马赫数、性能恶化、环境条件及其组合情况的影响,发动机经常使用的工作转速与临界转速之间需要留有一定的裕度。

(1)在发动机设计阶段,应进行转子临界转速和稳态不平衡响应等动力学分析工作。其中包括选择转子结构及承力系统中的转子支点的合理布局,决定支点柔度值和决定是否采用专门的阻尼措施。

为了计算发动机的动力特性,必须确定发动机转子支点柔度和安装节系统的柔度。这些柔度值可以用计算和试验方法确定。支点柔度包括轴承、轴承座、机匣幅板及机匣壳体等的柔度。

对于反向旋转的同心双转子或多转子发动机,以及涡桨发动机,应既确定正进动,也应确定反进动临界转速和振型。

(2)用计算或试验确定转子 - 支承 - 机匣 - 安装节系统的临界转速,使得:

——转子的弯曲型临界转速调整到最大工作转速以上;平动、俯仰型临界转速调整到慢车转速以下。高于发动机最高工作转速的临界转速至少留有 20% 的安全裕度。低于发动机慢车转速的临界转速也要至少留有 20% 的安全裕度。

——如果转子平动或俯仰型临界转速不能调整到最高工作转速以上,而位于慢车转速和发动机经常使用的工作转速(例如巡航转速)之间,应留有 20% 的安全裕度。但应采取适当的措施,确保其振动值在发动机允许的振动限制范围内。

——飞机安装节/发动机平动、俯仰型临界转速应低于慢车转速,安全裕度为 20%。

斯贝 MK202 发动机规定:刚性支承的最低临界转速不应低于发动机最高工作转速的 1.333倍;对于有意设计成较低临界转速的转子,临界转速应低于慢车转速,或者在地面慢车和空中慢车转速之间,应使得:

(临界转速 - 地面慢车转速) = 1/3(空中慢车转速 - 地面慢车转速);

其第二阶临界转速也至少应为转子最高转速的 1.333 倍。

(3)实际上,由于转子本身的刚度及机匣支承刚度之间的匹配,故转子以某一振动模态振动过程中,难于严格区分转子的刚体振动模态和弯曲振动模态,在《燃气涡轮发动机结构设计准则的研究——最终报告》中,对转子动力学设计提出了更科学、更确切的定量要求:即允许的转子弯曲应变能应小于该振动模态的发动机总应变能的 25%,转子弯曲应变能超过此值认为是不可接受的。同时又指出,当超过这一规定时,应提供足够的阻尼。为确定转子弯曲应变能与发动机总应变能的比值,应进行转子 - 支承 - 机匣 - 安装节系统的稳态不平衡响应分析。

11.2.2　转动薄壁件共振安全裕度

所有转子薄壁件,包括薄壁轴、空气导管、封严篦齿环均应进行振动分析。以行波频率 $f_m(\omega)/m$ 和转动圆频率 ω 定义共振安全裕度

$$S_m = \frac{f_m(\omega)/m - \omega}{\omega}(\%) \quad (11-1)$$

对于转动件，$f_m(\omega)$是周向波数为 m 的后行波频率。对于封严篦齿环组件的静子件 $f_m(\omega)$是周向波数为 m 的前行波频率。由于静子件不转动，其前后行波频率相同，式(11-1)同样适用。$f_m(\omega)$可由计算得到，如果用有限元计算或模态试验得到的静频 f_{sm}，则按下式计算转动时的前、后行波频率：

$$f_m = \frac{2m}{m^2+1}\omega \pm \sqrt{f_{sm}^2 + B\omega^2} \quad (11-2)$$

式中：$B = \frac{m^2(m^2-1)}{(m^2+1)^2}$；

"+"为后行波，"-"为前行波。

由式(11-1)算出对应 m 数最低的共振裕度，其共振安全裕度应为

$$S_{min} \geqslant 20\%$$

耦合共振是指篦齿密封组件的静子件和转动件同一周波数 m 振动模态，且在同一参考坐标系(例如相对静子件的固定坐标系)中行波频率相等，则振动模态耦合产生共振。其耦合共振裕度定义为

$$S_m = \frac{f_{rm}/m - (f_{rm}/m \pm \omega)}{f_{rm}/m \pm \omega}(\%) \quad (11-3)$$

式中：$f_{rm}/m \pm \omega$ 是固定坐标系中的前、后行波频率。"+"为前行波，"-"为后行波。

由式(11-3)算出最小耦合共振裕度，其耦合共振安全裕度为

$$S_{min} \geqslant 10\%$$

篦齿密封自激振动稳定性判据为

$$W/R = \frac{m^2}{m^2+1} \times \frac{\Delta PL}{4\pi f^2 M} < 0.4 \times 10^{-3} \quad (11-4)$$

式中：m——周向全波数；

ΔP——通过密封的静压差；

L——第一封严篦齿和最后封严篦齿的轴向长度；

f——固有频率；

M——参与振动的有效质量，取为1/2密封组件实际质量。

满足上述标准不会发生自激振动。

为避免声音-机械激振，封严组件的弯曲固有频率应大于各环腔的谐振音频，其安全裕度至少为20%。

11.3 发动机振动量限制标准

11.3.1 借助部件试验和整机试车确定发动机的振动特性

(1)借助部件试验和整机试车确定发动机的振动特性，其目的在于确定发动机转子-支承-机匣-安装节系统的临界和共振状态的转速范围，并验证在这些状态和最大转速状态的振动量级是否在振动限制值的允许范围内。

(2)确定振动特性时,振动传感器应置于转子和机匣直接连接的转子支点平面及发动机安装于飞机安装节组合件附近;建议在进气道和加力燃烧室或者反推力装置与发动机连接的安装边上进行振动测量。振动传感器及其固定条件对振动测量值不应有较大的影响,即应满足:

$$f_c = 1.5f_{max}$$

式中:f_c——发动机固定处“传感器-支架”系统的固有频率;

f_{max}——转子的最高转速频率。

对于双转子或多转子发动机,除使用带通滤波器进行振动测量外,建议采用能进行频谱分析的振动分析装置进行测量。

(3)在下述发动机部件试验或专项地面试车过程中,应进行发动机振动测量:

——进行加温加压试车时,以及录取高度—速度特性时;

——模拟发动机热不平衡(热起动)时;

——检查防冰系统有效性试车时;

——外来物(鸟、砂石、冰雹、反雷达偶极子反射器等)吸入进气道条件下进行考核试车时;

——检查压气机稳定性裕度时;

——检查燃烧室或加力燃烧室振荡燃烧的稳定性裕度时;

——进行机匣包容性试验时;

——模拟调试及批生产初期出现的结构故障(较高的转子不平衡量、轴承磨损、轴弯曲过大、转静子相磨、发动机装配偏离技术条件等)状态下;

——涡桨发动机进行特性试验时。

(4)应在不高于使用中允许的最高物理转速(起飞时或飞行中,取其中最高者)的 103% 各转速下进行振动测量。

如果发现在转子最高物理转速附近共振时,振动测量应超过发动机最高物理转速,其值不得低于 5%。

(5)对上述振动测量得出的振动特性结果进行分析,确定“转子-支承-机匣-安装节”组合系统的共振状态;确定非转子频率激振源引起的机匣或其组件的共振;选择振动监测系统;规定飞机使用和生产中试车台试车时进行发动机振动状态有效监测的转速范围,以及确定振动传感器在发动机上的安装位置。

11.3.2 台架试车振动评定标准

(1)为便于分析起见,在 10~2000Hz 频率范围内,在相互垂直的三个方向上,在转子支点相连接的机匣平面内及发动机安装节附近,测量发动机的整机振动。

(2)如果在转子工作转速范围内,存在两个或两个以上与“转子-支承-机匣-安装节”系统有关的共振,则由这些共振状态中的每一个状态确定发动机的振动量限制值。

(3)对重复起动和加温尚未变冷的“热”发动机,允许短时间(1~2 分钟)内,将振动速度幅值提高到发动机研制部门和主管部门确定的数值。此时,民用发动机的振动速度限制值不应超过 70mm/s。

(4)对于双转子和多转子发动机允许的振动限制值规定如下:

在一定的转速范围内,按振动总量确定;对于一倍的转子频率激起的振动,按每个转子单独规定。

(5)发动机检验试车时,在其稳态测得的转子一倍激振频率的最大振动幅值不应超过图11-1示出的数值。而在过渡的尚未稳定的状态,不应超过图11-1所示数值的1.3~1.5倍。在放气活门转换时或接通(关闭)加力燃烧室时,其振动限制值不应超过图11-1所示数值的1.5~2.0倍。

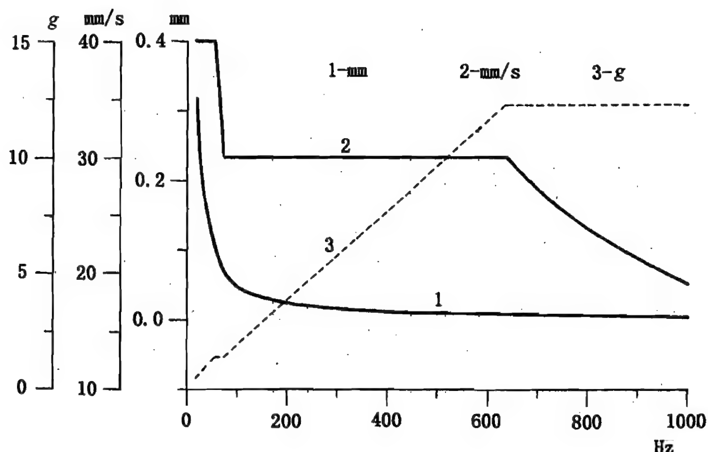


图11-1 振动位移、振动速度和振动过荷系数限制曲线

(6)发动机交付试车时,振动限制值由发动机研制部门确定。

(7)各种形式的发动机长期试车时,以及飞机在地面条件下和飞行条件下检查时,一倍的转子激振频率的最大振动幅值不应超过图11-1所示数值的1.3~1.5倍。而在过渡的尚未稳定的状态时,不应超过图11-1所示数值的1.5~2.0倍。

(8)在有充分技术依据和发动机未出现振动性故障时,根据发动机研制部门和订货部门协商,对所有形式的发动机试车,其振动限制值允许不超过图11-1所示数值的1.5~2.0倍。

(9)对于研制的发动机,在未发现振动性故障时,根据发动机研制部门和订货部门协商,允许将振动限制值提高到图11-1所示数值的1.3~1.5倍。

11.3.3 批生产发动机的振动评定标准

(1)为了按整机振动状态及时判断生产中的缺陷及控制工艺过程的稳定性,必须规定发动机振动的出厂限制标准。

(2)为了对发动机整机振动作出总的评价和完成台架鉴定试车前的设计、试验工作,对所有批发动机,建议按最大振动量级所处的状态选择若干台发动机的最大振动值,确定统计的最大振动值。

(3)确定发动机统计的最大振动量值的方法如下:

$$V_{\max} = \bar{V}_{\mathrm{m}}\left[1 + a\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2 q_{\mathrm{m}}\right]$$

式中:$\bar{V}_{\mathrm{m}}$——所有被试发动机振动量值的平均幅值;

m——被试发动机台数;

q_{m}——变异系数;

a——修正系数,其值不应小于3。推荐值为3.5。

(4)对于与国家台架鉴定试车结构相同的发动机,如果统计的最大振动值超过图11-1所

示振动值的1.3～1.5倍,表明在批生产中,发动机振动量级超过限制标准的可能性较大。

(5)发动机研制部门根据各种试车台发动机试车的整机振动测量结果统计处理,制定批生产发动机的振动限制标准,应低于图 11－1 所示振动值的 1.3～2.0 倍。生产过程中,如超过出厂限制标准,表明该发动机在加工、装配和平衡过程中存在偏差,必须排除。

11.3.4　附件传动系统的振动评定标准

(1)对于每一种附件,应该确定附件及相连接管路和其他构件在发动机固定处的第一阶固有振动频率。建议该阶振动频率不与发动机机匣的振动频率重合。此外,对于带转轴的附件,必须使该附件在发动机固定状态下的第一阶固有振动频率不在附件转轴的工作转速频率范围内。

(2)进行台架鉴定试车前,在发动机调试过程的试车工作阶段,用实测方法确定附件的振动。对安装在发动机及其飞机附件机匣上的所有附件进行振动测量。

(3)发动机台架试车时,由三个相互垂直方向(其中一个方向与附件的转轴相平行)的振动测量确定附件的振动。其测量频率范围为 10～2000Hz。其允许的振动限制值为图 11－1 所示数值的 2.0～3.0 倍。在有充分技术依据的情况下,经发动机、飞机、附件研制方与发动机订货方协商,在飞行条件下对附件振动进行测量。

(4)如果在 10～2000Hz 范围内的任一频率上,发动机附件的振动量超过 11.3.4,(3)中和技术条件规定的振动限制值,则发动机和附件研制方应采取措施,诸如改变附件的安装方式或固定位置,采取阻尼减振等方法,以确保附件允许的工作条件。

(5)发动机和附件研制方应与发动机订货方协商,对给定频率范围内附件安装处频谱图的幅频特性进行分析,并与附件构件的固有频率对比,在此基础上,规定附件高于 2000Hz 频率的允许的振动限制值。允许的振动限制值应经附件振动强度和振动稳定性试验验证。试验时,应在该频率范围内,在发动机统计测量的振动量级的 1.5 倍的振动情况下,或者在附件构件已查明的共振条件下进行。

(6)如果附件发生与振动有关的故障,则应在与附件研制方要求相符合的频率范围内,在发动机所有工作状态下,确定附件固定处的振动幅频特性,但频率范围不应窄于 10～2000Hz。

(7)应在保证减速器构件和与其连接的发动机机匣的振动强度条件下,由发动机研制方规定涡桨发动机减速器允许的振动限制值。此时,附件在其与减速器固定处的允许振动值,不应超过 11.3.4,(3)的规定值。

11.3.5　发动机的机载振动监测

(1)在发动机台架和飞行试验时,在发动机整个工作期间,应使用机载振动传感器,对一倍的转子频率激起的振动进行监测。对于使用中的飞机机载振动监测,应使用不少于两个传感器来实现。

(2)使用中,必须从起动开始的所有工作状态用机载振动监测系统不间断地进行监测。

(3)为了评定发动机的振动状态,除用机载振动传感器外,可适当安装附加的振动传感器。

(4)机载振动测量仪器的误差不应超过监测的振动额定值上限的 10%,而对于振动分量来说,不应超过 15%。

(5)发动机研制部门应根据对 2～3 台发动机的振动统计分析结果,确定在发动机规定寿命期内监测转子一倍频率外的振动分量的必要性。

(6)装在飞机上的发动机,在地面试车时,其转子频率的振动水平可能与该发动机在台架试车时有差别,这是由于试车台与飞机承力结构不同造成的。对装在飞机上的若干台发动机地面试车时测量的一阶转子激起的振动速度幅值,不应比这些发动机在试车台试验时的振动幅值超过 10mm/s。否则,发动机在试车台的试验条件(在试车台的固定条件,连接的进气装置及附件的质量和刚度有差别等),必须符合承力系统的工作条件。

(7)发动机机载振动监测处振动限制标准的制定,应考虑使用过程中统计的振动量值范围的上限值,其值应处于图 11-1 所示数值的 1.3~1.5 倍范围内,但不应超过图 11-1 所示数值的 1.5~2.0 倍。

11.4 现有发动机振动量限制标准资料

表 11-1 介绍了几种航空发动机整机振动量限制标准方面的情况,供参考。

表 11-1 几种航空发动机整机振动限制值

机号	类型	转速 (r/min)	测显 方式	测振位置	限制值 A (mm)	限制值 v (mm/s)	限制值 k (g)
WP6	单转子涡喷	11150	$v \to A$	压气机机匣	0.0434	25.3	3.0
J69	单转子涡喷	22000	$v \to A$	压气机机匣	0.038	43.47	10.2
J79	单转子涡喷	7450	$v \to A$	压气机机匣	0.1145	45.8	3.52
WP7	双转子涡喷	11425 11150	$v \to A$	压气机机匣 涡轮机匣	0.068 0.102	40.6 59.5	4.0 6.0
SPEY	双转子涡喷	12500 8950	$v \to A$	压气机机匣	0.0508	33.2	4.98
JT3D	双转子涡喷	9780 6538	$v \to A$	进气机匣 涡轮后机匣	0.0762 0.0762	39.0	4.0
Д20П	双转子涡扇	11700 8550	$A \to A$				4.0
АИ24	单转子涡桨	15100	$v \to A$		0.0394	30.94	5.0
HK8-4	单转子涡桨	9700	$v \to v$		0.177	90	
HK 8	双转子涡桨	7400 5600	$v \to v$		0.155~0.202	60	4.69~8.99
CFM56	双转子涡扇	14460 5175	$g \to v$ $g \to A$	涡轮机匣	跟踪 n_1 0.1016	跟踪 n_2 40.64	
J85-17	单转子涡喷	16542		压气机机匣	0.0762		
АЛ-31Ф	双转子涡扇	13300 10200	$v \to v$	前机匣 中介机匣 涡轮机匣	0.103 0.075 0.075	55 40 40	3.3 2.4 2.4

附　录　A

T700 - GE - 701A 发动机测振规范

T700 发动机是美国 GE 公司研制生产的涡轮轴发动机，发生器由五级轴流压气机、一级离心压气机和两级涡轮组成。两个轴承支承在挤压油膜阻尼器并联的鼠笼式弹性支承上。两级动力涡轮前输出轴转子支承在前后带有挤压油膜阻尼器的两个支承上，无中介轴承。

正常工作转速范围：

燃气发生器：30000 ~ 44700r/min；

动力涡轮：17000 ~ 21000r/min。

振动规范分两部分：

(1)用于生产验收的测振规范(型号规范第 1 部分)

测振位置：排气机匣，径向(VR31)V9；

附件齿轮箱，垂直(VV4)V10 或(ALT)V11。

振动限制值：由燃气发生器和动力涡轮产生的最大速度总量：38.1mm/s。

(2)用于设计、鉴定要求的测振规范

a.测振位置

位置 1：主机匣，VH1 水平，代号 V1 或 V3；

VH1 垂直，代号 V2 或 V4；

VH1 轴向，代号 V1 或 V3。

位置 2：中机匣，VH2 水平，代号 V6；

VH2 垂直，代号 V5。

位置 3：排气机匣，VR31 径向，代号 V3；

VH32 径向，代号 V6。

位置 4：附件齿轮箱，VV4 垂直，代号 V10 或 V11。

b.发动机安装在飞机前的振动限制

位置：1,2,3。

由发动机转子及附件产生的最大峰值振动速度总量：38.1mm/s；

瞬态最大峰值振动速度总量：71mm/s，持续时间少于 5s。

c.发动机安装在飞机后高频振动限制

位置：1,3,4。

由发动机转子及飞机部件产生的频率为 50Hz 以上，最大峰值振动速度总量：63.5mm/s；

最大峰值振动速度总量：88.9mm/s，持续时间少于 5s。

d.发动机安装在飞机后低频振动限制

位置：1,2,3,4。

由飞机旋转零件或部件产生的频率在 4 ~ 50Hz 范围内最大峰值速度总量：

正常：垂直　127mm/s；

轴向　63.5mm/s。

放宽：垂直　177.8mm/s；

轴向　127mm/s。

瞬态最大峰值振动速度总量(持续时间少于5s)：

正常：垂直　177.8mm/s；

　　　轴向　127mm/s。

放宽：垂直　304.8mm/s；

　　　轴向　177.8mm/s。

注1：低频正常振动限制值适用下述飞行条件：

a. 起飞、悬停和着陆；

b. 平飞、直到以中间功率可能达到的最大平飞速度；

c. 拉起、爬升、推杆转入平飞、下降零 g 和 $1.75g$ 之间加速转弯直到45°倾斜角。

注2：放宽的低频振动限制适用于上述条件下未特殊规定的机动飞行，这些机动飞行不超过发动机总工作时间的5%。

附　录　B

WZ8A 发动机测振规范

WZ8A 发动机是 80 年代从法国 T.M 公司引进的小型涡轮轴发动机。该发动机为单元体结构，允许在外场更换。最大功率为 520kW，最大工作转速 n_{gmax} = 51800r/min，动力涡轮转速 n_{t1} = 41586r/min，自由涡轮转速恒速调节。其测振规范如下：

频率范围：5～1000Hz；

最大振动速度均方根值限制值：见图 1、图 2 和图 3。图 1 表示压气机机匣测点振动限制曲线。图 3 表示涡轮机匣测点振动限制曲线。

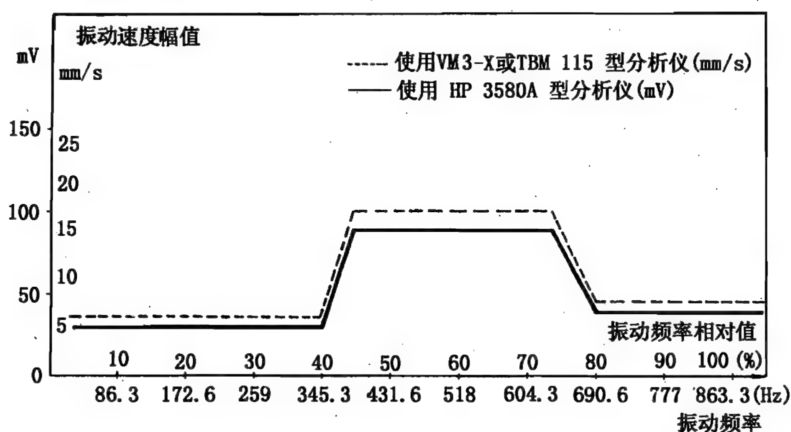


图 1　轴流压气机机匣测点振动限制值曲线

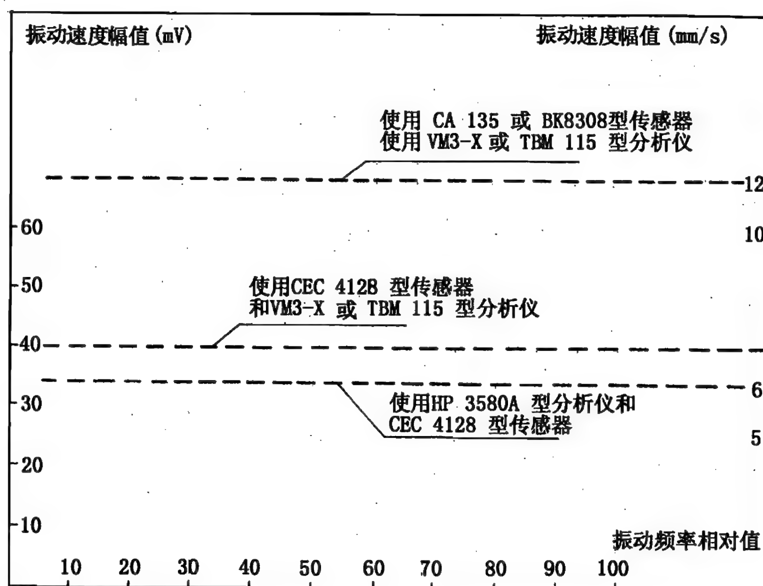


图 2　自由涡轮分量测点振动限制值曲线

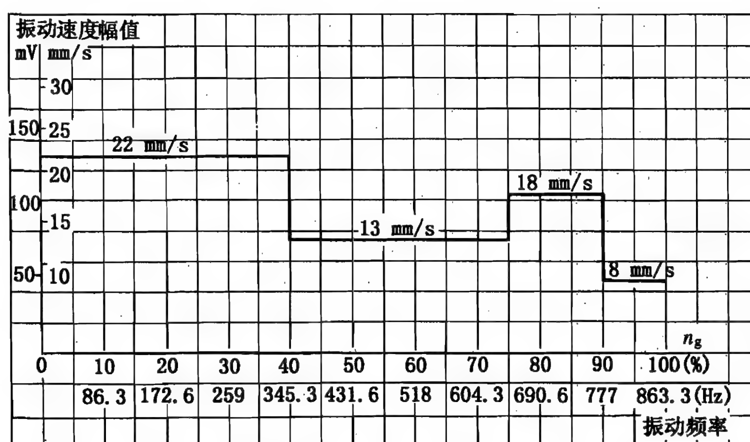


图3　涡轮机匣测点振动限制值曲线

法国T.M公司还规定在外场进行振动监测的要求。这种监测用于在腐蚀性大气或含砂大气中工作的发动机,并在下列条件进行:

每400工作小时;

可能由于振动水平高而引起的故障之后;

当发动机振动量级高时。

外场测振使用8308加速度计传感器,装在涡轮机匣安装边上。测振仪为丹麦B.K公司2513测振仪。振动测量应在起动至85%n_g转速过程中在热发动机上进行。振动速度有效值(rms)限制值规定如下:

工作转速n_g由0~40%为25mm/s;

工作转速n_g由40%~75%为15mm/s;

工作转速n_g由75%~90%为20mm/s。

如证实发动机超过上述限制值,应拆下发动机(或2+3单元体)返厂。

附　录　C

CFM56－3 民用发动机批生产试车测振规范

批生产发动机试车中有关整机振动规定如下：

(1)整机振动监测硬件

验收阶段和/或整机振动惩罚运行期间，所有振动设备(即传感器、电缆、插头、测试仪表等)应随发动机一起安装，进行试车。并证明是有效的。

1 号轴承(安装在发动机内)

放大系数 = 100PC/g (PC——微微库仑；g——重力加速度。下同。)

涡轮后框架

放大系数 = 50PC/g

具体位置：涡轮后框架前安装边的后侧，11:30 位置。

风扇框架/压气机机匣垂直方向

放大系数 = 100PC/g

具体位置：风扇框架后侧，3:00 支板头位置。

注 1：风扇框架/压气机机匣的振动仅做为参照目的用。不是担保性振动监测。

注 2：试车过程中，如果 1 号轴承振动传感器失效，则可用风扇框架/压气机机匣振动替代(从发动机安全性考虑)，以便继续进行并非最终检验试车的发动机试车。

(2)在线显示数据

所有发动机试车期间，对于每个振动传感器，使用 1 次/转的窄带跟踪滤波器连续地记录高压和低压转子的振动。过渡过程的带式记录纸记录设定如下：

通道 1：风扇转速 0 ~ 5000r/min

通道 2：核心机转速 5000 ~ 15000r/min

通道 3：1 号轴承(跟踪低压转子转速)0 ~ 10mil(0 ~ 0.254mm)

通道 4：涡轮后框架(跟踪低压转子转速)0 ~ 10mil(0 ~ 0.254mm)

通道 5：1 号轴承(跟踪高压转子转速)0 ~ 2in/s(0 ~ 50.8mm/s)

通道 6：涡轮后框架(跟踪高压转子转速)0 ~ 2in/s(0 ~ 50.8mm/s)

通道 7：风扇框架/压气机机匣(跟踪低压转子转速)0 ~ 10mil(0 ~ 0.254mm)

通道 8：风扇框架/压气机机匣(跟踪高压转子转速)0 ~ 2in/s(0 ~ 50.8mm/s)

在整个试车跟踪过程中，记录纸速度应设定于 0.5mm/s，除非试车工程师另有通知。

注 1：可以用数字式记录系统替代带式记录纸记录系统。

(3)发动机整机振动限制值

无论稳态或是过渡态工作时，整机振动限制值是相同的。

最大安全限制值：

低压分量：8.0mil(0.203mm)

高压分量：1.8in/s(45.7mm/s)

低压质量控制限制值：

低压分量：4.5mil(0.114mm)

验收限制值:

低压分量:1号轴承

2.5mil(0.064mm)(低压转子转速低于或等于4658r/min)

3.5mil(0.089mm)(低压转子转速高于4658r/min)

涡轮后框架

2.5mil(0.06mm)(低压转子转速低于或等于4658r/min)

3.5mil(0.089mm)(低压转子转速高于4658r/min)

高压分量:所有

1.3in/s(33.0mm/s)

低压分量目标限制值:

低压分量:1号轴承

2.0mil(0.051mm)(低压转子转速低于或等于4658r/min)

3.0mil(0.076mm)(低压转子转速高于4658r/min)

涡轮后框架

2.0mil(0.051mm)(低压转子转速低于或等于4658r/min)

4.0mil(0.102mm)(低压转子转速高于4658r/min)

发动机整机振动值落到验收限制值范围内,最多实行两次附加的风扇转子调平平衡尝试及两次低压涡轮转子调平平衡尝试,以便达到目标限制值。如果不能达到目标限制值,则进行返厂组装,以便达到验收限制值范围内的最低的低压分量振动值限制。

注1:如果风扇和低压涡轮转子配重块同时安装,则它们分别计数1次。

注2:如果不要求平衡低压涡轮转子(即涡轮后框架振动在目标限制值范围内),则仅进行两次风扇转子的调平平衡尝试是足够的。

注3:在节气门运动的30s或少些时间内,验收限制值和目标限制值不适用于低压转子的振动。这段期间里,对于涡轮后机匣的振动限制值为4.0mil(0.102mm)。对于1号轴承的振动限制值为3.5mil(0.089mm)。

注4:平衡数据应在最高 $n_1=4600$r/min 开始获取。

(4)正式记录的标准

正式记录的振动量级是在(2)分钟加速/减速过渡态振动检查期间里的低压和高压最高振动量级。应对每台发动机归档过渡态振动检查数据文件。

(5)风扇帽罩处质量平衡校正

风扇调平平衡期间,施加的风扇帽罩校正螺钉的矢量和不应超过1984g·cm或(5.6)P05平衡单位最大总校正能力的40%。

(6)低压涡轮转子平衡配重限制

安装在低压涡轮转子上的平衡配重块的最大数目为(20)。

(7)突然变化

稳态振动量级突然变化/改变超过下述值,应要求立即紧急停止试车,并排故:

低压转子:2.0mil(0.051mm)

高压转子:1.0in/s(25.4mm/s)

由于发动机系统正常的共振转速而引起的振动变化,不应认为是突然变化。

(8)风扇叶片凸肩挤压痕迹

在第一个配重块安装前，应检查风扇叶片中部凸肩是否有挤压痕迹。如果发现有挤压痕迹，则将叶片安装在合适位置上，重新运行平衡外形基准线。

附 录 D

某涡轮风扇发动机台架试车测振规范

(1)测振部位

1.1 按水平和垂直方向的三个截面进行发动机机匣的振动测量

Ⅰ截面穿过风扇前支点;Ⅱ截面穿过中介机匣;Ⅲ截面穿过低压涡轮支点。

同时,用安装在中介机匣上的用于飞行监测的振动传感器进行振动测量。

1.2 沿两个方向进行发动机上部减速器的振动测量

垂直方向;相对于发动机中心线的水平横向。

注1:当水平横向振动量级超过允许限制值情况下,进行上部减速器垂直方向的振动测量。

1.3 在相对于发动机中心线的垂直方向和水平方向进行外置附件机匣的振动测量。

1.4 在相对于发动机中心线的垂直方向和轴向进行起动机与外置附件机匣固定部位的振动测量。

(2)测振仪表的特性

2.1 上部减速器测振仪表的特性

用于测量发动机上部减速器振动的仪表,其滤波器带宽为20~8000Hz。量程为0~400g。限制值上限误差为10%。

2.2 外置附件机匣的测振仪表的特性

用于测量发动机外置附件机匣振动的仪表,其滤波器带宽为50~180Hz。量程为0~100mm/s。限制值上限误差为10%。

2.3 发动机机匣测振仪表的特性

测振仪表的幅频特性($f=220$Hz)如图4所示。

测振仪表的频率特性($v=30$mm/s)如图5所示。其滤波器带宽为50~250Hz。

测振仪表的量程为0~100mm/s。限制值上限误差10%。

(3)目视振动监测

试车过程中,如果发动机各机匣或外置附件机匣的振动按照目视振动监测仪表达到限制值的0.8或以上,则除了用发动机安装的振动传感器测量振动以外,所有的振动要用YM-3X型分析仪进行测量及最终的估计。与此同时,为了目测确定振动特性与振动量级和获得有效的图形信息,应将振动信号记录到磁带上。

为了确定振动速度以及相应的振动过荷系数和振动位移,其换算关系如下:

$$j=\frac{Af^2}{250};A=\frac{V}{2\pi f};V=\frac{j1570}{f}。$$

式中:A——振动位移,mm;

f——振动频率,Hz;

j——振动过荷系数,等于安装振动传感器部位机匣的振动加速度与地球重力加速度的比值。

(4)振动限制值

4.1 台架状态下,发动机各机匣的振动限制值

a. 在发动机所有工作状态下，机匣－转子系统的振动速度总量，Ⅱ和Ⅲ截面振动速度不大于40mm/s，Ⅰ截面振动速度不大于 55mm/s。

b. 按转子振动合成的振动速度，由下式确定：

$$V_{\Sigma}=\sqrt{V_1^2+V_2^2}$$

式中：V_{Σ}——合成的转子振动速度，mm/s；

V_1——频率为低压转子转速(n_1)的振动分量，mm/s；

V_2——频率为高压转子转速(n_2)的振动分量，mm/s。

当振动的量级小于限制值的 0.8 时，允许不将振动分解到转子分量上。

c. 发动机稳态工作时，不允许振动幅值有急剧地(在 1～2 秒钟内)超过 20mm/s 的变化。

d. 在不同的起动次中，在同一状态下，振动速度幅值的差别不允许大于 30mm/s。

e. 转子的振动是指频率等于低压转子和高压转子转速频率的振动。

f. 低于慢车的各种状态下，没有振动限制标准。

注 1：当Ⅰ截面振动量级不大于 75mm/s，而Ⅱ截面振动量级不大于 50mm/s 时，允许工厂试车通过。

注 2：通过了工厂试车的发动机，其Ⅰ截面振动量级大于 50mm/s，而不大于 75mm/s，Ⅱ截面振动量级大于 40mm/s，而不大于 50mm/s 时，应找出发动机振动大的原因，并进行排故。然后在验收交付试车中重复检查发动机机匣各截面的振动量级。

4.2　外置附件机匣的振动限制值

a. 在发动机所有工作状态下，外置附件机匣在 50～180Hz 频率范围内的振动过荷系数不大于 $4g$；

b. 在外置附件机匣同一次安装情况下，不同次发动机起动，在同一发动机工作状态下，其振动过荷系数差别不应大于 $3g$。

c. 发动机在稳态工作时，不允许振动突然(在 1～2 秒过程中)增大超过 $3g$。

d. 在装有外置附件机匣的发动机试车过程中，当外置附件机匣的振动值大于 $4g$ 时，必须将柔轴拆下，并进行检查，改变方向，再次起动发动机，并评定外置附件机匣的振动。

4.3　发动机上部减速器的振动限制值

a. 在工厂试车和验收交付试车时，用 B3－38 电压表测量振动总量时，发动机上部减速器的振动限制值为 $j\leqslant150g$。

超过上述限制值时，利用频谱分析仪 CK－4－72/2 对振动信号作频谱分析。

b. 按频谱分析仪 CK－4－72/2 所分析的频率成分，规定上部减速器的振动限制值。

上部减速器有如下振动分量的发动机，允许继续进行试车。

工厂试车与验收交付试车时，按耦合的频率(第三圆柱齿轮传动振动频率) $V\leqslant60$mm/s，按锥齿轮耦合的频率 $V\leqslant33$mm/s；验收交付试车时，按第一和第二圆柱齿轮耦合的频率，$j\leqslant150g$。

c. 工厂试车时，具有锥齿轮和第三圆柱齿轮传动振动频率的上部减速器的振动小于 $300g$ 和具有第一和第二圆柱齿轮传动振动频率的振动小于 $400g$ 时，可认为工厂试车通过。验收交付试车前的上部减速器装配时，按检验的结果进行上部减速器的补充工作。

d. 验收交付试车的振动量级超过本节 b 条，工厂试车的振动量级超过本节 c 条的发动机，是否继续进行发动机试车，应与检验部门共同决定。

e. 完成工厂试车后，在发动机履历本中写明有关上部减速器振动的记录。注明转速 n_2 振动频率，齿轮传动的振动值(以“g”或“mm/s”计)以及本节 b 条规定的限制值。

f. 振动超过限制值时，应完成下述工作：

——根据频谱分析仪的分析结果确定测量系统的固有振动频率(用小铝锤在测量振动过荷系数的方向上轻轻敲击测振支架边)；

——将辅助重物安装到水平传感器测振支架的专用螺栓孔中，并确定测量系统的固有频率。

——仅在振动超过一定量级的状态下，才重复执行带有加装辅助重物的振动记录。当振动量级与技术条件的限制值相一致时，或当振动超出量级变成另一种没有辅助重物测得的频率时，则认为上部减速器的振动通过了。

4.4 起动机的振动限制值

a. 台架试车时，对应发动机高压转子转速(慢车至最高物理转速)全部转速范围内，起动机壳体在轴向和垂直方向的振动过载不应超过 $j = 44g$。

b. 当起动机壳体轴向振动过荷系数在 $4.0 \sim 5.0g$ 范围内时，重复起动时，在 6350 – 6936 测振支架上进行轴向振动的最终测定。

当起动机壳体轴向振动过荷系数大于 $5.0g$ 时，在 6350 – 6970 测振支架上进行轴向振动的最终测定。

注：为测量起动机壳体的振动，使用测振支架 6350 – 6970，而在本节工厂试车时，使用测振支架 6350 – 6936。

c. 当按本节 a，本节 b 振动过荷系数超过时，按本节 d 中规定的顺序将软轴改变方向，并对外置附件机匣和起动机重复进行振动测量。

d. 无法排除振动超限时，完成了本节 c 工作以后，在预先确定外置机匣和上部减速器安装法兰的位置正确以后，按有关规定将软轴换成仔细检查后的软轴。

e. 更换软轴后，进行发动机起动，并测量外置附件机匣和起动机的振动。必要时，将软轴改变方向。

如果在更换软轴后的外置附件机匣和起动机壳体振动降到了本节 a 规定的标准，则对拆下的软轴按规定进行仔细检查，并将检查结果与检验部门一起对软轴做出决定。同时，应将装有更换过软轴的外置附件机匣和起动机交付使用。

f. 如果在执行了本节 b、本节 c 工作以后，外置附件机匣的振动大于 $4g$ 和起动机振动大于 $4g$，没有降到允许的限制值以下，这种情况下，应更换外置附件机匣。研究分析拆下的外置附件机匣。起动发动机，并重复测量外置附件机匣和起动机壳体的振动。必要时，按本节 c 规定改变软轴方向。

当外置附件机匣和起动机壳体的振动符合振动限制值要求时，应将起动机和新安装的外置附件机匣一起交付使用。

g. 如果外置附件机匣振动小于 $4g$，而起动机壳体的振动大于 $4g$，并且当按本节 b 及本节 c 做了工作后，没有降到允许的限制值以下，这种情况下，应检查起动机在外置附件机匣上的安装是否符合技术要求。当对起动机在外置附件机匣上的安装无异议时，更换起动机。起动发动机，并重复检查外置附件机匣和起动机壳体的振动。当外置附件机匣和起动机壳体的振动满足限制值要求时，应将外置附件机匣和新安装的起动机交付使用。

将拆下的起动机装到另一个外置附件机匣上，进行仔细检查。必要时，按规定改变软轴方

可。

当起动机壳体的振动符合限制值要求时，应将做为外置附件机匣组成部分的起动机交付使用。

当证实做为另一个外置附件机匣组成部分的起动机壳体振动超过限制值(外置附件机匣的振动不应超过本节的限制)时，应与检验部门一起对起动机做出处理决定。

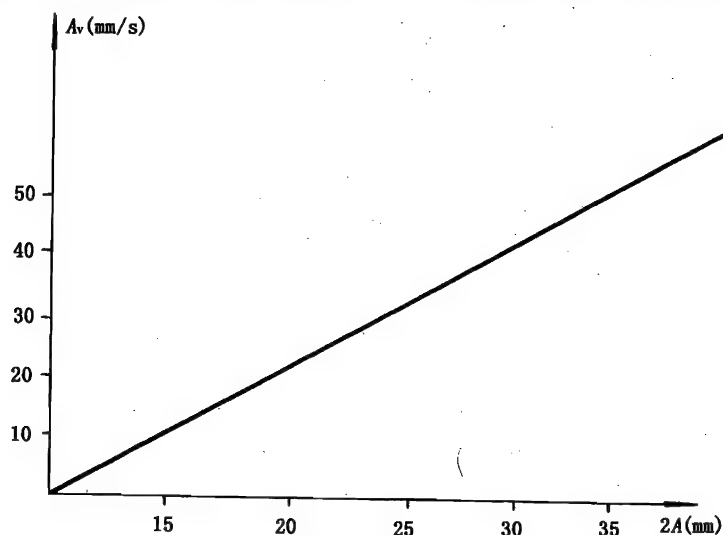


图 4　幅频特性曲线($f=220$Hz)

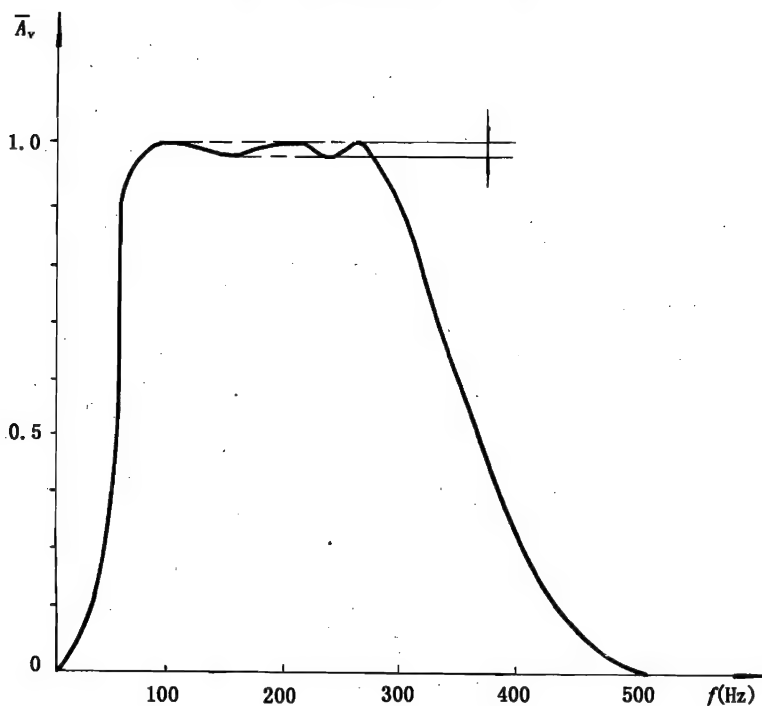


图 5　频率特性曲线($V=30$mm/s,滤波器带宽 50～250Hz)

参 考 文 献

[1] 顾家柳.航空发动机设计中必须重视振动问题.航空涡轮发动机结构完整性大纲研究文集.航空工业总公司第 301 研究所,第 606 研究所,1994.

[2] 董德耀.航空发动机振动限制值分析.航空涡轮发动机结构完整性大纲研究文集.航空工业总公司第 301 研究所,第 606 研究所,1994.

[3] 晏励堂等.高速旋转机械振动.北京:国防工业出版社,1994.

[4] GJB241 – 87 航空涡轮喷气和涡轮风扇发动机通用规范.国防科学技术工业委员会,1987.

[5] 燃气涡轮发动机结构设计准则的研究——最终报告.1985.

[6] 宋兆弘编.发动机寿命研究.燃气涡轮发动机可靠性与寿命研究讲座第一册.北京:航空工业出版社,1987.

[7] 杨士杰主编.航空涡喷、涡扇发动机结构设计准则(研究报告)第六册转子系统.中国航空工业总公司系统工程局,1997.

[8] 斯贝 MK202 发动机应力标准(EGD – 3).国外航空编辑部,1979.9.

第 12 章　转子动平衡

12.1　概　述

转子平衡是在转子制成后采取的一种减振措施，通过在转子上某些截面增加或减小质量，使转子的重心和其几何中心靠近及其一主惯性轴尽量和旋转轴线靠近，以减小转子工作时的不平衡力、力偶或在临界转速附近的横向振动量，从而减小转子系统及整机的振动。

不平衡的转子旋转时产生不平衡的离心力或(和)力偶作用于转子和轴承，并传到支座和机匣等零、组件上，使受力零件产生应力、变形或松动并迫使转子自身及静止零件振动或共振，增大振幅和(或)交变应力。如果转子要在临界转速附近或以上工作，则容易因发生很大振动而通过不了临界转速或引起各种机械故障甚至损坏。航空发动机整机振动和许多机械故障，尤其是关于振动方面的故障常常是由转子过大的不平衡力或力偶引起，或者是因通过临界转速时振动量过大造成。

尽管在转子制成后通过动平衡的方法可使转子系统达到要求的平衡精度，但为了减小转子的各零、组件不平衡离心力对自身的不利影响并使转子的平衡工作简便易行，在设计中仍应力求做到转子的各零、组件具有良好的平衡性。

转子的平衡分静平衡、力偶平衡和动平衡。静平衡的目的是尽量使转子的重心靠近转子的旋转轴线。平衡时转子是不旋转的，将转子放置于两个刀刃或摩擦力很小的轴承上，观察它是否达到随遇平衡。静平衡的转子仍有可能因其一主惯性轴不与旋转轴线重合，转子旋转时虽不平衡力已较小而不平衡力偶却可能很大，为此转子还需要进行力偶平衡。单纯的力偶平衡是很麻烦的而且没有必要，通常是采取动平衡的方法进行平衡。动平衡就是将转子旋转起来进行平衡。动平衡后既可减小转子的不平衡力又可减小其不平衡力偶，即既可使转子达到静平衡又可做到力偶平衡。尽管如此，一般在转子动平衡之前仍须先进行静平衡。否则有可能因静不平衡量很大，转子旋转起来振动太大，无法进行动平衡。

12.2　动平衡原理和转子系统允许的不平衡量

从转子动力学的观点，转子可区分为刚性转子和柔性转子。这两种转子的平衡原理和平衡方法都不相同。

刚性转子的定义有多种。通常是指工作时转子的弯曲变形很小，可以忽略不计的转子，如规定转子的变形占转子与支承总变形的 10% 以下的转子称刚性转子。另一种定义为工作转速在弯曲型临界转速(严格说在 80% 临界转速)以下的转子为刚性转子。

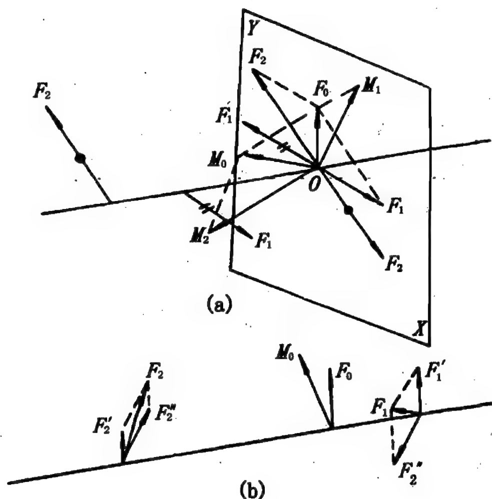
国际标准化协会(ISO)“平衡术语国际标准”中从平衡的角度定义刚性转子是“转子可以在任意两个平面上进行校正，并在校正以后，在任意转速下，其不平衡量不大大超过平衡公差，而且其运转条件大致接近工作时的条件，这样的转子可以看作刚性转子”。这一定义是比较严格的。不属于刚性转子范畴的一切转子都是柔性转子。尽管有此定义，实际上刚性转子和柔性

转子也很难绝对区分。从平衡角度看,一些柔性转子也可用平衡刚性转子的方法使之平衡目前就有一些具有柔性转子的发动机仅用刚性转子平衡法平衡也可使振动减小。反之,有些具有刚性转子的机器也可用柔性转子平衡的方法使转子的振动减小。

12.2.1 刚性转子动平衡原理和转子系统允许的不平衡量

12.2.1.1 刚性转子的平衡原理

一个绕定轴(Z 轴)以角速度 ω 旋转的转子如图 12-1 所示。设其任意的第 i 轴段的质量为 M_i,质量偏心距为 R_i,即不平衡量为 M_iR_i,其不平衡离心力为 $F_i = M_iR_i\omega^2$(向量)。此力可向任一截面,例如 OXY 面简化(转移)。设在 OXY 面加上与 F_i 大小相等,方向相同和相反的一对力(这等于没加),那么第 i 轴段上的和 OXY 截面上的一对力合成为在 OXY 截面上的力 F_i 和力偶 F_iZ_i(向量)。各轴段的不平衡力都向 OXY 面简化,于是就在 OXY 面得到一个总的合力 $\boldsymbol{F}_0 = \Sigma\boldsymbol{F}_i$ 和力偶 $\boldsymbol{M}_0 = \Sigma\boldsymbol{F}_iZ_i$。即是说一个转子上的不平衡力可以用任一截面上作用的一个力和一个力偶来表示。当取定两个截面表示时,OXY 面上的力可向该两平面分解,力偶也可用分别作用于该两平面上的相等和相反的力代替,于是可在该两平面上各得到一个合力。这样,一个转子上所有各段的不平衡力就可以简化成在任意两个平面上各有一个不平衡力。动平衡就是将该两平面上的两个力消除或减小。平衡时,令转子旋转,先测出该两平面上的不平衡力向量,然后在该两平面上分别减去或在力的相反方向加上大小相等的力即可达到平衡。方法是在该两平面上适当部位减去或增加适当质量。



(a)两轴段上的不平衡力 F_1、F_2 向 OXY 面简化图

(b)OXY 面上不平衡力 F_0 力偶 M_0 向任两面简化为 F_1、F_2 图

图 12-1 转子上的不平衡力的简化分析图

12.2.1.2 不平衡量的表示方法

实践中有两种表示不平衡量的方法:质径积 mr(g·cm)和偏心距 e(mm)。这都是就某一定平衡面而言的,前者是指该面上存在多余的(或欠缺的)质量与质量所在半径的乘积,后者是指分配于该面上的转子质量的偏心距。因为转子的不平衡力可用 $F = Me\omega^2$ 表示,式中 M 为转子质量。平衡时只要增加或减去的力 $F_c = mr\omega^2 = Me\omega^2$,也即是只需 $mr = Me$ 就可达到平衡。偏心距 e 可理解为 mr/M,即单位转子质量的不平衡量。质径积只是相对于一定类型的转子而言的,不同类型的转子不能相互比较。因为转子振幅值比例于 $e = mr/M$,故偏心距 e 可用来衡量转子平衡性的优劣和鉴定平衡机可达的剩余不平衡量,即平衡的精度。

12.2.1.3 刚性转子的平衡精度

平衡精度是指转子平衡性的好坏,平衡精度越高表示转子平衡得越好。因质径积 mr 只能代表一定类型转子的不平衡量,故它不能用作平衡精度。但它很直观,应用方便,在平衡工作中还是得到普遍采用,只是不用作平衡精度而已。若用转子质量偏心距 e 作为平衡精度,似较合理,但它没有反映转速的影响。因 $e = mr/M = F/M\omega^2$,对于很高转速的转子,在同样 F/M 情况之下,就会要求 e 值很小,以至很难做到。为了考虑转速又考虑偏心距的影响,ISO

图 12-2　刚性转子平衡精度图线

荐采用 $A = \omega e/1000$ 来表示转子的平衡精度。对不同类型的转子规定不同的精度级别。同精度，A 值为一定，其单位为 mm/s。平衡精度分十一级，按比值为 2.5 的等比级数递增排列：G0.4，G1.0，G2.5，G6.3，G16，G40，G100，G250，G630，G1600，G4000。G 后的数值即代表 A。A 值越小，平衡精度越高。两级之间可插入其他 A 值。由 $A = \omega e/1000$ 知 $e = 1000A/\omega$，对于一定级别精度（A 值一定），e 随 ω 成曲线关系变化。为了应用方便，采用对数坐标，则与转速 n 为直线关系，可作成直线图供查用，如图12-2所示。各种类型刚性转子的平衡精有一定的推荐精度等级，参见表12-1。航空燃气涡轮转子等部件推荐的平衡精度为 G6.3。

螺旋桨轴、传动轴等精度为G16。航空燃气涡轮发动机不论采用刚性转子或是柔性转子，在装配阶段都需按刚性转子在平衡机上进行动平衡，为此都必须在设计研制过程确定转子的平衡精度或允许的不平衡量。而允许的不平衡力与发动机允许的振动密切相关，发动机规定的整机振动限制值过荷系数或振动加速度等就是根据转子的不平衡力确定的。实际发动机转子工作时的不平衡力或不平衡量比装配时的要大得多。原因是多方面的，主要是航空燃气涡轮发动机转子是在高转速、高负荷、高温度以及温度分布不均的情况下工作，与刚性转子在平衡机上的平衡情况截然不同。工作时转子的零、组件特别是工作叶片会发生变形、松动等，增大转子的不平衡量，因此选用刚性转子的平衡精度往往要偏高一些，所以平衡精度的选用并不规定得很死，可根据对机器振动的要求和是否有良好的减振装置等情况来降低或提高。应用时根据转子最大工作转速并参照推荐的平衡精度图线确定平衡精度后，可求出偏心距 e，再由已知的转子质量 M 算出 Me，即知转子的不平衡量 mr。但要注意这是转子的总的允许不平衡量。若用两个平衡面平衡，这个总不平衡量还要分配到两个面上去。分配的原则是保证分配后两支承上分别可能达到的载荷不得超过未分配时总不平衡量可能分别对两个面引起的载荷值。方法是，先将位于转子重心的总允许不平衡量按不平衡力的分解法分配给两支承，据此可知两支承的允许载荷。两平衡面上允许不平衡量的分配，必须保证由此产生的不平衡力作用于两支承上的载荷分别不超过前述的允许值。应注意，不平衡量是无方向的，而不平衡力是有方向的，不平衡量分配时应考虑到两平衡面上的不平衡力最不利的组合时仍能获得上述要求，这是正确的分配方法。目前也有人按力的分解方法将不平衡量直接分配到两个平衡面上，这是一种粗略的分配方法，可能使得轴承载荷比正确的分配法要大些。但若在选取允许不平衡量时留有较大裕度，此法简便也未尝不可采用。

表12-1 各种典型刚性转子的平衡精度

精度等级G	$e\omega$ (mm/s)	转子类型
G4000	4000	具有单汽缸刚性安装低速柴油机曲轴驱动件
G1000	1000	刚性安装的大型四冲程发动机的曲轴驱动件
G630	630	弹性安装的船用柴油机曲轴驱动件
G250	250	刚性安装高速四缸柴油机曲轴驱动件
G100	100	六缸和多缸高速柴油机曲轴驱动件 汽车、货车和机床用汽油或柴油发动机整机
G40	40	车轮、轮箱、整机轮子、驱动轴、弹性安装的六缸多缸高速四冲程汽油或柴油发动机曲轴驱动件 汽车、货车和机车发动机的曲轴驱动件
G16	16	特殊要求的驱动轴(螺旋桨轴、传动轴) 压碎机械的零件 农业机械的零件 汽车、货车和机车用(汽油或柴油)发动机 单个零件特殊要求的六缸和多缸发动机的驱动件
G6.3	6.3	加工工厂的机器零件 海轮(商船)主涡轮机的齿轮 离心分离机的鼓轮 风扇 航空燃气涡轮转子部件 飞轮、泵的叶轮 机床及一般机器零件 普通电机转子 特殊要求的发动机的单个零件

续表 12－1

精度等级 G	eω (mm/s)	转　子　类　型
G2.5	2.5	燃气和蒸汽涡轮，包括海轮(商船)主涡轮 刚性涡轮发电机转子 透平压气机转子 机床驱动件 特殊要求的中型和大型电机转子 小电机转子 水轮泵
G1	1	磁带录音机及留声机驱动件 磨床驱动件 特殊要求的小型电枢
G0.4	0.4	精密磨床的主轴、磨轮及电枢

12.2.2　柔性转子动平衡原理和转子系统允许的不平衡量

柔性转子在运行过程中会发生振动位移。航空发动机中常用的带低刚性弹性支承的转子在弯曲临界转速以下运行时基本上是不发生弯曲变形，但有振动位移，变形主要发生于弹性支承，支承带动转子产生平动或摆动的位移。

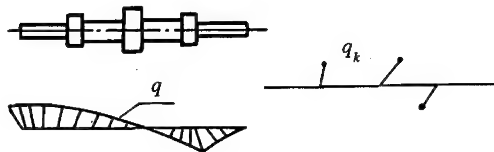


图 12－3　柔性转子不平衡量分布示意图

设一个柔性转子如图 12－3 所示，在沿轴向 dx 微段上有分布的不平衡量 $\boldsymbol{q}=m(x)\boldsymbol{e}(x)\mathrm{d}x$，若轴上某些截面还有集中不平衡质量为 $\boldsymbol{q}_k=m(x_k)\boldsymbol{e}(x_k)$，可将它们看作分布于很短轴段上的分布不平衡质量。分布不平衡量是一空间曲线。为了便于以后的分析，可将空间曲线表示为许多不同轴线方向的平面曲线之和，即将偏心距 $\boldsymbol{e}(x)$展成转子主振型之和：

$$\boldsymbol{e}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{\Phi}_i \tag{12-1}$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}_i$——转子第 i 阶横向振动主振型，每一阶主振型为一轴向平面曲线，各阶主振型不一定在同一轴向平面内；

$\boldsymbol{C}_i$——分布质量第 i 阶主振型对偏心距的贡献，是待定常向量。

由于 $\boldsymbol{C}_i$ 是向量，$\boldsymbol{e}(x)$显然也是向量。

轴上的集中质量的偏心距也可展成主振型之和：

$$\boldsymbol{e}(x_k)=\sum_{k=i=1}^{K}\boldsymbol{C}_{ik}\boldsymbol{\Phi}_i \tag{12-2}$$

式中：$\boldsymbol{e}(x_k)$——集中质量的偏心距，k 为集中质量序号；

$\boldsymbol{C}_{ik}$——集中质量第 i 阶主振型对偏心距的贡献，是待定常向量；

K——集中质量总个数。

如要求出分布质量第 j 阶主振型对偏心距的贡献，可将式(12－1)两边乘以分布质量 $m(x)\boldsymbol{\Phi}_j\mathrm{d}x$并积分全轴。利用正交条件后可求得：(注意：这里乘进去的 $\boldsymbol{\Phi}_j$ 是定值，式(12－1)中的 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 其 i 是从 1 到 ∞ 的变值，当 $i\neq j$ 时，按正交原理该积分为零，只 $i=j$ 时才不为零，这就

是正交条件。如果在积分前乘上一常数 ω^2,则其物理意义为某阶不平衡力对其他阶振型所做功的总和为零。)

$$C_j = \frac{\int m(x)e(x)\boldsymbol{\Phi}_i \mathrm{d}x}{\int m(x)e(x)\boldsymbol{\Phi}_j^2 \mathrm{d}x} = \frac{\int m(x)e(x)\boldsymbol{\Phi}_i \mathrm{d}x}{N_j} \tag{12-3}$$

式中:$N_j = \int m(x)e(x)\boldsymbol{\Phi}_j^2 \mathrm{d}x$。

同法可求得相应于集中质量的 C_{jk}:

$$C_{jk} = \frac{\sum_{i=k=1}^{K} m(x_k)e(x_k)\boldsymbol{\Phi}_i}{N_{jk}} = \frac{\sum_{i=k=1}^{K} q_k\boldsymbol{\Phi}_i}{N_{jk}} \tag{12-4}$$

式中:$N_{jk} = \sum_{i=k=1}^{K} m(x_k)e(x_k)\boldsymbol{\Phi}_j^2$

由空间曲线分布形式的不平衡力所激起的转子振动位移也必是成空间曲线形式。设以 $\boldsymbol{Z}(x)$表示此位移,它也可展成转子各阶振型的和:

$$\boldsymbol{Z}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\Phi}_i \tag{12-5}$$

式中:$\boldsymbol{Z}(x)$——向量,是 x 的函数;

$\boldsymbol{A}_i$——第 i 阶主振型对振幅的贡献,为待定常向量。

按照材料力学中给出的方法列出振动方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[EI\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\boldsymbol{Z}(x)\right] - \omega^2 m^*(x)\boldsymbol{Z}(x) = \omega^2 m^*(x)[\boldsymbol{e}(x) + \boldsymbol{e}(x_k)] \tag{12-6}$$

式中:E——转子材料的弹性模量;

I——转轴截面的惯性矩;

ω——转子的角速度;

$m^*(x)$——泛指转子上的质量,包括分布质量和集中质量。

式(12-5)中因是各阶主振型之和,故为一空间曲线,对于某个第 j 阶振型则为一平面曲线。因此可得第 j 阶振动方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[EI\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\boldsymbol{Z}_j(x)\right] - \omega^2 m^*(x)\boldsymbol{Z}_j(x) = \omega^2 m^*(x)[\boldsymbol{C}_j + \boldsymbol{C}_{jk}]\boldsymbol{\Phi}_j \tag{12-7}$$

当发生第 j 阶主振动时,是第 j 阶自由振动,故 $\omega = \omega_{nj}$,且上式右边为零。即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[EI\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\boldsymbol{Z}_j(x)\right] - \omega_{nj}^2 m^*(x)\boldsymbol{Z}_j(x) = 0 \tag{12-8}$$

式中:ω_{nj}——第 j 阶振动固有频率。

将式(12-7)与式(12-8)相减得

$$\begin{aligned}[\omega_{nj}^2 - \omega^2]m^*(x)\boldsymbol{Z}_j(x) &= \omega^2 m^*(x)[(\boldsymbol{C}_j + \boldsymbol{C}_{jk})\boldsymbol{\Phi}_j] \\ &= \omega^2 m^*(x)\left[\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{\Phi}_j + \left(\sum_{i=k=1}^{K} q_k\boldsymbol{\Phi}_j\right)\boldsymbol{\Phi}_j/N_{jk}\right]\end{aligned} \tag{12-9}$$

故得第 j 阶的振动位移为

$$Z_j(x)=\frac{\omega^2}{\omega_{nj}^2-\omega^2}\cdot\frac{\Phi_i}{N_{jk}}\left[C_jN_j^*+\sum_{i=k=1}^{K}q_k\Phi_i\right] \tag{12-10}$$

式中：$N_j^*=N_{jk}$；

$Z_j(x)$——是可求出的向量，其方向一定，仅大小随 x 变化。

柔性转子平衡法中振型平衡法的平衡原理就是要在转子上加上一些集中质量(配重)使上式等号右边括号中的数值等于零，从而使第 j 阶振幅为零。

总振动位移为

$$Z(x)=\sum_{i=1}^{\infty}Z_i(x) \tag{12-11}$$

平衡柔性转子时，除了要消除或减小转子上的不平衡力和不平衡力偶外，还须消除或减小其振动位移。从理论上讲如果完全消除了转子上的不平衡力和力偶的话，转子就不会有振动位移。反之，如果完全消除了转子的振动位移，转子上也就不会有不平衡力和力偶作用。实际上这是不可能做到的事，只要转子上有不大的残余不平衡力或力偶，也就有可能引起一定的振动位移。因此对柔性转子来说即使作到静平衡和力偶平衡都很好的话，为确保发动机振动小，最好还进行旨在消除或减小转子振动位移的平衡，即柔性转子平衡。

对于柔性转子不能用不平衡量的大小表示其平衡性的优劣，而是直接用转子振动(位移、速度、加速度或过荷系数)的大小来衡量转子平衡的好坏。故尚未见有正式的公开文件对柔性转子允许的不平衡量作出规定，主要用允许的发动机振动量大小来确定柔性转子的允许不平衡量。因柔性转子在生产中仍需要在低转速按刚性转子进行静、动平衡，并且有的柔性转子可用刚性转子平衡法平衡，所以仍需规定其允许的刚性转子的不平衡量。

柔性转子要求在高转速下平衡，特别是航空发动机柔性转子都是在高速、高温和高负荷的工作转速下平衡。根据为数不多的几种航空发动机来看，实际工作时的不平衡量达 500～800 g·cm，而发动机的振动仍不致过大。

12.3 发动机结构设计与动平衡的关系

转子不平衡的原因是转子的质量有偏心距或无一主惯性轴与旋转轴线重合，那么在转子设计、制造和使用中应力求做到使转子质量不偏心或尽量少偏心，或一主惯性轴尽量与旋转轴线接近。即在设计时转子尽量做到形状轴对称，不采用易变形、松动、错位的结构或连接装置；转子材料力求质量分布均匀；加工力求形状误差小，精度高，且无较大残余应力；装配正确，无偏差，松紧合适，不得引起零件变形，不得在高转速时松动或留有较大内应力导致以后变形；各种连接装置要确保高温、高速下不得松动或变形。

设计转子时应确定出两个平衡时应用的平衡面即校正面。平衡面既要尽量靠近直径大而重的零件，例如大而厚的轮盘，又要考虑平衡时便于进行修正。两个校正面最好相距较远。若是采用增加重量的方法平衡，应在校正面上沿圆周一圈设计许多个均布的安装配重的设置，并设计多种不同重量和尺寸的平衡配重(例如平衡螺钉)备用。若是削去材料要指出允许去材料的地区和限度。如果转子以后将要在发动机上进行本机平衡，设计时就应考虑要较容易接触到校正面。在发动机上因磨削后的碎屑不便清除，本机平衡时，不宜采用磨削零件材料的办法，而要采用增减配重的方法以达到平衡。本机平衡时除了要测量振动大小外，常常还要测振动的方向，故应设计出相应的备用作测试方位基准的设置。此外，还要力求将转子设计成整个

转子组装好平衡后即可安装到发动机上，而不必将转子拆开重装，以免平衡被破坏。

发动机转子应尽量设计得对不平衡量是不敏感的。即允许转子有较大的不平衡量而发动机振动不大。为此应将发动机的转子结构设计得刚性较大，支承应靠近容易具有较大不平衡量的大而重的轮盘。此外，工作转速应设计成远离临界转速，并在设计中采用有效的转子振动阻尼或振动控制装置等。

12.4 平衡方法

12.4.1 刚性转子的动平衡法

刚性转子的动平衡一般都在平衡机上进行，转子最好是带自己的轴承，支于平衡机的支座上。平衡机转子的转速不高，转子多由电机通过皮带轮带转。转速为常数，如600~800 r/min，有的为1000r/min，或更高一些。

平衡得到满意的结果后即可在平衡面上加上平衡配重或削去质量。因转子安装配重的位置和方向有限，配重的重量为定值，有可能不能按测试结果的要求在一定的方向和位置上加上所需的不平衡量，只是在接近的方向加上接近数值的配重，故加实际配重后常需再开车检验转子的平衡是否已达到要求。

如果需加的配重过大，易使零件在加配重处附近产生过大局部应力。此时应在需加配重的两侧各加一个或两个配重，这些配重产生的离心力的合力必须等于需加配重方向的离心力。也可采取在与需加配重相差180°的方向或其两侧减少适当配重或质量的方法以达到上述目的，或者两法兼而用之。

由于刚性转子的平衡机有不同的类型和结构，其性能也不尽相同，并且不断地发展、改进，具体的平衡方法要按照平衡机的说明书进行。

12.4.2 分步平衡法

上节所述转子的动平衡是转子装配好后整体放置在平衡机上进行。这只能使整体转子获得平衡。一个转子是由许多零、组件组装而成，这种平衡方法不能保证其中各个零、组件也都达到平衡。为了改善发动机各零、组件受力情况以及平衡工作的方便，在进行整体刚性转子动平衡之前先对转子的重要有关零、组件分别作静、动平衡。叶轮的平衡方法是对轮盘先作静、动平衡，装上叶片后再对叶轮转子进行动平衡。为了保持轮盘本身的平衡，在对叶轮进行平衡时，不得改变轮盘本身的质量，只能调换叶片以实现叶轮的平衡。这样，每级叶轮平衡得很好，各级轮盘本身也平衡得很好，一旦少数叶片损伤需更换时，只需选择少数几个与原来叶片同重量同重心位置的叶片换上，而无需再平衡，这就给工作带来很大方便。或者要平衡的话，也很容易再达到叶轮或整体转子的平衡。通常叶轮是不带轴的，无法安放在平衡机上，为此需专门制作为平衡用的心轴。转子的其他零、组件，如轴或轴段及其上面安装的齿轮和(或)密封件等，也要按同法分别先进行动平衡。这些平衡都是刚性转子动平衡，都是在平衡机上进行的。这种平衡方法就叫分步平衡法。

分步平衡时，零、组件允许的不平衡量取决于该件取用的强度安全裕度和平衡工作的方便。因在零、组件强度校核时，常常未考虑由于其本身不平衡力引起的应力，故允许的不平衡量不能取得太大。具体数值可参考现有发动机同类零、组件动平衡时允许的不平衡量来选定，

(可由表 12－1 选取适当平衡精度后算得。

在整体转子动平衡时，增、减配重的校正面尽量选在不影响转子零、组件平衡和强度薄弱的地区。这样，在分步平衡时已平衡好的零、组件的平衡性就不致被破坏，也不会削弱零、组件的强度。

2.4.3 柔性转子的动平衡法

柔性转子平衡是要减小转子的振动位移，宜在转子有较大振动位移的转速下进行。平衡转速最好是振动最大的转速或临界转速。如在临界转速转子振动过大，也可在靠近而稍低于临界的转速进行平衡。平衡前须先将需加配重的大小和方向测定。由于不便直接测量转子的不平衡力，都是先测出不平衡力引起的振动，而后通过试加不平衡量大小和方向均已知的配重，并测出其引起的振动大小和方向，作为对照求得转子的不平衡量的大小和方向。

柔性转子不平衡向量的测试方法有多种，动平衡的方法也有多种，主要可分为振型平衡法和影响系数平衡法两大类。

2.4.3.1 柔性转子不平衡向量测试法

常用的测试柔性转子不平衡向量的方法有：一试(又称三矢)法、二试(又称四矢)法和三试(又称三圆)法三种。

(1)一试法

转子动平衡时都必须有测试面和校正面，这两种面可为同一面，也可以是不同的面。此法在转子的校正面上加一次试配重进行试验，故得名。此方法简单，但要能直接测出转子的振动向量(振动的大小和方向)。向量的运算用作图来完成。

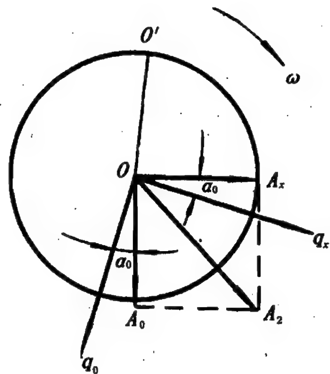


图 12－4 一试法测转子不平衡量作图法

开车至平衡转速，先测出转子的振动向量，设为 A_x，在图 12－4 的极坐标图上画出。而后在校正面上加上选定(选取的原则是尽量不使因加试配重而导致振动过大，可根据以前对本机平衡的经验来选取)的试配重向量，设其不平衡向量为 q_0，并将其绘在图上。再在同样转速下，测出转子的振动向量 A_2，也画在极坐标图上。此振动向量是转子原有不平衡量和试加配重的不平衡量二者共同引起的振动向量，故取名为 A_2。那么所加试配重引起的振动向量必是 $A_0 = A_2 - A_x$(向量相减)。此式的向量相减用作图法完成，即连接向量 A_x 和 A_2 的矢端所得的向量(由 A_x 向 A_2)，并移到原点即是 A_0。在图上可量出 A_0 的大小及其落后于 q_0 的相位滞后角。(要注意，相位角是指向量从基准线量起的方位角；相位滞后角是指振动向量方位落后于不平衡量向量方位的落后角，是不平衡量的相位角减振动向量的相位角所得的差值。)那么原转子的振动向量 A_x 也必落后于原不平衡向量 q_x 同样的相位滞后角，由此可求出原转子的不平衡量的方向。因转子系统被近似地认为是线性系统，原转子的不平衡量的大小可按比例关系算得。即

$$q_x = A_x(q_0/A_0) \tag{12-12}$$

式中，$q_0/A_0 = q_x/A_x$ 称该转子的灵敏度系数。凡对振动有影响的因素，如转速、阻尼等，都对灵敏度系数有影响。以前平衡时的灵敏度系数和相位滞后角并不一定等于现在平衡时的灵敏度系数和相位滞后角，但同一机器的转子其变化不会太大，以前的数据可作现在选取试配重时

的参考。

实际上用此法平衡时，开车测出转子的振动向量 A_x 后，即可按以前的（如果以前曾经进行过柔性转子平衡的话）灵敏度系数和相位滞后角计算出应加配重的不平衡量向量 q_0（为了简单，以下文中常将 q 称配重或试配重，用下标区分，实际上是指它们的不平衡量），如按此加上配重后，振动合格，平衡工作即告完成。如不合格需再次平衡时，q_0 即作为下次平衡时所加的试配重。第二次平衡如不合格可按同法进行第三次、第四次平衡。

这样一次次地平衡下去很麻烦，经两次平衡后还可换另一种方法来求出配重，就不必进行第三次平衡。这样就可以减少开车次数，节省时间，节约燃料。这种方法叫向量分析法。

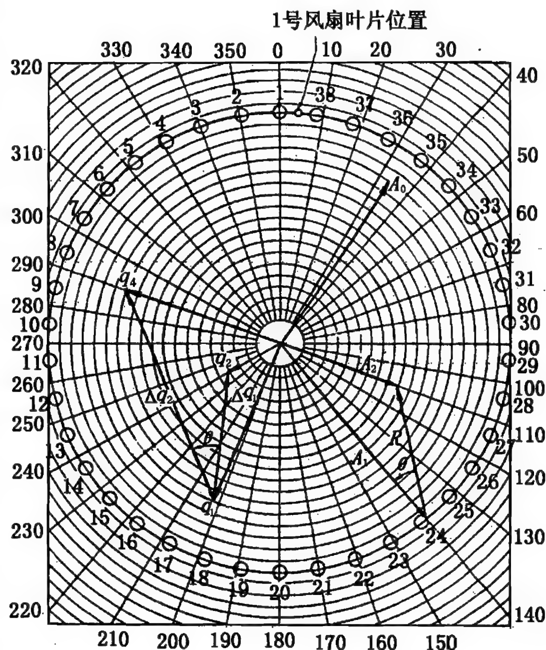


图 12-5 一试法向量分析图

设加上配重 q_1（即前面加的试配重 q_0，这里为在分析中便于记忆改写为 q_1）后所测振动为 A_1，未加试配重时测得的振动量为 A_x，按前法测得的应加配重为 q_2，加上配重后测得的振动量为 A_2。将向量 q_1、q_2、A_1、A_2 都画在极坐标图 12-5 上。连接 A_1、A_2 矢端得向量 R。$R = A_2 - A_1 = \Delta A_1$ 可以认为是配重 $\Delta q_1 = q_2 - q_1$ 引起的振动量。连接 q_1、q_2 矢端得 Δq_1。作下面的分析时将加配重 q_1 所引起的振动量 A 看作是需要平衡的原有振动量。现在求为平衡振动量 A_1 需加的配重，设为 q_4，那么加上 q 后，$\Delta q_2 = q_4 - q_1$ 引起的振动量的大小应为 $-A_1$。即 $\Delta A_2 = -A_1$。按线性关系求得 $\Delta q_2 = \Delta q_1 A_1 / R$。由此求得 $q_4 = q_1 + \Delta q_1 A_1 / R$。其方向由作图法确定。图上看出向量 R 与 $-A$ 的夹角为 θ。可见 Δq_1 与 Δq_2 之间也有同样的夹角 θ。故可由向量 Δq_1 的起点作出与 Δq_1 的夹角为 θ 的向量 Δq_2。Δq_2 的大小和方向既定，就可过原点作直线与向量 Δq_2 相交得出向量 q_4。应注意，这里分析认为需要平衡的振动是加上配重 q_1 后引起的振动，故 q_1 不再是试配重，不能去掉。

（2）二试法

用此法进行动平衡试验时，要先后两次加试配重。两次所加试配重大小相等方向相反（即相差 180°）。此法仅需测量振动量的大小，不必测振动量的方向。未加试配重时开车到平衡转速，测得转子的振动量大小 A_x。在 0° 方向加试重后，同转速测得的振动量为 A_2，而后取下试重改加到 180° 方向，测得的振动量为 A'_2。用作图法画在图 12-6 上。图中先画一线其长为 $2A_x$，中点为 O，其中一端点为 a（0° 方向），另一端点为 b（180° 方向）。分别以 a 和 b 为圆心，各以 A_2 和 A'_2 为半径画圆弧，相交于点 x 和 x' 点。连接 ax、bx、Ox、ax'、bx' 和 Ox'。则根据向量作图原理可知 Ox 或 Ox' 必是试配重引起的振动向量 A_0。图上 φ 角表明是试配重引起的振动方向与 180° 方向（即 $-A_x$

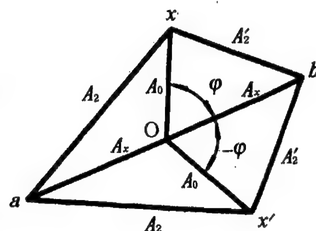


图 12-6 二试法测转子不平衡量作图法

j向)的夹角。那么在与 0°相隔 φ 角的方向加配重必可达到平衡。但是因为图上没标明方向，下是向量图，故也可能是 $-\varphi$ 角方向。即求出的配重的不平衡量方向有两个答案：$+\varphi$ 和 $-\varphi$ 自，需通过加配重开车检验来确定。

(3)三试法

此法需三次加试配重。只要测量振动量的大小，下必测振动量的方向。未加试配重时开车到平衡转速，先在测试面测出转子的振动量大小 A_x，然后先后三次轮换在 0°、120°和 240°方向加试配重，其不平衡量为 q_0，每次加试配重后开车到平衡转速，先后分别测得振动量为 ax、bx 和 cx，而后以 O 为圆心，A_x 为半径作圆，名为基圆(如图 12－7)。以圆上的 0°、120°和 240°方向圆周上的点 a、b、c 三点为圆心，用相应方向试加配重时所测振动量 ax、bx 和 cx 为半径分别作圆弧，三圆弧理应相交于一点名 x 点。连接 Ox，则 Ox 的大小即代表试加不平衡量引起的振动量大小 A_0，Ox 的方向(由 O 向 x)即表示为了平衡应加配重的方向。有时不便在转子上相隔 120°的三个方向加试配重，可在其附近方向施加，但作三个圆弧时的圆心位置的方向亦需作相应变动。

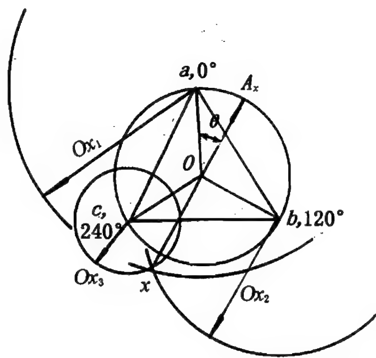


图 12－7　三试法测转子不平衡量作图法

由于试验工作中的误差，三圆常不能相交于一点，可根据两两圆弧交点的连线得出的小三角形的中点估计出三圆的交点 x 点。

转子原不平衡量的大小按式(12－12)计算。

三种测试法中第一种开车次数最少，但需要有测量振动方向的仪器和确定振动方向的基准设置；第三种方法所需开车次数最多，但只需测量振动量大小，不需测振动量方向；第二种开车次数居中，亦不需测量振动量方向，但测得的转子的不平衡量方向有两个答案，需开车试验确定出正确的答案，故总开车次数不一定比第三种少。三种测试方法各有优缺点，可根据具体情况选用。

2.4.3.2　振型平衡法

振型平衡法从理论上讲是要使转子的振型线等于零线，即要式(12－11)等于零。因其中包含无限个阶的振型，实际上是不可能做到的。由于前几阶主振型振幅最大，那么，如消除了前几阶主振型的振动，转子的振动就会很小。振型平衡法就是要将前几阶的振动平衡掉，一般认为工程上只需将转子工作时需要通过的几阶临界转速的振动平衡掉就足够了，特殊情况再加一阶。当代航空发动机最大工作转速以下一般有一至二阶临界，最多有三阶临界转速。这样，顶多只需平衡 1～3 阶就可以。平衡时先测出转子要平衡的每一阶由几个截面的振幅组成的振型，而后根据消除振幅的需要求得应加的配重而予以平衡。要取的测振面数等于平衡的振型的阶数。关于应取的校正面(即加配重的面)数，有两种不同的意见：一种认为应等于要平衡的振型的阶数，即 N 个平衡面，这种方法叫 N 面平衡法；另一种认为平衡面数应等于平衡的阶数加 2，这种平衡方法叫 $N+2$ 面平衡法。后者认为除了平衡几阶振型需要几个校正面外，为了保证转子的动、静平衡尚需另加两个校正面。前一方法认为柔性转子只要做到几阶临界的振型平衡就没有必要再添加两个校正面去保证转子的动、静平衡。因为工作转速范围内各阶临界转速时的振动都已经做到很小，再去保证转子的动、静平衡就成为多余的了。航空发

动机或者航空用试验器转子很难找到很多校正面,校正面数以越少越好。所以,目前航空发动机上采用的柔性转子平衡法都采用 N 面平衡法。用得最多的是单面平衡法,即 $N=1$。

(1)多阶振型平衡法

现举例说明多阶振型平衡法原理。设要平衡三阶振型,用三个测试面兼校正面,分别加上不平衡量为 q_{1c}、q_{2c}、q_{3c}的配重,显然配重都是集中质量。加配重后要求前三阶的振幅为零,由式(12-10)可得:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_1)q_{1c}+\varphi_1(x_2)q_{2c}+\varphi_1(x_3)q_{3c} &= -\sum_{i=k=1}^{K}\varphi_i q_k - C_1N_1 \\
\varphi_2(x_1)q_{1c}+\varphi_2(x_2)q_{2c}+\varphi_2(x_3)q_{3c} &= -\sum_{i=k=1}^{K}\varphi_i q_k - C_2N_2 \\
\varphi_3(x_1)q_{1c}+\varphi_3(x_2)q_{2c}+\varphi_3(x_3)q_{3c} &= -\sum_{i=k=1}^{K}\varphi_i q_k - C_3N_3
\end{aligned} \tag{12-13}$$

式中:φ_j——第 j 阶振型,$j=1,2,3$;

x_i——第 i 个校正面位置,亦是测试面位置,此处 $i=1,2,3$;

q_{ic}——第 i 个校正面上所加配重的不平衡量,此处 $i=1,2,3$;

N_j——第 j 阶振型的参数,$j=1,2,3$。

如果式(12-13)两边各乘 ω^2,则该式左边为所加三个配重产生的以三阶振型表示的分别对三阶主振动所产生的不平衡力所做的功,右边分别为转子原有不平衡的集中质量和分布质量产生的以三阶振型表示的三阶主振动的不平衡分力所做的功。该式的物理意义为所加配重产生的不平衡力所做的功与转子上原有的不平衡力所做的功大小相等正负相反,故达到平衡。但是,这里的不平衡力都只是以三阶振型表示,而不是以无限个阶的振型表示,故只做到大部分达到平衡,还不是完全平衡。

式(12-13)中右边是相应于转子原有的三个阶主振动的不平衡分力所做的功,是未知的。为了简化,分别以 P_1、P_2、P_3 代替。振型 φ_j 是由试验测出(也可计算但不够准确)。假定先平衡一阶振动,按正交条件知平衡某阶振动所加配重对其他阶振动做功的总和为零。所以平衡第一阶时 $P_2=P_3=0$;平衡第二阶时 $P_1=P_3=0$;平衡第三阶时 $P_1=P_2=0$。依此先后进行第一、二、三阶平衡。由代换后的(12-13)式可分别计算出为平衡三阶振型应加配重的不平衡量 $(q_{1c})_1$、$(q_{2c})_1$、$(q_{3c})_1$;$(q_{1c})_2$、$(q_{2c})_2$、$(q_{3c})_2$;$(q_{1c})_3$、$(q_{2c})_3$、$(q_{3c})_3$(括号外的数字是振型阶号)。平衡第一阶振型算得的各不平衡量都是 P_1 的函数,但可求出他们的比值,即 $(q_{1c})_1:(q_{2c})_1:(q_{3c})_1=K_1$。配重的绝对值还需用一试(三矢)法或三试(三圆)法通过试验求得。加试配重时应按所求出的比例关系加到各校正面。具体方法参照前面 12.4.3.1。为平衡第二、三阶振动需加的配重按同法求得。因各阶振型不在同一平面内,为平衡各阶求得的配重方向不同,故最后需将同一校正面上的三个应加配重的不平衡量向量迭加起来得到各个校正面上的应加配重的不平衡量。即 $q_{1c}=(q_{1c})_1+(q_{1c})_2+(q_{1c})_3$;$q_{2c}=(q_{2c})_1+(q_{2c})_2+(q_{2c})_3$;$q_{3c}=(q_{3c})_1+(q_{3c})_2+(q_{3c})_3$。以上都是向量相加。采用此方法时需先测定出几阶振动的振型,而后才能分阶平衡。振型如果是由计算获得,问题不大,只是不准;若是试验求得,有时不一定能做得到。因为低阶振型未平衡,可能因振动过大而不能开车到高阶临界附近去测量高阶的振型。因此,此法有时不能采用,需另用逐阶振型平衡法来进行平衡。

(2)逐阶振型平衡法

用平衡两阶振型的例子来说明。需用两个测试面兼作校正面。仿式(12-13)列出平衡方

程：

$$\varphi_1(x_1)(q_{1c})_1+\varphi_1(x_2)(q_{2c})_1=-P_1$$
$$\varphi_2(x_1)(q_{1c})_2+\varphi_2(x_2)(q_{2c})_2=-P_2 \qquad (12-14)$$

平衡第一阶主振型时用一试法或三试法平衡，应用两测试兼校正面之一作测试面和校正面。测试和校正面可相同或不同。平衡第一阶时不需用式(12－14)计算，待第一阶振动平衡好后，再开车测量第二阶主振型并进行平衡。此时 $P_1=0$，于是求得：

$$(q_{1c})_2/(q_{2c})_2=-\varphi_1(x_2)/\varphi_1(x_1) \qquad (12-15)$$

由上式可知平衡第二阶时需加配重的大小相对值仅与第一阶振型有关。求配重绝对值时才需要开车到或略小于第二阶临界转速，用一试或三试法求配重绝对值，试配重也是按比例加到两个校正面上。平衡第一阶主振型时不需要已知第二阶振型。待第一阶振型平衡好后再开车到等于或略小于第二阶临界就不会有问题了。所以逐阶平衡法要比前一平衡法实用。

振型平衡法需要测量转子的振型，这就必须直接测量转子的振动。对一般航空发动机来说，要在机内测量转子的振型有诸多不便，因此，此法只较适用于实验器和发动机研制中的试验机转子的动平衡。

12.4.3.3　影响系数平衡法

影响系数平衡法不与转子振型发生关系，故测试面和校正面的数目、位置不受限制。根据振动中的影响系数列出方程进行计算和平衡。

(1)测振面个数与校正面个数相同

本方法是配重个数与要减小的振动量值个数相等的一种平衡法。以两校正面为例介绍，如图 12－8，设图上 1、2 为校正面，a、b 为测试面，α 为影响系数。影响系数的定义为：在某固定转速下某平衡面上单位不平衡量引起的某测试面上的振动量。例如：

$$\alpha_{a1}=A_a/q_1,\ \alpha_{b1}=A_b/q_1,\ \alpha_{a2}=A_a/q_2,\ \alpha_{b2}=A_b/q_2, \qquad (12-16)$$

式中：A——振动量，可取为振幅、速度或加速度，也可取为与振动成比例的电压等，一经取定后不得改变。下标为测试面。

q——不平衡量，下标指校正面。

影响系数用一试法、二试法或三试法求出。

影响系数中的振动量和不平衡量都是向量。平衡转速通常选定为或靠近振动量最大的转速。设测得 a 面上的总振动量为 A_{at}，b 面上的总振动量为 A_{bt}，在 1、2 两面分别加不平衡量为 q_{1c}和 q_{2c}的配重后，它们引起的振动量与转子上原测的 a、b 面上的振动量大小相等方向相反，从而使转子上 a、b 两面的振动都被消除。依此原理列出振动方程：

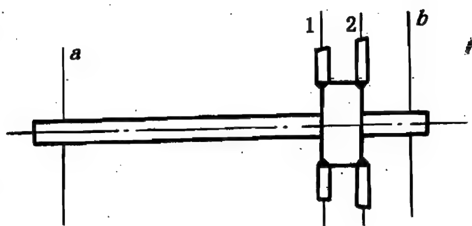


图 12－8　影响系数平衡法用图

$$\alpha_{a1}q_{1c}+\alpha_{a2}q_{2c}=-A_{at}$$
$$\alpha_{b1}q_{1c}+\alpha_{b2}q_{2c}=-A_{bt} \qquad (12-17)$$

解得

$$q_{1c}=(\alpha_{a2}A_{bt}-\alpha_{b2}A_{at})/(\alpha_{a1}\alpha_{b2}-\alpha_{a2}\alpha_{b1})$$
$$q_{2c}=-(\alpha_{a1}A_{bt}-\alpha_{b1}A_{at})/(\alpha_{a1}\alpha_{b2}-\alpha_{a2}\alpha_{b1}) \qquad (12-18)$$

式中各值都是向量，计算时应按向量运算。但是如果式中等号右边各值都是在同一转速并且是临界或靠近临界转速时求出的，则可将影响系数看作标量，只将 A_{at}、A_{bt}看成向量，则上式求

解不平衡量的运算简便得多。求出的 q_{1c}、q_{2c}也都是向量。它们的方向依振动量方向而定，应超前于振动量一个相位滞后角。最后在1、2两面上分别加上其不平衡量向量为 q_{1c}和 q_{2c}的配重即可达到平衡。

影响系数平衡法只是消除测振面上的振动量，其他面上的振动量不能保证随着减小，甚至可能增大，所以测振面应取振动量最大的面。本方法因对测试面位置无限制，故可选在机匣上。这样，对航空发动机来说测试工作要简便得多。所以，影响系数法既可用于实验器，也可用于发动机转子的平衡。但是要测试出一个影响系数还简单，多了也是很麻烦的事。

(2)校正面个数少于测振面个数

有时需要用有限的几个校正面使更多平面上的振动量都能减小下来，前一方法就没有保证，需要有其他方法。下面仍用举例来说明这种方法和其原理。设用1、2两个校正面来平衡(减小)在 a、b、c 三个面上分别测得的振动量 A_{at}、A_{bt}、A_{ct}。理论上用少数校正面不可能消除多数面上的振动量，只能使振动量减小，力求剩余振动量最小。列出振动方程：

$$\begin{aligned}\alpha_{a1}q_{1c}+\alpha_{a2}q_{2c}&=-A_{at}+B_a\\ \alpha_{b1}q_{1c}+\alpha_{b2}q_{2c}&=-A_{bt}+B_b\\ \alpha_{c1}q_{1c}+\alpha_{c2}q_{2c}&=-A_{ct}+B_c\end{aligned}\tag{12-19}$$

式中：B——剩余振动量，下标表示测振面。

剩余振动量是未知数，数学上可使其平方和最小。此方法叫最小二乘法。

上式写作矩阵形式为

$$\alpha Q=-A+B\tag{12-20}$$

式中：α——影响系数矩阵，3×2阶；

Q——配重不平衡量列阵，2×1阶；

A——测试振动列阵，3×1阶；

B——剩余振动列阵，3×1阶。

由此可求得

$$B=A+\alpha Q\tag{12-21}$$

上式写作展开式得

$$B_i=A_i+\sum\alpha_{ij}q_{jc}\qquad(i=a,b,c;j=1,2)\tag{12-22}$$

要求剩余振动量最小，用最小二乘法令剩余振动量的平方和最小，该平方和为

$$S=\sum|B_i^2|=\sum B_i\bar{B}_i\tag{12-23}$$

式中：B_i——剩余振动量，用复数表示；

$\bar{B}_i$——B_i 的复数共轭。

$$\bar{B}_i=\bar{A}_i+\sum\bar{\alpha}_{ij}\bar{q}_{jc}\tag{12-24}$$

将式(12-24)代入式(12-23)，并且为使 S 最小，令 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}B_i=0$ 得

$$\sum\bar{\alpha}_{ij}(A_i+\sum\alpha_{ij}q_{ic})=0$$

写作矩阵形式

$$\bar{\alpha}^{\mathrm{T}}A+\bar{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha q_c=0\tag{12-25}$$

令

$$Y=\bar{\alpha}^{\mathrm{T}}A,\ C=\bar{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha$$

则得

$$Y+Cq_c=0$$

于是可求得

$$q_c=-C^{-1}Y\tag{12-26}$$

需注意，一般情况前面各式中的各量都是向量，应按向量计算法运算。只当各面振动是在同一临界转速或靠近临界转速时所测的，上面各式中的影响系数才可按标量运算。此时算得的不平衡量方向由振动量方向确定，不平衡量方向应超前于振动量方向一个相位滞后角。

12.4.3.4　振型圆平衡法

振型圆平衡法是振型平衡法的一种改进方法。振型平衡法是测量转子的振动，如轴不圆或有初弯曲则会给测量带来误差。根据分析知将测得的临界转速前后多转速下的振动向量绘成极坐标图形近似于一圆。图上很低转速的振动向量（通常称慢晃向量）即是前述的误差向量。从各振动向量中减去此误差向量所得的振型圆就比较准确。此图上的最大振动向量应是临界转速时的振动向量。此向量应落后于不平衡力向量 90°，故由此可求出不平衡力的方向。不平衡力大小的求法与其他平衡法相同。下面用一单盘转子为例来说明此法的原理。单盘转子在不平衡力作用下的平衡方程为

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F \tag{12-27}$$

式中：m——质量；

c——阻尼系数；

k——刚性系数；

$z = (x + y\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$——转子的振动位移。

上式的解为

$$z = [(\omega^2 e)/(\omega_c^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega\omega_c \mathrm{i})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{12-28}$$

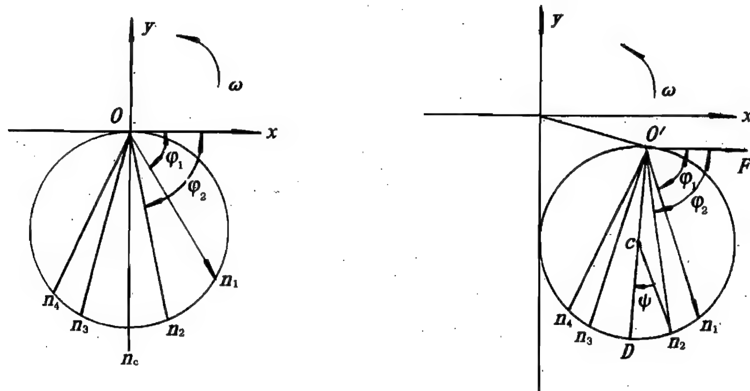
式中：$\zeta = c/(2m\omega_c)$——阻尼比；

$\omega_c = \sqrt{k/m}$——临界转速。

上式可写作

$$x^2 + \left[y + \frac{\omega e}{4\zeta\omega_c}\right]^2 = \left[\frac{\omega e}{4\zeta\omega_c}\right]^2 \tag{12-29}$$

对于一定的转子，ζ、ω_c、e 是定量，仅 ω 是变量。若 $\omega = \omega_c$，则上式是圆的方程，其图形如 12-9(a)所示，圆心在 y 轴上，圆与 x 轴相切。从原点到圆周上所作的线为各转速时的振动向



(a)未消除误差的图形　　(b)已消除测量误差的图形

图 12-9　转子的理想的振型圆图

量。过原点所作的直径(即最大振动向量)必是转子临界转速时的振动向量。当有测量误差时,若误差是常向量,则测得的振动都加上一常向量,那么图上圆的最上点就不在原点,而是在误差向量的矢端,圆上各点都按误差向量的方向移动,见图 12-9(b)。若发动机缓慢开车,将测得的过临界前后多转速下的振动向量矢端的轨迹画在极坐标图上,可得一接近圆形的图形如图 12-10 所示。图上的慢晃矢量即是由转子的不圆和原始弯曲等引起的误差矢量。若在各个振动量中减去慢晃矢量可得到较准确的振型圆图,如图 12-11 所示。

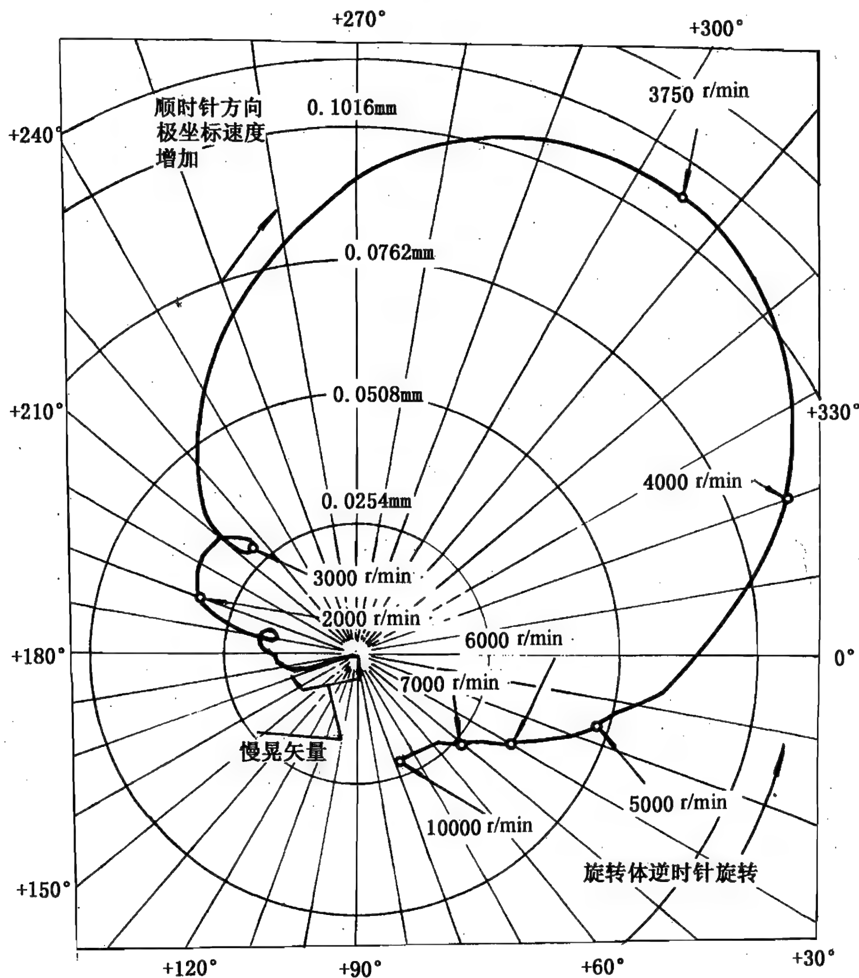


图 12-10 实际的机器转子未消除测量误差的振型圆图

图 12-10 中过原点所作的最大振动矢量所对应的转速即为临界转速。图上为 3750 r/min。在图 12-11 上过原点到 3750r/min 所作的矢量即为临界转速时的振动矢量。我们已知在临界转速时振动矢量滞后于不平衡力矢量 90°。由此可求出转子的不平衡量的方向(图上为略小于 220°)。不平衡量的大小可用一试法先求出灵敏度系数后再算得。振型圆平衡法已有专门的测试仪器可用。

12.4.4 本机平衡

发动机转子的本机平衡是指发动机整机组装好后在发动机本机器上进行的转子动平衡。

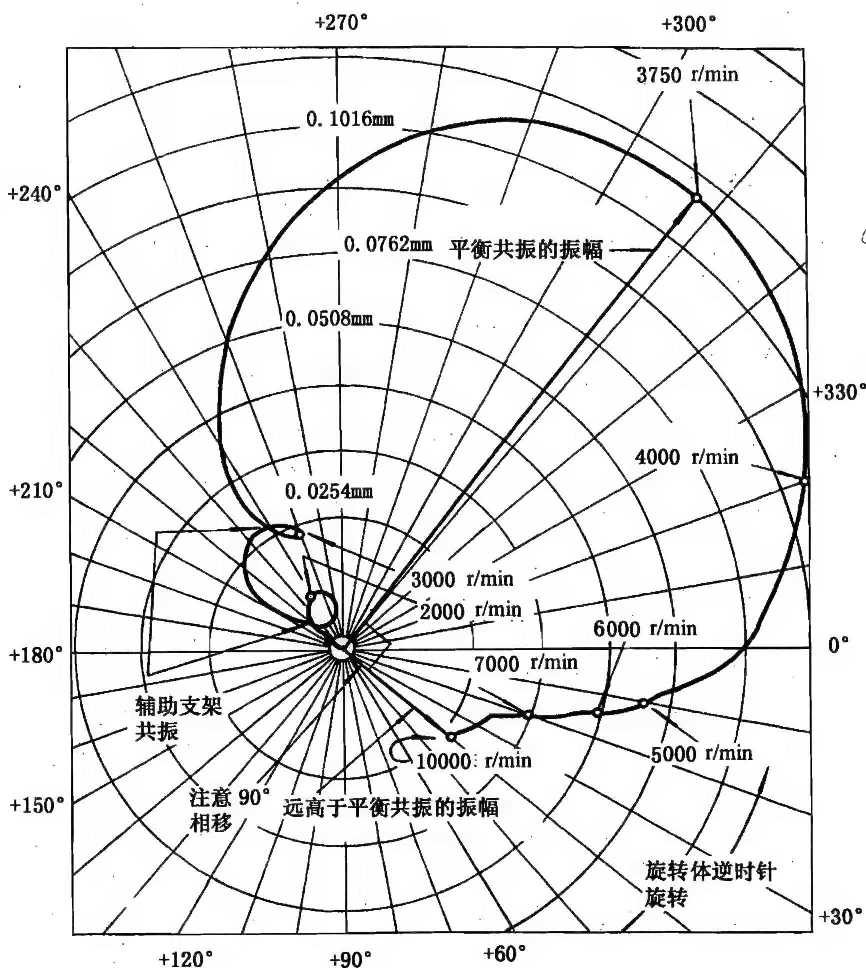


图 12-11　图 12-10 消除慢晃矢量后的情况

平衡地点可以是在试车台也可在停机场的飞机上。在发动机上平衡有很多优点：可以在高转速、高负荷、高温度的发动机工作状态下平衡，能确保发动机在工作状态仍有很高的平衡精度，不会像刚性转子在低转速平衡机上平衡那样，到工作时难保平衡时达到的平衡精度。本机平衡前后不需拆装转子，不需专用平衡机，可以省事、省时、省钱。但本机平衡也有一些缺点：只能对整台发动机转子进行平衡，不能分别对每个压气机或涡轮转子平衡。因在发动机上只能接触到压气机的前校正面和涡轮的后校正面，只好用此两校正面进行平衡，不便利用压气机后和涡轮前校正面平衡，故也不便对高压转子进行本机平衡。本机平衡时只能用增、减配重，不能借磨削零件上的材料来调平衡。为此，若发动机打算采用本机平衡，设计时就应考虑好，预先采取一些措施以保证本机平衡的可能和方便。比如，进气机匣和尾喷管很容易拆装；平衡螺钉的尺寸、重量和数量预先确定好，它们的安装、锁紧方法要简便可靠；平衡转速、振动大小和相位角的测试方法等都需预先设计好。如果本机平衡时需测振动的相位，还需要设计好确定相位角基准的装置。

本机平衡只是一种辅助平衡法，不能代替转子装配前、后应用的刚性转子的各种平衡。本机平衡只适用于生产或修理后新装配的发动机，使用中出现振动过大的发动机一般不宜采用

本机平衡法进行动平衡。这是因为使用过的发动机未经检查不能肯定发动机振动过大是由转子不平衡引起,可能有别的故障隐藏下来日后可能引发事故,造成重大损失。若某型发动机根据诊断技术或使用经验可以判断出发动机振动过大的原因是转子的不平衡,而无其他故障,那么使用中的发动机也可在本机上进行转子动平衡的。比如发动机振动过大经检验为某一个或几个风扇叶片损伤引起,则可在更换叶片后,在本机上进行动平衡。

航空发动机转子的本机平衡大都是对柔性转子进行动平衡,最常用的平衡法是单面平衡法,即 $N=1$。航空发动机转子因装配时已在平衡机上进行过刚性转子的动平衡,没有必要再在本机上进行刚性转子的动平衡。

(1)测试面和校正面

在航空发动机上进行本机平衡时,测试面即是发动机平常用的测振面,通常有1~2个,少数发动机有3个,多在压气机和(或)涡轮机匣上,分别在与压气机和涡轮轴承相通连的地区,以便测试由轴承传出的转子的振动信号。有的发动机在风扇机匣或进气机匣上还装有振动传感器,平衡时也可选作测试面。平衡时的校正面为风扇或压气机转子前的校正面和涡轮转子后的校正面。

常用前测试面和校正面对风扇或压气机转子进行平衡,用后测试面和校正面对涡轮转子进行平衡。有时,比如当压气机机匣上所测的振动量过大,用前校正面平衡时发现涡轮处振动量过大不能减小下来,则可用双面平衡法用前后两测试面和校正面对压气机和涡轮转子同时进行平衡。为了简便也可先用前测试面和平衡面对压气机平衡,而后再用后测试面和平衡面对涡轮转子进行平衡。

理论上用一个测试面和校正面对转子进行平衡时不能保证另一测试面的振动量也减小下来,反而可能使其增大。前述的先后用一个测试面和平衡面分别对压气机和涡轮转子进行平衡的办法,有时就需要反复交替用一个测试面和平衡面分别对压气机和涡轮转子平衡。但是由于这种情况不多见且因双面平衡法较麻烦,故一般仍用一个测试面和平衡面对转子平衡。当发现另一测试面的振动量过大未能减小下来时,再用另一测试面和平衡面去平衡。

(2)平衡转速

平衡转速即是测试转速。本机平衡可用单速平衡也可用多速平衡。单速平衡时,一般取测试面振动量最大的转速或临界转速,或靠近临界而稍低的某转速作为平衡转速。由于平衡结果只能保证平衡转速时测试面的振动减小,其他转速时的振动则只好听其自然。因平衡时已取振动最大的转速作为平衡转速,该转速下振动既已减小,其他转速下的振动一般也就不会过大。但是也有的发动机或者有的时候,几个转速下转子的振动都较大,要求这些转速下的振动都能保证减小下来,这时就需要用多转速平衡。

(3)平衡方法

本机平衡多用一试法、三试法或向量分析法平衡。当用影响系数法平衡时,采用一试法求得影响系数。取临界或靠近临界的转速作为平衡转速时,可将影响系数视作标量,这时可用二试法测试出影响系数,因为不需要知道影响系数的方向,用二试法求影响系数,试验时不需要测试振动方向的仪器,加试配重的次数比三试法少,可简便一些。

在平衡时都要测得或求出不平衡量 $\boldsymbol{q}$ 和其引起的振动量 $\boldsymbol{A}$ 的比值 $\boldsymbol{q}/\boldsymbol{A}$,称灵敏度系数(影响系数为 $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{q}$,是灵敏度系数的倒数)。不同发动机或不同转速时的灵敏度系数是不同的,但同型发动机或是同一台发动机同转速时的灵敏度系数,虽还与发动机工作温度和测试精度等有关,通常是变化不大的。一试法中初次试加配重大小的选取可根据该发动机前次平衡

时的灵敏度系数或以前多次平衡时的灵敏度系数平均值的大小和本次平衡所测得的振动量值 A_x 来计算。即所选配重的不平衡量为

$$q_0 = A_x(q_x/A_x)^* \tag{12-30}$$

式中：$(q_x/A_x)^*$——为前次或以前多次平衡时测得的灵敏度系数。

试配重的方向则由上次平衡时的相位滞后角和本次所测振动的方向而确定。这样选试配重可保证发动机开车时不致振动过大，也有可能一加试配重后转子便达到平衡要求，不需要再进行以后的平衡工作了。试配重也就是平衡时需要加的配重。

三试法因需要先后在三个不同的方向加试配重，所以采用三试法时，初试配重如按上述方法计算总是会有所测振动量比原振动量还大的时侯。为了使平衡时振动不致过大，根据振动情况选取试配重的大小，以先取较小的试配重为宜。

在航空发动机上因校正面只限于1～2个，故本机平衡时往往只用一个校正面平衡。用前校正面对压气机转子和(或)风扇转子平衡，用后校正面对涡轮转子平衡。有时虽用两校正面平衡，但是多数是先、后用一个校正面分别对压气机和涡轮转子平衡。发动机中同时用两个校正面对两个转子平衡的例子很少。上述几种平衡法适用于单(校正)面平衡。如果要在本机上进行刚性转子的动平衡，则必须同时用两个校正面进行平衡。故柔性转子需采用双面法进行本机平衡时，可参考刚性转子的本机平衡法。

当前后两测试面所测振动都较大，需要都减小时，最好用两校正面同时对两测试面所测振动数据平衡。这样，平衡后两测试面的振动都能减小下来。但是，这种方法计算工作较繁些，在航空发动机柔性转子的平衡中采用得不多。

一台发动机振动过大究竟主要是压气机还是涡轮转子需要平衡，最好事先对转子的动力特性进行分析研究，了解清楚各测振面在各转速时的振动与几个转子的不平衡量之间的关系，以便通过测振结果就可判断出哪一个转子要平衡，或者两个转子都需要平衡。简单但是较粗糙的判断办法是前测试面振动过大就需要平衡压气机转子，后测试面振动过大就需要平衡涡轮转子。

当需要保证几个转速下的振动都要减小时，就需要用多速向量平衡法。此法先是要用一试法或三试法测试并通过作图或计算，先后求出转子分别在几个转速时的不平衡量向量。方法和单转速平衡时一样。因各转速下的不平衡量向量的大小和方向均不同，试图用一个大小和方向一定的不平衡量向量使转子在各转速下达到平衡是不可能的。因而采取一种折衷的方法，使几个转速下的不平衡量都有所减小。用作图法进行平衡分析比较简单，方法是将几个转速下求得的不平衡量向量先画在极坐标图上，即通过圆心画出这些不平衡量向量，连接两两相邻向量的矢端，得一多边形。求出该多边形的中点。由圆心到此中点的连线构成的向量即代表上述几个向量的折衷向量。与此相反的向量即为所求的配重的平衡量向量。据此加配重即可使转子的几个转速的不平衡量得到折衷平衡。

如果确定将在发动机上进行本机平衡，除应将前面已谈到的有关本机平衡的各种问题研究、考虑清楚外。还有平衡时开车运行规范、本机平衡规程等。前者包括对诸如开车、加速和停留的转速和时间的规定或限制；后者包括平衡的各种技术条件，如什么情况允许本机平衡，什么情况应对压气机或涡轮转子进行平衡，什么情况下需对两个转子平衡，平衡合格的振动标准是什么，对所加配重的限制值是多少等等。

12.5 本机平衡实例

12.5.1 实例1 JT3D－3B发动机的本机平衡

(1)该机有关规定数据

a.验收试车振动振幅极限值(径向双幅)：

进气机匣	0.0762mm
扩压机匣	0.0762mm
涡轮排气机匣	0.1016mm

b.可调平衡转子极限基振双幅值：

进气机匣	0.1270mm
扩压机匣	0.1016mm
涡轮机匣(除 $n1=4200\sim5600r/min$)	0.1524mm
涡轮机匣(当 $n1=4200\sim5600r/min$)	0.2032mm

c.JT3D－3B发动机平衡经验数据：

压气机平衡:进气机匣处测振数据

转速 $n1$ (r/min)	灵敏度系数 (g·cm/mm)	滞后相位角 (deg)	平衡平面
6200	42524	340	压气机一级动叶或前轴颈上
6300	41107	345	压气机一级动叶或前轴颈上
6500	35437	345	压气机一级动叶或前轴颈上

涡轮平衡:排气机匣测振数据

转速 $n1$(r/min)	灵敏度系数(g·cm/mm)	滞后相位角(deg)	平衡平面
4200～5200	8504.8	0	涡轮第四级动叶 或第四级平衡环

(2)试车台上试车时测得的振幅值

转速 $n1$(r/min)	测振部位	基振振幅值(mm)
6480	进气机匣	0.04572
4820	涡轮排气机匣	0.08890

按(1)b.中规定可进行本机平衡。先对低压压气机转子进行本机平衡。

(3)进气机匣处测振数据

转速 $n1$ (r/min)	总振动振幅 (mm)	低压基振振幅 (mm)	相位角 (deg)
6480	0.05842	0.04572	125
6300	0.04826	0.04064	120
6200	0.03810	0.03556	110

(4)作极坐标图(图 12－12)并平衡

本例用一测试面和一校正面(*N* 面法,*N*＝1)采用一试法对低压压气机转子进行单转速平衡。平衡转速为 6480 r/min。第一次平衡不加试配重,用经验的灵敏度系数和相位滞后角计算所需配重。图上作出所测振动向量 ***A***(0.04572mm,125°)计算角度的方向与发动机转向相反,为反时钟方向,正上方为 0°。那么平衡配重引起的振动向量应为 ***R***(0.04752mm,305°)。据(1)c.中相角滞后为 345°,灵敏度系数为 35437g·cm/mm,由此算出配重 CW1 的方向角为 125°＋180°－345°＝－40°,亦即 320°,配重的不平衡量为 CW1＝4537×0.04572＝1620g·cm。按规定调平衡时所加配重的不平衡量不得超过 720.5g·cm,故只好在第 5 号叶片(实际为 318.5°)加上720.5g·cm 的不平衡量(用钢丝绕在叶片凸台下)。再开车到 *n*1＝6480r/min 检验,测得振动为 0.0254mm,相位角为 140°。在图上绘出该向量 ***C***。振动量虽已减到限制值以下,达到合格标准,但振动仍不算小。为了进一步将振动减小,重新用一试法进行平衡。

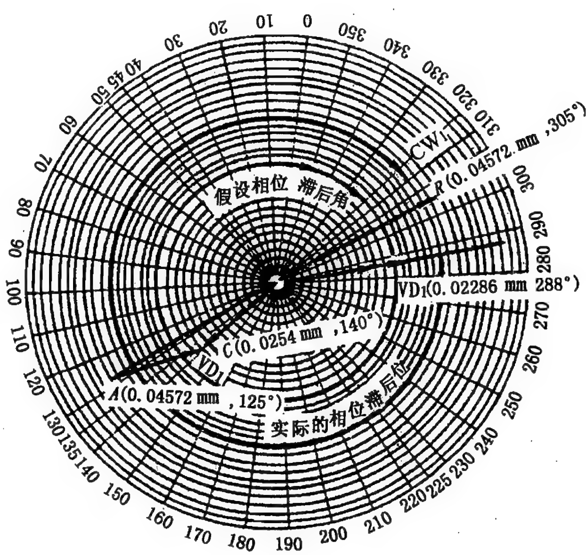


图 12－12 JT3D 发动机平衡极坐标图

因上次平衡是根据以前的经验灵敏度系数和相位角计算的,这只是平均值或以前平衡时的数值,用于本次平衡精度不高,不如现测这两数据。为此需加试配重,为了省事就以上次平衡所加配重 CW1 作为这次平衡所加的试配重。加配重后的振动亦已测出。此振动值应是所加试配重的不平衡量和转子原有的不平衡量共同引起的。那么从此振动向量中减去原振动向量,就得到试配重引起的振动向量。向量减法用作图来完成。在极坐标图上连接向量 ***A***(原振动)和 ***C*** 的矢端得向量 **VD1**,其矢端向着向量 ***C***。则

$$\mathbf{VD1} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A} \tag{12-31}$$

将此振动向量移到从原点起始。此即为所加试配重引起的振动,由图上量得该振动振幅为 0.02286mm,相位角为 288°。则可求出新的灵敏度系数为 720.5/0.02286＝31518g·cm/mm,相位滞后角为 320°－288°＝32°。亦即配重方向应超前振动向量 32°。即应从 ***R*** 向量算起反时钟方向转过 32°处加配重。上次配重 CW1 是加在 320°处,距向量 ***R*** 位置为 320°－305°＝15°。故本次平衡算得的应加配重方向是比上次多了 32°－15°＝17°。即本次平衡应将配重向反时钟方向移动 17°。应加配重的不平衡量的大小是 CW2＝31518×0.4572＝1441g·cm。因按规定只允许加配重 720.5g·cm,故将上次的配重 CW1 改装到 305°＋32°＝337°处(装上平衡螺钉)再次开车检验,测得振幅显著减小,平衡合格。但是在 4820r/min 时,在涡轮机匣处的振动仍较大为 0.08890mm,所以再对低压涡轮转子调平衡。

(5)涡轮机匣处所测振动值

转速 $n1$ (r/min)	总振幅 (mm)	基振振幅 (mm)	相位角 (deg)
4820	0.1016	0.0889	240
4700	0.0813	0.0737	200
4600	0.0635	0.0610	175

(6)极坐标图和平衡

按单速(4820r/min)、单测试面和单校正面(仍采用 N 面法,$N=1$)进行涡轮转子平衡。在极坐标图12-13上作原振动向量 $\boldsymbol{A}$(0.0889mm,240°),再作出其反向量 $\boldsymbol{R}$(0.0889mm,60°)由(1)c.中知经验相位滞后角为0°,灵敏度系数为8504.8g·cm/mm。算出应加配重 CW1 = 0.0889 × 8504.8 = 756g·cm。但限于规定只能加720.5g·cm,因而在68号叶片(58.5°)处加720.5g·cm配重。开车到4820 r/min,测得振动向量 $\boldsymbol{C}$(0.0635mm,130°)并绘于图上。振动仍嫌大,再次进行平衡。为省事以所加配重CW1为试配重。加该配重后所测振动应为试配重和原不平衡量共同引起。由向量相减求出试配重引起的振动向量 $\mathbf{VD1}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}$,即向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 矢端连线,方向由 $\boldsymbol{A}$ 向 $\boldsymbol{C}$。将 VD1 移到圆心。

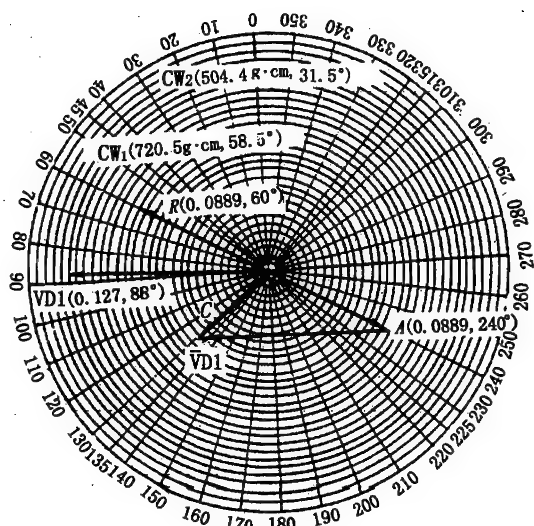


图 12-13 涡轮转子平衡极坐标图

量得VD1向量为0.127mm,88°。重新求得灵敏度系数为720.5/0.127 = 5673g·cm/mm,相位滞后角为58.5° - 88° = -29.5°。于是算得应加配重为5673 × 0.0889 = 504.4g·cm,配重相位角为超前于振动 $\boldsymbol{R}$ 向量29.5°,故应为60° - 29.5° = 30.5°。因而在第74号叶片上(实为31.5°)加配重CW2(暂绕钢丝)。再开车检验,在4820r/min时发动机已达平衡。拆下钢丝,最后在第四级平衡环上,在0°和36°装4号配重,在72°处装2号配重,这样就相当于在31.5°处装了504.5g·cm配重。再开车检验。两次运转测试振幅结果如下:

$n1$ (r/min)	运转1振幅 (mm)	运转2振幅 (mm)
4820	0.01016	0.0762
4700	0.0508	0.0508
4600	0.0508	0.0254

两次所测振幅均在0.1016mm以下,因而认为平衡合格。

12.5.2 实例2 CFM56-3FA发动机的平衡

(1)CFM56-3FA发动机振动限制数据

a.低压转子

转速	测振位置	振动量限制值
$n1$	1# 轴承	0.0111125mm
$n1$	涡轮机匣	0.0111125mm

b.高压转子

转速	测振位置	振动限制值
$n2$	1# 轴承	41.275mm/sed
$n2$	涡轮机匣	41.275mm/sed

(2)一试向量图平衡法(多速平衡法)

a.原始测振值

转速 $n1$ (r/min)	1# 轴承		涡轮机匣	
	振幅(mm)	相位角(deg)	振幅(mm)	相位角(deg)
3400	0.00762	40	0.0218	123
4200	0.0096	32	0.02413	12.5
4400	0.00650	80	0.01778	187.5

b.平衡经验数据

转速 $n1$ (r/min)	1# 轴承		涡轮机匣	
	灵敏度	相位角(deg)	灵敏度	相位角(deg)
3400	20866	190	19685	0
4200	19685	160	14960	0
4400	24803	160	11811	340

c.涡轮转子的平衡

由(2)a.中看出涡轮处三转速的振动都较大,故对涡轮转子进行多速平衡。按 a.、b.中所给数据算得的为平衡涡轮处所测振动,各转速应加配重的不平衡量为

转速 (r/min)	配重的不平衡量 (g·cm)	配重的相位角 (deg)
3400	4300	133.0
4200	3610	12.5
4400	2100	167.5

d.作向量图求配重折衷的不平衡量

由(2)c.中看出,为要平衡三个转速下的振动,在三个转速应加的配重不同。这实际上是作不到的。只好求出一个折衷的配重,使三个转速下的振动都能适当减小。将(2)c.中求得的三个不平衡量向量画于极坐标图 12－14 上。图上相位角的度量是顺时针方向为正。连接两两相邻的向量矢端,得一三角形。作该三角形的三个边的中线,其交点即为三角形的中点 O'。连接圆心 O 和 O'。则向量 $\overrightarrow{OO'}$ 即为所求的折衷配重 $W1$ 的不平衡量。从图上量得其值为 1750 g·cm,方向角 β 为 105°。加上此配重后所测振动如下表:

转速 n1 (r/min)	1#轴承机匣		涡轮机匣	
	振幅(mm)	相位角(deg)	振幅(mm)	相位角(deg)
3400	0.0508	180	0.0160	100
4200	0.0381	120	0.0508	45
4400	0.05588	343	0.0152	262.5

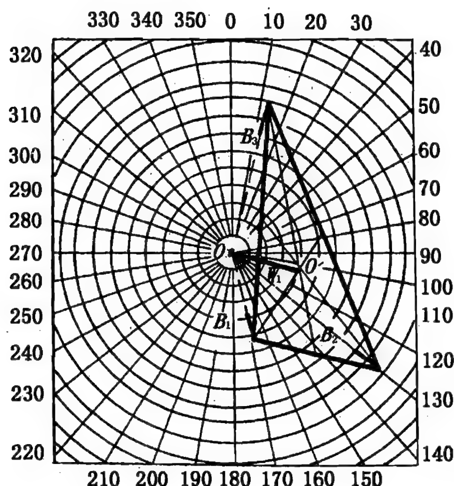


图 12-14 求折衷配重的向量分析图

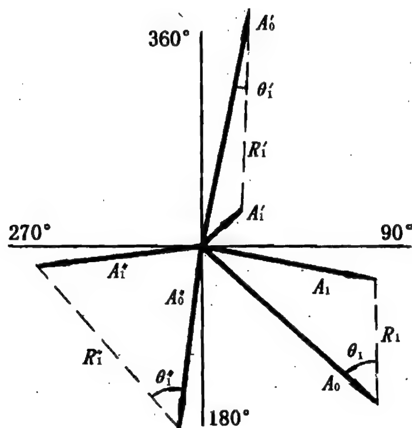


图 12-15 振动向量分析图

由表可见涡轮机匣的振动仍然过大,需再次平衡。现仍用一试和向量作图法重新平衡。原始振动仍用(2)a.中的所测三转速的振动向量 A_0、A'_0、A''_0,并画于向量分析图 12-15 上。试配重即为上次所加的配重。加此配重后所测三转速的振动向量 A_1、A'_1、A''_1 亦已测出如上表。亦将其画于图上。此振动是原始不平衡量和所加试配重共同引起。那么试配重在三个转速下引起的振动向量为 R_1、R'_1、R''_1。它们可由下式求得:

$$R_1 = A_1 - A_0, R'_1 = A'_1 - A'_0, R''_1 = A''_1 - A''_0 \tag{12-32}$$

用作图法求出,即连接 A_0 和 A_1 矢端得 R_1,余类推。由向量分析图还可求出各转速下原始振动与试配重引起的各该转速的振动的相位角差值 θ_1、θ'_1、θ''_1。可见试配重的不平衡量方向与平衡原始振动的配重在各转速时的不平衡量方向之间亦有此相位角差。由此可求出新的灵敏度系数和相位滞后角。并算出在各转速下应加配重的不平衡量的大小和方向。计算公式如下:

$$V_1 = W_1 A_0 / R_1, \gamma = \beta + 0 \tag{12-33}$$

应注意 θ 角的正负是由向量 $\boldsymbol{R}$ 转到向量 $\boldsymbol{A}$,顺时钟方向为正,逆时钟方向为负。求出三个转速下应加配重的不平衡量后,按前面求应加配重 $W1$ 的同样方法,作向量分析图,并作出三角形,求折衷配重 $W2$。如经开车检验振动合格即平衡完毕,否则需再次平衡。

12.6 刚性转子的本机平衡

在设计、研究工作中常常会需要设计、制造或应用一些旋转实验器。实验器转子如果是刚

生转子，当然需要按刚性转子进行动平衡，即使是柔性转子也往往须先作刚性转子的动平衡。各转子拆下拿到平衡机上去平衡实在麻烦，何况可能没有合适的刚性转子平衡机或者要花很多钱去建立平衡设备。如能在本机上进行刚性转子的动平衡将是十分方便和有益的。下面用举例来说明刚性转子的本机平衡方法。

刚性转子平衡需要用两个测试面和两个校正面。如图 12-16所示，设 A、B 为平衡面，1、2 为测试面。可以用前面介绍过的影响系数法平衡，但需要在两校正面上加试配重，通过试验求出影响系数。下面介绍的换算平衡法只需在一个校正面上加试配重，试验开车次数少，简便、省事。

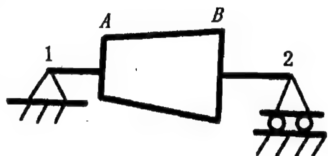


图 12-16　跨梁式刚性转子平衡图

用一试法或三试法分别对 1、2 两测试面的振动和不平衡量进行测算。平衡转速取振动较大可测量的转速。开车到平衡转速测出 1、2 两测试面的振动。然后在 A 或 B 面加试配重。因为转子系统的几何尺寸已知，故可算出相当于在 1、2 面所加的试配重。用一试法或三试法求出试配重在 1、2 两面上引起的振动量。根据 1、2 两测试面上算出的试加配重的不平衡量，可求得该两面上的灵敏度系数和相位滞后角(详见一试法或三试法)。进而算出转子在 1、2 两面上原有的不平衡量向量(含大小和方向)。再通过静力学换算法换算出转子在 A、B 两平衡面上的不平衡量。然后可在此两面上在求得的不平衡量相反的方向加配重进行平衡。

将前面求出的在 1、2 两面上的原转子不平衡量向量 $\boldsymbol{q}_x^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{q}_x^{(2)}$(其中 x 表示要求的，即转子上原有的；上标表示面号)，用静力学方法分解转移到 A、B 面上。对 B 点取矩，按力矩相等求得：

$$\boldsymbol{q}_x^A = \boldsymbol{q}_x^{(1)} L_{1B}/L_{AB} - \boldsymbol{q}_x^{(2)} L_{2B}/L_{AB} \tag{12-34}$$

对 A 点取矩，按力矩相等求得：

$$\boldsymbol{q}_x^B = \boldsymbol{q}_x^{(2)} L_{2A}/L_{AB} - \boldsymbol{q}_x^{(1)} L_{1A}/L_{AB} \tag{12-35}$$

对于如图 12-17 所示的悬臂式刚性转子，可求得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_x^A &= \boldsymbol{q}_x^{(1)} L_{1B}/L_{AB} + \boldsymbol{q}_x^{(2)} L_{2B}/L_{AB} \\ \boldsymbol{q}_x^B &= \boldsymbol{q}_x^{(1)} L_{1A}/L_{AB} - \boldsymbol{q}_x^{(2)} L_{2A}/L_{AB} \end{aligned} \tag{12-36}$$

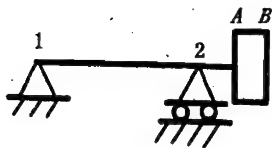


图 12-17　悬臂式刚性转子平衡图

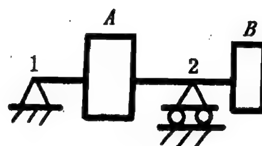


图 12-18　跨悬式刚性转子平衡图

对于如图 12-18 所示的跨悬式刚性转子，可得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_x^A &= \boldsymbol{q}_x^{(1)} L_{1B}/L_{AB} + \boldsymbol{q}_x^{(2)} L_{2B}/L_{AB} \\ \boldsymbol{q}_x^B &= -\boldsymbol{q}_x^{(1)} L_{1A}/L_{AB} + \boldsymbol{q}_x^{(2)} L_{2B}/L_{AB} \end{aligned} \tag{12-37}$$

对于图 12-19 所示的两端双悬臂刚性转子，可得：

$$q_x^A = q_x^{(1)}L_{1B}/L_{AB} + q_x^{(2)}L_{2B}/L_{AB}$$
$$q_x^B = q_x^{(1)}L_{1A}/L_{AB} + q_x^{(2)}L_{2A}/L_{AB} \tag{12-38}$$

求得转子在 A、B 面上的不平衡量后,即很容易在该面上加配重以平衡。

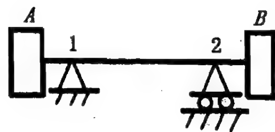


图 12-19 两端双悬臂刚性转子平衡图

参 考 文 献

[1]关于刚性转子旋转体平衡精度的推荐资料.国际标准化协会,1967.

[2]旋转机械的平衡精度.日本工业标准 JIB-0905-1967

[3]平衡术语国际标准 (ISO)1974.

[4]晏砺堂主编.结构系统动力特性分析. 北京:北京航空航天大学出版社,1989.

[5]晏砺堂编著. 航空燃气轮机振动和减振. 北京:国防工业出版社,1991.

[6]晏砺堂,晓光.CMF56-3发动机本机平衡技术.国际航空, 1989 第三期.

[7]张逸民编. JT3D-3B 涡轮风扇发动机.国外航空技术, 发动机类 41,1976.

[8]晏砺堂, 朱梓根,李其汉. 高速转子的本机平衡. 航空动力学报, 第3卷, 第4期, 1988.

[9]晏砺堂, 李其汉. 判断主不平衡转子的方法.航空动力学报, 第3卷, 第4期,1988.